MEC 2355- Período 2018.2- Turbulência

Prof. Angela O. Nieckele - Lista de Exercícios 4 - data de entrega: 12 de Novembro de 2018

1. Seja Q definido por $Q = a + b\,U$ onde U é uma variável randômica, e a e b são constantes.

   Mostre que: (a) $\langle Q\rangle = a + b\langle U\rangle$ (b) $\mathbf{var}\langle Q\rangle = b^2\,\mathbf{var}\langle U\rangle$

   (c) $\mathbf{var}\langle U\rangle = \left\langle U^2\right\rangle - \langle U\rangle^2$; (d) $\text{sdev}(Q) = b\,\text{sdev}(U) = b < u^2 >^{1/2}$

   (e) se U_1 e U_2 são variáveis randômicas: $\mathbf{var}(U_1 + U_2) = \mathbf{var}(U_1) + \mathbf{var}(U_2) + 2\,\mathbf{cov}(U_1, U_2)$

2. Seja U_1 e U_3 variáveis randômicas não correlacionadas, e seja U_2 definido por

   $U_2 = a + b\,U_1 + c\,U_3$; onde *a, b* e *c* são constantes. Mostre que o coeficiente de

   correlação ρ_{12} é $\rho_{12} = \dfrac{b}{\left(b^2 + c^2 < u_3^2 > / < u_1^2 >\right)^{1/2}}$

   Mostre então que U_1 e U_2 são

   a. não correlacionados ($\rho_{12} = 0$) se b é zero e c é não-zero
   b. perfeitamente correlacionados ($\rho_{12} = 1$) se c é zero e b é positivo
   c. perfeitamente negativamente correlacionados ($\rho_{12} = -1$) se c é zero e b é negativo

3. Mostre que para uma distribuição uniforme $f(V) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \quad para \quad a \le V < b \\ 0 & ; \quad para \quad V < a \quad e \quad V \ge b \end{cases}$

   i. $\langle U\rangle = 1/2(a+b)$ ii. $\mathbf{var}\langle U\rangle = (1/12)(b-a)^2$

   iii. $\hat{\mu}_3 = 0$ iv. $\hat{\mu}_4 = 9/5$

4. Mostre que o vetor flutuação de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}(\mathbf{x},t) - \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x},t)$ evolui de acordo com

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_i\,U_j - \overline{U_i\,U_j}\right) = \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}$$

ou

$$\frac{D u_j}{Dt} = -u_j \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i\,u_j}\right) + \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}$$

onde p' é o campo de velocidade flutuante ($p' = p - \overline{p}$). Mostre então que a energia cinética turbulenta evolui de acordo com

$$\frac{D\kappa}{Dt} + \nabla \bullet \overline{\mathbf{T}'} = \wp - \varepsilon$$

onde $\overline{T_i'} = \overline{u_i\, u_j\, u_j} + \overline{u_i\, p'}/\rho - 2\upsilon\, \overline{u_j\, s_{ij}}$; $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Obs: Subtraia a equação de Reynolds

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) = \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial\, \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_i}$$

da equação de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}$$

5. Mostre que a equação de energia cinética turbulenta também pode ser escrita como

$$\frac{D\kappa}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\overline{u_i\, u_j\, u_j} + \frac{\overline{u_i\, p'}}{\rho}\right] = \upsilon\, \nabla^2\, \kappa + \wp - \tilde{\varepsilon}$$

onde a pseudo dissipação é $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \upsilon \dfrac{\partial^2\, \overline{u_i\, u_j}}{\partial x_i\, \partial x_j}$