MEC 2355- Período 2016.2- Turbulência

Prof. Angela O. Nieckele - Lista de Exercícios 4 - data de entrega: 7 de Novembro de 2016

1. Sabendo que os tensores taxa de deformação média e taxa de rotação média são definidos por

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \overline{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)$$

Mostre que

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} = \overline{S}_{ij}\ \overline{S}_{ij} - \overline{\Omega}_{ij}\ \overline{\Omega}_{ij} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{S}_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{U}_j}{\partial x_i\, \partial x_i}$$

2. A partir da equação de Reynolds

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial t} + \overline{U}_i\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) = \upsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i\, u_j}}{\partial x_i}$$

mostre que a equação para e energia cinética média $\overline{E}(x,t) = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{U}}\bullet\overline{\mathbf{U}}$

$$\frac{D\overline{E}}{Dt} + \nabla\bullet\overline{\mathbf{T}} = -\wp - \overline{\varepsilon}$$

onde $\wp = -\overline{u_i\, u_j}\,\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$; $\overline{T}_i = \overline{U}_j\,\overline{u_i\, u_j} + \overline{U}_i\ \overline{p}/\rho - 2\upsilon\ \overline{U}_j\,\overline{S_{ij}}$; $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)$

3. Mostre que o vetor flutuação de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}(\mathbf{x},t) - \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x},t)$ evolui de acordo com

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U_i\, U_j - \overline{U_i\, U_j}\right) = \upsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}$$

ou

$$\frac{D u_j}{Dt} = -u_j\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i\, u_j}\right) + \upsilon\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}$$

onde p' é o campo de velocidade flutuante ($p' = p - \overline{p}$). Mostre então que a energia cinética turbulenta evolui de acordo com

$$\frac{D\kappa}{Dt} + \nabla\bullet\overline{\mathbf{T}'} = \wp - \varepsilon$$

onde $\overline{T_i'} = \overline{u_i\, u_j\, u_j} + \overline{u_i\ p'}/\rho - 2\upsilon\ \overline{u_j\ s_{ij}}$; $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Obs: Subtraia a equação de Reynolds

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) = \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_i}$$

da equação de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}$$

4. Mostre que a equação de energia cinética turbulenta também pode ser escrita como

$$\frac{D\kappa}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\overline{u_i\, u_j\, u_j} + \frac{\overline{u_i\, p'}}{\rho}\right] = \upsilon\, \nabla^2 \kappa + \wp - \tilde{\varepsilon}$$

onde a pseudo dissipação é $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \upsilon \dfrac{\partial^2 \overline{u_i\, u_j}}{\partial x_i\, \partial x_j}$

5. Considere a equação de transporte das tensões de Reynolds

$$\frac{\partial\, \overline{u_i'\, u_j'}}{\partial t} + \overline{u_\ell}\, \frac{\partial\, \overline{u_i'\, u_j'}}{\partial x_\ell} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

onde $D_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\dfrac{\mu}{\rho}\; \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\overline{u_i'\, u_j'})\right] + \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}\left[\overline{u_i'\, u_j'\, u_\ell'} + \overline{\dfrac{p'}{\rho}\; (\delta_{\ell j}\, u_i' + \delta_{i\ell} u_j')}\right]$

$$P_{ij} = \left[\overline{-\, u_i'\, u_\ell'}\; \frac{\partial\, \overline{u_j}}{\partial x_\ell} + \overline{-\, u_j'\, u_\ell'}\; \frac{\partial\, \overline{u_i}}{\partial x_\ell}\right]$$

$$\Pi_{ij} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right]} \qquad ; \varepsilon_{ij} = 2\; \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_\ell}\; \frac{\partial u_j'}{\partial x_\ell}\right]$$

Mostre como esta equação pode ser obtida utilizando-se o seguinte procedimento

- Subtrair a equação média de Navier-Stokes da equação de Navier-Stokes, para o componente $\overline{u_i}$
- Fazer um produto escalar desta equação com u_j'
- Subtrair a equação média de Navier-Stokes da equação de Navier-Stokes, para o componente $\overline{u_j}$
- Fazer um produto escalar desta equação com u_i'
- Somar as duas equações
- calcular a média temporal