MEC 2355- Período 2016.2- Turbulência

Prof. Angela O. Nieckele - Lista de Exercícios 3 - data de entrega: 31 de Outubro de 2016

1. Seja Q definido por $Q = a + b\,U$ onde U é uma variável randômica, e a e b são constantes.

   Mostre que: (a) $\langle Q\rangle = a + b\langle U\rangle$ (b) $\mathbf{var}\langle Q\rangle = b^2\,\mathbf{var}\langle U\rangle$

   (c) $\mathbf{var}\langle U\rangle = \langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2$; (d) $\text{sdev}(Q) = b\,\text{sdev}(U) = b < u^2 >^{1/2}$

   (e) se U_1 e U_2 são variáveis randômicas: $\mathbf{var}(U_1 + U_2) = \mathbf{var}(U_1) + \mathbf{var}(U_2) + 2\,\mathbf{cov}(U_1, U_2)$

2. Mostre que as propriedades da PDF conjunta

(i) $P\{V_{1a} \le U_1 < V_{1b}; V_{2a} \le U_2 < V_{2b}\} = \int_{V_{1a}}^{V_{1b}} \int_{V_{2a}}^{V_{2b}} f_{12}(V_1, V_2)\, dV_1\, dV_2$

(ii) $f_{12}(V_1, V_2) \ge 0$; (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(V_1, V_2)\, dV_1 = f_2(V_2)$; (iv) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(V_1, V_2)\, dV_1\, dV_2 = 1$

   podem ser obtidas a partir das definições da

   CDF conjunta:

$$F_{12}(V_1, V_2) \equiv P\{U_1 < V_1\,, U_2 < V_2\}$$

   PDF conjunta:

$$f_{12}(V_1, V_2) \equiv \frac{\partial^2}{\partial V_1\, \partial V_2} F_{12}(V_1, V_2)$$

3. Seja U_1 e U_3 variáveis randômicas não correlacionadas, e seja U_2 definido por

   $U_2 = a + b\,U_1 + c\,U_3$; onde *a, b* e *c* são constantes. Mostre que o coeficiente de

   correlação ρ_{12} é $\rho_{12} = \dfrac{b}{\left(b^2 + c^2 < u_3^2 > / < u_1^2 >\right)^{1/2}}$

   Mostre então que U_1 e U_2 são

   a. não correlacionados ($\rho_{12} = 0$) se b é zero e c é não-zero
   b. perfeitamente correlacionados ($\rho_{12} = 1$) se c é zero e b é positivo
   c. perfeitamente negativamente correlacionados ($\rho_{12} = -1$) se c é zero e b é negativo

4. Mostre que para uma distribuição uniforme $f(V) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \; para \quad a \le V < b \\ 0 & ; \; para \quad V < a \quad e \quad V \ge b \end{cases}$

   i. $\langle U\rangle = 1/2(a+b)$ ii. $\mathbf{var}\langle U\rangle = (1/12)(b-a)^2$

   iii. $\hat{\mu}_3 = 0$ iv. $\hat{\mu}_4 = 9/5$

5. Se **u**(**x**, t) possui divergência nula, i. e., **div u** = 0, mostre que a correlação de dois pontos $R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{x},t) = \langle u_i(\mathbf{x},t)\, u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rangle$ satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{x},t) = 0$$

Mostre que, se, adicionalmente, ***u(x**, t)* é estatisticamente homogêneo, então

$$\frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial r_i} R_{ij}(\mathbf{r},t) = 0$$