Energia Cinética

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\mathbf{U}\bullet\mathbf{U}$$

$$< E(x,t) > = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{U}\bullet\mathbf{U}} \quad \Rightarrow \quad < E(x,t) > = \overline{E}(x,t) + \kappa$$

$$\overline{E}(x,t) = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{U}}\bullet\overline{\mathbf{U}} \quad , \quad \kappa = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$$

- Vimos que tanto a parte isotrópica, como anisotrópica das tensões de Reynolds são proporcionais à energia cinética turbulenta κ, o que mostra que essa grandeza é de grande importância

- Vamos então analisar os processos do escoamento turbulento que geram e dissipam energia cinética turbulenta

❑A evolução da energia cinética instantânea pode ser obtida da equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{DU_j}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad \text{onde} \quad \tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\rho\,\upsilon\,S_{ij} \quad \text{e} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \mathbf{U} \bullet \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \quad ; \quad \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \bullet (\mathbf{U}\,E)$$

$$U_j \frac{DU_j}{Dt} = \frac{U_j}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial (U_j\,\tau_{ij})}{\partial x_i} - \tau_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial (U_j\,\tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\left(\tau_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \tau_{ji}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\right] \quad \text{mas} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$U_j \frac{DU_j}{Dt} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial (U_j\,\tau_{ij})}{\partial x_i} - \tau_{ij}\,S_{ij}\right]$$

- Substituindo a tensão para fluido Newtoniano $\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\rho\,\upsilon\,S_{ij}$

$$U_j \frac{DU_j}{Dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left[U_j\left(-\frac{p}{\rho}\delta_{ij} + 2\upsilon\;\; S_{ij}\right)\right] - \left(\frac{p}{\rho}\delta_{ij} + 2\upsilon\, S_{ij}\right)S_{ij}\right]$$

$$= \left[-\frac{\partial\, U_i\, \mathbf{(}p/\rho\mathbf{)}}{\partial\, x_i} + \frac{\partial\left(2\upsilon\, U_j\; S_{ij}\right)}{\partial\, x_i} - \left(\frac{p}{\rho}S_{ii} + 2\upsilon\, S_{ij}S_{ij}\right)\right]$$

Mas S_{ii}=0 pela continuidade para ρ = constante

Definindo $T_i = U_i\;\, p/\rho - 2\upsilon\, U_j\, S_{ij} \quad \Rightarrow$

Então para $\dfrac{DE}{Dt} = \mathbf{U}\bullet\dfrac{D\mathbf{U}}{Dt}$

tem-se $\dfrac{DE}{Dt} + \nabla\bullet\mathbf{T} = -2\,\upsilon\, S_{ij}\;\, S_{ij}$

- A integral da equação da energia em um volume de controle é

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial E}{\partial t} d\forall + \iint_{\forall} \nabla.(\mathbf{U}\, E + \mathbf{T}) d\forall = \underbrace{- \iiint_{\forall} 2\, \upsilon\, S_{ij}\; S_{ij}\, d\forall}_{\substack{dissipa\text{ção} \\ \text{viscosa,sempre} < 0}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} E d\forall + \iint_{A} (\mathbf{U}\, E + \mathbf{T}) \bullet \mathbf{n}\, dA = -\iiint_{\forall} 2\, \upsilon\, S_{ij}\; S_{ij} d\forall$$

- Dissipação viscosa representa a conversão de energia mecânica em energia térmica

<u>Energia cinética média:</u> calculando a média da equação de energia

onde $\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \bullet (\mathbf{U}\, E)$

$$\overline{\frac{\partial E}{\partial t}} + \overline{\nabla \bullet (\mathbf{U}\, E + \mathbf{T})} = -\overline{2\, \upsilon\, S_{ij}\; S_{ij}} \Rightarrow \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{U}\, E}) + \nabla \bullet < \mathbf{T} >= -\overline{2\, \upsilon\, S_{ij}\; S_{ij}}$$

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{U}}\ \overline{E}) + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}\ E}) + \nabla \bullet < \mathbf{T} > = -2\,\upsilon\, \overline{S_{ij}}\ \overline{S_{ij}} - 2\,\upsilon\, \overline{s_{ij}\ s_{ij}}$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- Definindo:
  - dissipação devido ao escoamento médio: $\bar{\varepsilon} = 2\,\upsilon\, \overline{S_{ij}}\ \overline{S_{ij}}$

    em geral é desprezível por ser proporcional à Re^{-1}

  - **dissipação turbulenta**: $\varepsilon = 2\,\upsilon\, \overline{s_{ij}\ s_{ij}}$

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{U}}\ \overline{E}) + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}\ E}) + \nabla \bullet < \mathbf{T} > = -\,\bar{\varepsilon} - \varepsilon$$

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{U}}\ \overline{E})}_{\frac{D\overline{E}}{Dt}} + \nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}\ E}) + \nabla \bullet < \mathbf{T} > = -\ \bar{\varepsilon} - \varepsilon$$

$$\nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}\,E}) = \nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}}\ \overline{E} + \overline{\mathbf{u}\,E'}) \qquad T_i = U_i\ p/\rho - 2\upsilon\ U_j\ S_{ij}$$

$$< T_i > = < U_i\ p/\rho > -2\upsilon < U_j\ S_{ij} >$$

$$< T_i > = \overline{U_i}\ \overline{p}/\rho + \overline{u_i'\ p/\rho} - 2\upsilon\ \overline{U_j}\ \overline{S}_{ij} - 2\upsilon\,\overline{u_j\ s_{ij}}$$

➢ definindo $\overline{T}_i = \overline{U}_j\,\overline{u_i\ u_j} + \overline{U}_i\ \overline{p}/\rho - 2\upsilon\ \overline{U}_j\ \overline{S_{ij}}$

$$\overline{T_i'} = \overline{u_i\ u_j\ u_j} + \overline{u_i\ p'}/\rho - 2\upsilon\ \overline{u_j\ s_{ij}}$$

Energia Cinética do Escoamento Médio e Turbulenta

$$\frac{D\,\overline{E}}{D\,t} + \nabla \bullet \overline{\mathbf{T}} = -\wp - \overline{\varepsilon}$$

$$\overline{T_i} = \overline{U}_j\,\overline{u_i\,u_j} + \overline{U}_i\,\overline{p}/\rho - 2\upsilon\,\overline{U}_j\,\overline{S_{ij}}$$

$$\frac{D\,\kappa}{D\,t} + \nabla \bullet \overline{\mathbf{T}'} = \wp - \varepsilon$$

$$\overline{T_i'} = \overline{u_i\,u_j\,u_j} + \overline{u_i\,p'}/\rho - 2\upsilon\,\overline{u_j\,s_{ij}}$$

- onde: $\wp = -\overline{u_i\,u_j}\,\dfrac{\partial\,\overline{U}_i}{\partial\,x_j}$

  é a **produção de energia cinética turbulenta**

- A ação do gradiente de velocidade média atuando sobre as tensões de Reynolds, remove energia cinética do escoamento médio (-$\wp$ na equação para $\overline{E}$) e transfere para o campo flutuante de velocidade (+$\wp$ na equação para κ).

PRODUÇÃO

(i) Somente a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade afeta a produção

$$\wp = -\overline{u_i\ u_j}\ \overline{S_{ij}}$$

(ii)Somente a parte anisotrópica do tensor de Reynolds afeta a produção

$$\wp = -a_{ij}\ \overline{S_{ij}} \qquad a_{ij} = \overline{u_i\ u_j} - \frac{2}{3}\kappa\ \delta_{ij}$$

(iii) De acordo com a hipótese de viscosidade turbulenta a produção é

$$\wp = 2\,\upsilon_t\ \bar{S}_{ij}\ \bar{S}_{ij} \geq 0$$

Note que esta expressão é a mesma de $\bar{\varepsilon}$, com υ_t no lugar de υ

DISSIPAÇÃO

- Na equação de κ, o sorvedouro ε é a dissipação da energia cinética turbulenta ou simplesmente *dissipação.*
- O gradiente das velocidades flutuantes $\partial u_i / \partial x_j$ trabalha contra a tensor deviatórico de flutuações (2 υ s_{ij}) e transforma a energia cinética em energia interna.
- A dissipação é sempre positiva.

Espectro de Energia

- O espectro de energia E(k) define como a energia é distribuída entre as escalas

- Definindo a transformada de Fourier do vetor velocidade como

$$\hat{u}_i(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint u_i(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

Para turbulência isotrópica, pode-se definir a função espectral 3D isotrópica como

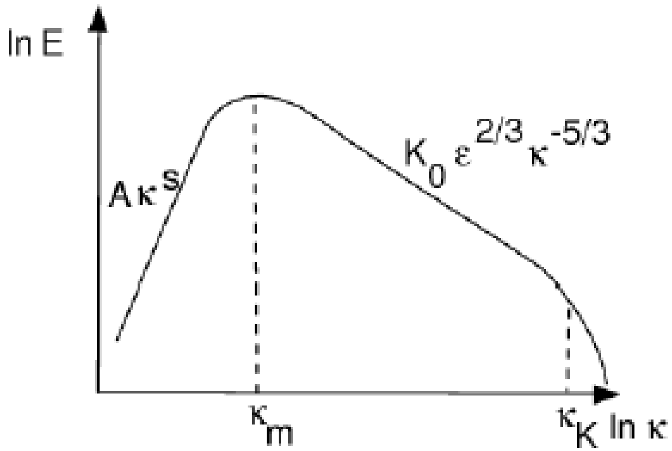
$$E(k) \equiv \iint \hat{u}_i(\mathbf{k})\, \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) dS(\mathbf{k})$$

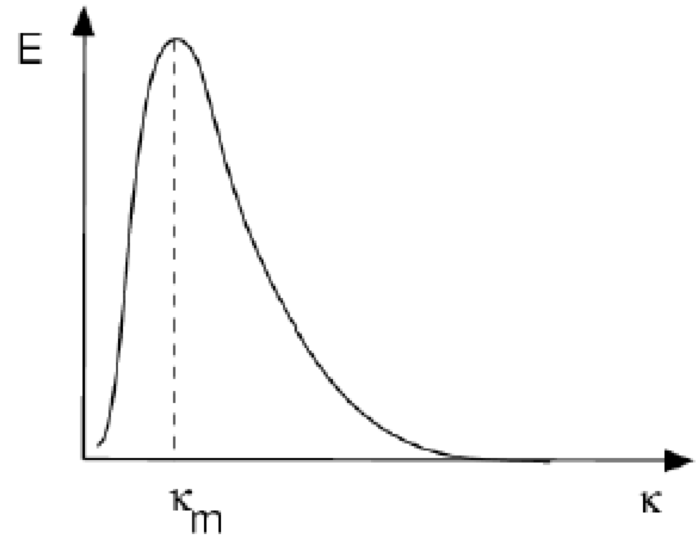
$dS(\mathbf{k})$ é o elemento de superfície sobre a espera

"*" significa número complexo conjugado

$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}^2}$ é o módulo do número de onda **k**

Espectro de Energia

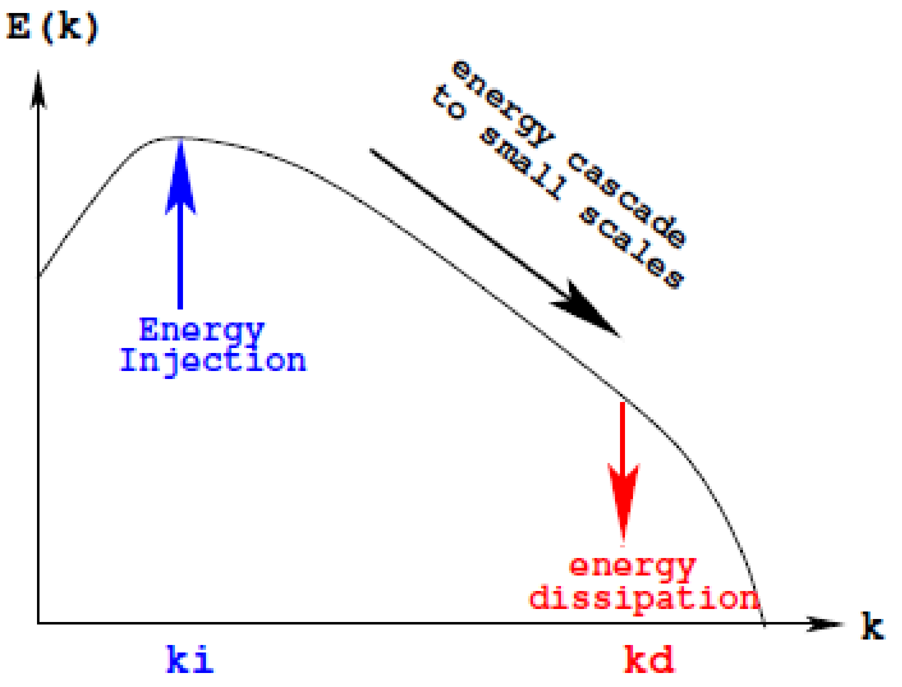




$$E(\kappa) = \begin{cases} A\kappa^s & \text{when } \kappa \leq \kappa_m \\ K_0 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} & \text{when } \kappa \geq \kappa_m \end{cases}$$

κ_m é o inverso da escala de injeção de energia

Espectro de Energia



- Escala contendo energia (escala integral)

$$L = \frac{\int E(k)/k\, dk}{\int E(k)\, dk}$$

- Escala dissipativa (escala de Kolmogorov)

$$\eta = \left(\frac{\upsilon^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

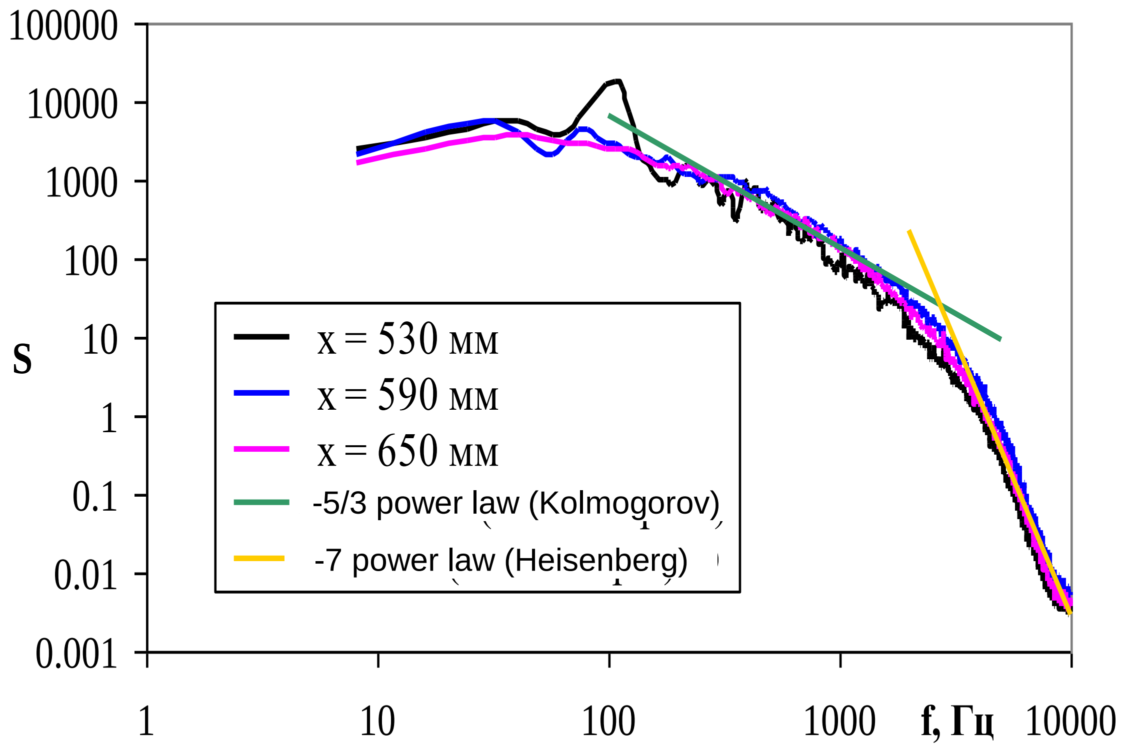
- Micro escala de Taylor

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} = 2\frac{\overline{u^2}}{\lambda}$$

- Para turbulência isotrópica, λ pode ser estimado com

$$\lambda = 5\frac{\int E(k)\, dk}{\int k^2 E(k)\, dk}$$

Espectro de frequências das flutuações de velocidade



Comparação com lei de potência de Kolmogorov (-5/3) e Heisenberg (-7)

Simulação DNS: turbulência isotrópica