Equações Médias de Reynolds

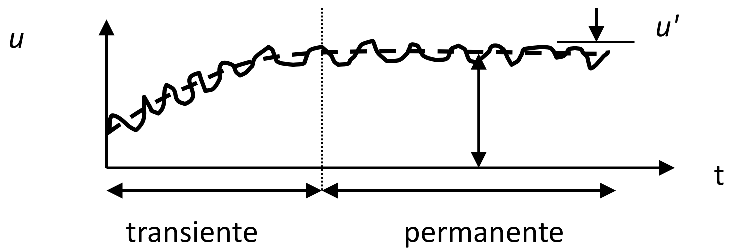
- Os modelos de turbulência baseados nas equações de Navier-Stokes médias no tempo **RANS** (**R**eynolds **A**veraged **N**avier-**S**tokes) serão descritos.

- O escoamento turbulento é governado pelas mesmas equações que o escoamento laminar, sendo que rigorosamente falando, este é sempre tridimensional e transiente.

Equações Médias de Reynolds

- No entanto, para o engenheiro, muitas vezes é suficiente conhecer o comportamento do valor médio. Pode-se descompor as variáveis dependentes em um valor médio no tempo e um componente de flutuação como é mostrado na figura 5, onde com freqüência a flutuação *u'* é da ordem de 1% de $\bar{u}$.

$$u = \bar{u} + u'$$



- No estudo de um escoamento turbulento, como as quantidades analisadas são caracterizadas por apresentar flutuações randômicas em torno de um valor médio, pode-se utilizar de métodos estatísticos. Uma simples análise estatística é suficiente.

Decomposição de Reynolds:

$$u_i = \overline{u}_i + u_i^{'} \qquad\qquad p = \overline{p} + p' \;;$$

Generalizando podemos escrever: $\phi = \overline{\phi} + \phi^{'}$

onde o valor médio é obtido por $\overline{\phi} = \dfrac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi \; dt \qquad \overline{\phi'} = 0$

Antes de derivarmos as equações médias para um escoamento turbulento, vamos sumarizar algumas regras que governam as médias temporais das flutuações das propriedades

$$\phi = \boldsymbol{\Phi} + \phi' \qquad\qquad \psi = \boldsymbol{\Psi} + \psi'$$

e suas combinações, derivadas e integrais

$$\overline{\phi'} = \overline{\psi'} = 0 \qquad \overline{\Phi} = \Phi \qquad \overline{\phi + \psi} = \Phi + \Psi$$

$$\overline{\int \phi \; ds} = \int \Phi \; ds \qquad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \qquad \overline{\phi \, \psi} = \Phi \, \Psi$$

$$\overline{\phi' \, \psi} = 0 \qquad \overline{\phi \, \psi} = \Phi \, \Psi + \overline{\phi' \, \psi'}$$

Essas equações podem ser facilmente demonstradas, ao notar que a operação de média é uma operação de integração e, portanto a ordem de diferenciação ou integração e obtenção de média temporal podem ser invertidas.

Uma vez que o divergente e o gradiente são diferenciações, as regras acima podem ser estendidas para um vetor com flutuação e sua combinação com um escalar com flutuação

$$\overline{\mathbf{div} \; \vec{a}} = \mathbf{div} \; \vec{A} \qquad \overline{\mathbf{div} \; \mathbf{grad} \; \phi} = \mathbf{div} \; \mathbf{grad} \; \Phi$$

$$\overline{\mathbf{div} \, (\phi \vec{\mathrm{a}})} = \mathbf{div} \, \overline{(\phi \vec{\mathrm{a}})} = \mathbf{div} \, (\Phi \vec{A}) + \mathbf{div} \, \overline{(\phi' \, \vec{\mathrm{a}}')}$$

As equações de Navier-Stokes médias no tempo para um fluido incompressível são apresentadas a seguir:

Equação da continuidade

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

para ρ constante $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

A equação média de conservação de massa é obtida substituindo-se na equação acima a velocidade decomposta em um valor médio mais a flutuação

$$\frac{\partial (\overline{u_j} + u'_j)}{\partial x_j} = 0$$

a seguir, avalia-se a média no tempo da equação

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\frac{\partial\,(\overline{u_j}+u_j^{'})}{\partial x_j}\,dt=0\Rightarrow\frac{\overline{\partial\,(\overline{u_j}+u_j^{'})}}{\partial x_j}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\,\overline{(\overline{u_j}+u_j^{'})}}{\partial x_j}=0\Rightarrow\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial x_j}+\frac{\partial\,\overline{u_j^{'}}}{\partial x_j}=0$$

como $\overline{u_j^{'}}=0$ então $\boxed{\dfrac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial x_j}=0}$ (A)

Note que subtraindo a equação acima da equação de conservação de massa obtemos

$$\frac{\partial\,u_j}{\partial x_j}-\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial x_j}=\frac{\partial\,u_j^{'}}{\partial x_j}=0$$

isto é, as flutuações da velocidade assim como as velocidades médias satisfazem a equação de conservação de massa incompressível.

No caso compressível, isto não seria verdade, pois surgiriam termos envolvendo $\overline{\rho' \, u'_j}$, que acoplariam as duas relações.

No caso compressível a equação de continuidade é

$$\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{\rho} \; \overline{u_j} + \overline{\rho' \; u'_j} \right)}{\partial x_j} \right) = 0$$

Esta equação não é muito conveniente, pois envolve uma média de um produto de flutuações, que será não nulo se as grandezas forem correlacionadas. Neste caso utiliza-se a média de Favre, que veremos mais tarde.

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho g_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right]$$

Para propriedades constantes, temos que o divergente da velocidade é nulo pela continuidade, logo podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=zero$$

resultando em

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\rho g_i \qquad (**)$$

Combinando a equação anterior com a equação de conservação de massa ,

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \rho g_i$$

pode-se reescrever a equação de conservação de quantidade de movimento na forma conservativa

$$\underbrace{\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{IV} + \underbrace{\rho g_i}_{V}$$

A equação média de quantidade é obtida de forma análoga a equação da continuidade, isto é, calculando-se a média temporal da equação. Os termos *I, III, IV* e *V* podem ser obtidos facilmente

$$I = \overline{\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}} = \frac{\partial \left(\overline{\rho u_i}\right)}{\partial t} = \frac{\partial \rho \overline{(\overline{u_i} + u_i^{'})}}{\partial t} = \frac{\partial \rho \overline{u_i}}{\partial t}$$

$$III = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$$

$$IV = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)$$

$$V = \overline{\rho g_i} = \rho g_i$$

O termo *II* é o termo não linear, precisando de cuidados adicionais

$$II = \frac{\overline{\partial \rho\, u_i\, u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho\, \overline{\left(\overline{u_i} + u_i^{'}\right)\left(\overline{u_j} + u_j^{'}\right)}}{\partial x_j}$$

$$II = \frac{\partial \rho \left(\overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}} + \overline{u_i^{'}\,\overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i}\, u_j^{'}} + \overline{u_i^{'}\, u_j^{'}} \right)}{\partial x_j} \qquad II = \frac{\partial \rho \left(\overline{u_i}\,\overline{u_j} + \overline{u_i^{'}}\;\overline{u_j} + \overline{u_i}\,\overline{u_j^{'}} + \overline{u_i^{'}\, u_j^{'}} \right)}{\partial x_j}$$

a média das flutuações é nula, mas a média de produto de flutuações não é nula, logo o termo II pode ser escrito como

$$II = \frac{\partial \left(\rho\ \overline{u_i}\ \overline{u_j} \right)}{\partial x_j} + \frac{\partial \left(\rho\ \overline{u_i^{'}\ u_j^{'}} \right)}{\partial x_j}$$

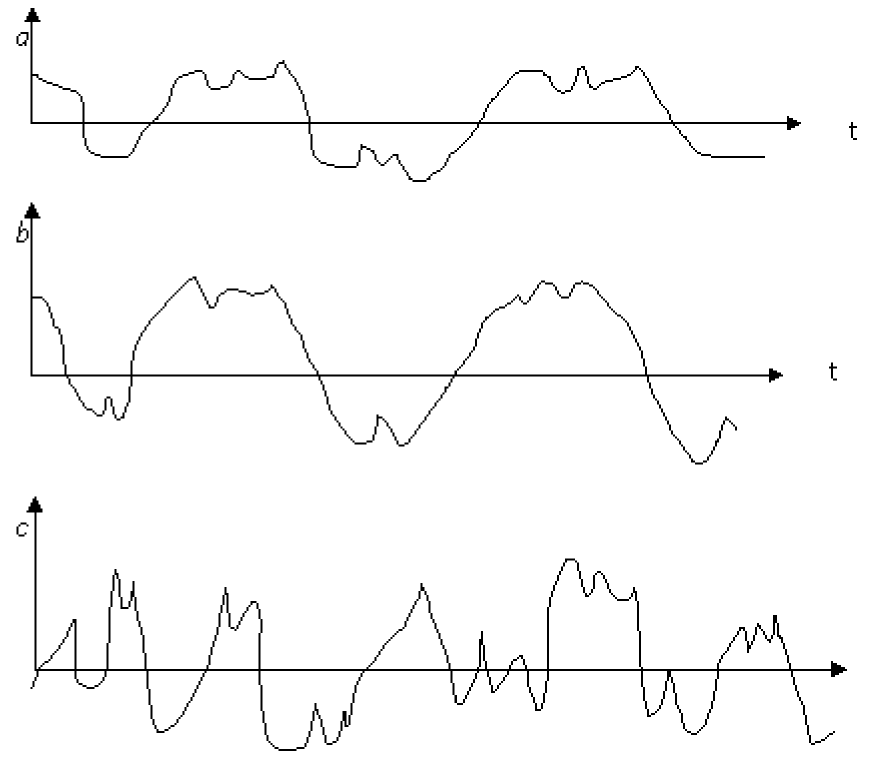
Correlação entre variáveis

- Vimos que a média de uma flutuação é nula. No entanto, a média do produto de duas flutuações só é diferente de zero, se estas forem correlacionadas, se estas não forem correlacionadas, a média é nula.

A figura a seguir ilustra o conceito de flutuações de variáveis que são correlacionadas

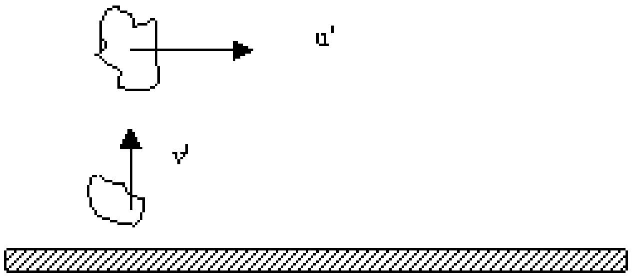
A flutuação da variável *a* tem o mesmo sinal que a variável *b*, na maior parte do tempo, resultando em $\overline{ab} > 0$. Por outro lado, a variável c não é correlacionada com *a* e *b*, então

$$\overline{ac} = 0 \qquad \overline{bc} = 0$$



As flutuações da velocidade são correlacionadas, então

$$\overline{u' \; v'} \neq 0$$



Substituindo I, II, III, IV e V na equação de conservação e rearrumando, temos

$$\boxed{\left(\frac{\partial \rho \, \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \, \bar{u}_i \, \bar{u}_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) + \rho \, g_i}$$

ou

$$\rho \underbrace{\left(\frac{\partial \, \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \, \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)}_{\frac{D\bar{u}_i}{Dt}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) + \rho \, g_i$$

Para propriedades variáveis a equação média no tempo de Navier-Stokes é

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\rho\, g_i+$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right]+\frac{\partial\,(\overline{-\rho\, u_i'\, u_j'})}{\partial x_j} \qquad \text{(B)}$$

O termo $-\rho\,\overline{u_i'\;u_j'}$ é denominado **tensão de Reynolds**, e envolve os componentes das flutuações da velocidade que não são conhecidas.

Com muita freqüência o tensor de Reynolds é definido $\overline{u_i'\,u_j'}$

Equação de Poisson para pressão média

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2\overline{P} = \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_i \partial x_j}$$

O conjunto de equações governantes é igual a 4

- 3 de quantidade de movimento
- 1 de continuidade ou Poisson de pressão

- Mais o número de incógnitas é maior: 3 componentes de velocidade, pressão e mais as tensões de Reynolds

Como o número de equações é inferior ao número de incógnitas, surge o problema de fechamento para o conjunto de equações (A) e (B). Torna-se necessário formular equações adicionais para as novas incógnitas, isto é, para o tensor de Reynolds.

Propriedades de tensores

- Um tensor de 2a ordem pode ser decomposto em uma parte isotrópica e uma parte deviatórica
- O traço de um tensor é a soma da diagonal principal

$$B_{ii} = \text{traço}\ (B_{ij})$$

- O traço pode ser utilizado para decompor um tensor em uma parte isotrópica e uma parte deviatórica

$$B_{ij} = B_{ij}^{I} + B_{ij}^{'} \quad ; \quad B_{ij}^{I} = \frac{1}{3} B_{\ell\ell}\ \delta_{ij}$$

$$B_{ij}^{'} = B_{ij} - \frac{1}{3} B_{\ell\ell}\ \delta_{ij}$$

- A parte deviatórica pode ser decomposta em uma parte simétrica s_{ij} e uma anti-simétrica r_{ij}

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(B'_{ij} + B'_{ji}\right) = s_{ji} \quad ; \quad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(B_{ij} + B_{ij}\right) - \frac{1}{3} B_{\ell\ell}\, \delta_{ij} = s_{ji}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(B'_{ij} - B'_{ji}\right) = -r_{ji} \quad ; \quad r_{ij} = \frac{1}{2}\left(B_{ij} - B_{ji}\right)$$

- O tensor de 2a. Ordem pode ser decomposto em uma parcela isotrópica, uma parcela simétrica e uma parcela anti-simétrica

$$B_{ij} = \frac{1}{3} B_{\ell\ell}\, \delta_{ij} + s_{ij} + r_{ij}$$

- Gradiente de velocidade

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \Delta\, \delta_{ij} + s_{ij} + \Omega_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij} \qquad \Delta = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Tensão de Reynolds

- A tensão viscosa corresponde a uma transferência de quantidade de movimento a nível molecular.
- A tensão de Reynolds corresponde a uma transferência de quantidade de movimento devido ao campo de velocidades flutuantes
- O tensor de Reynolds $-\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = -\rho\overline{u_j^{'}u_i^{'}}$ é de 2a. ordem e é simétrico
- Os componentes da diagonal são as tensões normais, enquanto as tensões fora da diagonal são as tensões cisalhantes
- A energia cinética turbulenta é definida como a metade do traço do tensor de Reynolds

$$\kappa = \frac{1}{2}\overline{u_i^{'}u_i^{'}}$$

é a energia cinética por unidade de massa do campo de velocidade flutuante

Anisotropia

- Nos eixos principais, o tensor de Reynolds não possui tensões cisalhantes, e as tensões normais são os autovalores, os quais são não negativos.
- O tensor de Reynolds é simétrico, positivo
- A distinção entre as tensões normais e cisalhantes dependem do sistema de coordenadas
- Pode-se realizar uma distinção entre as tensões isotrópicas e anisotrópicas.
- As tensões isotrópicas são $\frac{2}{3}\kappa\,\delta_{ij}$
- e a parte anisotrópica deviatórica $a_{ij} = \overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}\kappa\,\delta_{ij}$
- O tensor anisotrópico normalizado é $\frac{a_{ij}}{2\,\kappa} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\overline{u_\ell' u_\ell'}} - \frac{1}{3}\delta_{ij} = b_{ij}$

- O tensor de Reynolds pode ser escrito como

$$\overline{u'_i\, u'_j} = 2\,\kappa\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} = 2\,\kappa\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} + b_{ij}\right)$$

- E a equação de Navier Stokes pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial\rho\,\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho\,\overline{u}_i\,\overline{u}_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\,\overline{u}_i}{\partial x_j}\right) - \rho\frac{\partial\,a_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{P} + \frac{2}{3}\rho\,\kappa\right)$$

- Somente o componente anisotrópico é efetivo no transporte de quantidade de movimento. O componente isotrópico pode ser incorporado na pressão média modificada.

Escoamento Rotacional

- Uma característica essencial de um escoamento turbulento é que o mesmo é rotacional
- Considere um escoamento irrotacional (escoamento de ondas de água)
  - A vorticidade é zero, logo a vorticidade média também, assim como a vorticidade flutuante, e $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$
  - Logo

$$\overline{u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_i\, u_i}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} - u_j \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{zero}\right]\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i u_j} = 0$$

  - O que dá origem a equação de *Corrsin-Kistler* para escoamento irrotacional

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i u_j} = \frac{\partial\, \kappa}{\partial x_j}$$

Escoamento Irrotacional

- Neste caso a tensão de Reynolds tem o mesmo efeito que a tensão isotrópica, podendo ser absorvida pela pressão modificada. Logo, em um escoamento irrotacional, o campo de velocidade flutuante) não possui nenhum efeito no campo média de velocidades

Equação de Conservação de um Escalar

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi$$

Considerando $\phi = \bar{\phi} + \phi'$

A equação média da quantidade é obtida de forma análoga ao feito anteriormente, isto é, calculando-se a média temporal da equação

$$\overline{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}} == \frac{\partial \rho \bar{\phi}}{\partial t} \qquad \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} \right)$$

$$\overline{\frac{\partial \rho \; u_j \; \phi}{\partial x_j}} = \frac{\partial \rho \; \overline{u_j} \; \overline{\phi}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho \; u'_j \; \phi'}}{\partial x_j}$$

Substituindo as expressões anteriores, temos

$$\left(\frac{\partial \rho \, \overline{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \, \overline{u}_j \; \overline{\phi}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j} - \rho \, \overline{u'_j \; \phi'} \right) + \overline{S_\phi}$$

$$- \overline{\rho \; u'_j \; \phi'}$$

$\Rightarrow$ fluxo difusivo turbulento também precisa ser determinado

Viscosidade e Difusividade Turbulenta

- Como vimos, o efeito da turbulência implica em uma aumento de difusão. Baseados neste fato, pode-se modelar o fluxo turbulento de um escalar utilizando uma difusividade turbulenta Γ_t

$$-\overline{\rho\, u_j^{'}\, \phi^{'}} = -\Gamma_t\, \nabla\, \overline{\phi}$$

- Definindo a difusividade efetiva como $\Gamma_{ef} = \Gamma_t\, (\boldsymbol{x},\, t) + \Gamma$
- A equação de conservação do escalar médio é

$$\rho\, \frac{D\,\overline{\phi}}{D\,t} = \nabla \bullet \left(\Gamma_{ef}\, \nabla \overline{\phi}\right) + \overline{S_{\phi}}$$

- Os modelos de viscosidade turbulenta são baseados no conceito da viscosidade turbulenta introduzido por Boussinesq em 1877. Boussinesq propõe para o núcleo turbulento uma analogia entre as tensões turbulentas e as tensões existentes no regime laminar.

- Vimos que a tensão viscosa para um fluido Newtoniano é

$$\underline{\underline{\tau}} = \left\{ \mu \;\mathbf{[grad}\;\vec{V} + \mathbf{(grad}\;\vec{V}\mathbf{)}^{T}\,\mathbf{]} - \frac{2}{3}\mu \;\mathbf{div}\;\vec{V}\;\underline{\underline{I}} \right\}$$

- Em notação indicial a equação acima pode se escrita com

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\,\mu\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\,\delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

- Fazendo uma analogia entre a tensão laminar e turbulento, a tensão turbulenta é definida como:

$$-\rho\,\overline{u_i'\,u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu_t\left(\frac{\partial\overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}-\frac{2}{3}\rho\,\kappa\,\delta_{ij}$$

- onde μ_t é a viscosidade turbulenta. O termo $\rho\,\kappa$ é a parte isotrópica do tensor e pode ser interpretado como a pressão dinâmica associada aos turbilhões, em analogia à pressão estática, termodinâmica. κ é a energia cinética turbulenta, definida como

$$\kappa = \frac{1}{2}\left(\overline{u_i'^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}\right)$$

- Com a substituição da expressão para a tensão de Reynolds na equação (B), obtêm-se a seguinte expressão para a equação de conservação de quantidade de movimento linear para regime turbulento baseada no conceito da viscosidade turbulenta

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\rho\, g_i +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)+\mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}-\frac{2}{3}\rho\kappa\delta_{ij}\right]$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_{ef}\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right]\right)+\rho\, g_i} \qquad \text{(C)}$$

- onde *P* é a pressão modificada, definida como

$$P = p + \frac{2}{3}\mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)+\frac{2}{3}\rho\ \kappa$$

- e a viscosidade efetiva μ_{ef}: $\mu_{ef} = \mu + \mu_t(\mathbf{x}, t)$

- onde μ é a viscosidade molecular e μ_t é a viscosidade turbulenta.

Escoamento Compressível

- Ocasionalmente podemos considerar para um escoamento compressível que a flutuação da massa específica não é correlacionada com as flutuações da velocidade, simplificando sensivelmente as equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear

$$\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\;\overline{u_j}}{\partial x_j}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\overline{u_i}}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right] - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} - \overline{\rho}\,\overline{u_i' u_j'}\right) + \rho\, g_i$$

- Quando a massa específica é correlacionada com a velocidade, podemos utilizar a **decomposição de Favre**

Decomposição de Favre

- Em 1965, Favre sugeriu um procedimento de média no tempo que simplifica bastante a forma das equações de conservação assim geradas. Ele introduziu o conceito de média no tempo ponderada pela densidade, definida por:

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{\Delta t} \lim_{t \to \infty} \int_0^t \rho(x,t) \ \phi(x,t) \, dt$$

- onde $\bar{\rho}$ é a média de Reynolds da densidade $\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \rho \ dt$

- A decomposição de Favre é dada

$$\phi_i = \tilde{\phi}_i + \phi_i''$$

- Comparando-se as definições da médias de Reynolds e de Favre, observa-se que:

$$\bar{\rho}\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}$$

- então

$$\bar{\rho}\tilde{\phi} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{\phi} + \phi')} = \bar{\rho}\,\bar{\phi} + \overline{\rho'\phi'}$$

- Portando a equação da continuidade pode ser escrita de modo análogo àquela apresentada anteriormente como:

$$\frac{\partial\,\bar{\rho}}{\partial\,t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\,\tilde{u}_{\mathrm{i}}) = 0$$

- Ao usarmos a média de Favre é comum decompormos a velocidade instantânea em uma média mássica $\tilde{u}_i$ e uma flutuação u_i'', como mostrado abaixo.

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i''$$

- Multiplicando a equação acima por ρ e operando a média de Reynolds no tempo temos:

$$\overline{\rho\, u_i} = \overline{\rho\, \tilde{u}_i + \rho\, u_i''} = \overline{\bar{\rho}\, \tilde{u}_i} + \overline{\rho'\, \tilde{u}_i} + \overline{\rho\, u_i''} = \bar{\rho}\, \tilde{u}_i + \overline{\rho\, u_i''}$$

- Utilizando a identidade dada $\bar{\rho}\tilde{\phi} = \overline{\rho\phi}$ na equação anterior, obtém-se

$$\overline{\rho u_i''} = 0$$

- Vimos que uma das propriedades da decomposição de Reynolds é que $\overline{u_i'} = 0$

- Na decomposição de Favre, a média da flutuação da velocidade não é nula $\Rightarrow \overline{u_i''} \neq 0$

Equações de Conservação de Quantidade de Movimento na Média de Favre

- A fim de obtermos as equações de conservação na média de Favre, as propriedades do escoamento foram decompostas como segue:

$$u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \qquad p = \bar{p} + p' \qquad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

- vimos que $\overline{\rho\, u_i} = \bar{\rho}\, \tilde{u}_i$

- trabalhando o segundo termo

$$\overline{\rho\, u_i\, u_j} = \overline{\rho\ (\tilde{u}_i + u_i'')\ (\tilde{u}_j + u_j'')} = \overline{\rho\, \tilde{u}_i\, \tilde{u}_j + \rho\, u_i'' \tilde{u}_j + \rho \tilde{u}_i\, u_j'' + \rho u_j'' u_j''} \Rightarrow$$

$$\overline{\bar{\rho}\, \tilde{u}_i\, \tilde{u}_j + \rho' \tilde{u}_i\, \tilde{u}_j + \rho\, u_i'' \tilde{u}_j + \rho \tilde{u}_i\, u_j'' + \rho u_j'' u_j''}$$

$$\overline{\rho\, u_i\, u_j} = \bar{\rho}\, \tilde{u}_i\, \tilde{u}_j + \overline{\rho\, u_i'' u_j''}$$

- A equação de conservação de quantidade de movimento linear com a média de Favre é

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\;\tilde{u}_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\;\tilde{u}_i\;\tilde{u}_j)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\,\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\,\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial\,\tilde{u}_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\underbrace{\overline{\mu\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_k''}{\partial x_k}\right)}\delta_{ij}-\overline{\rho\,u_i''u_j''}}_{\tau_{t_{ij}}}\right]$$

- A equação de conservação de quantidade de movimento linear com a média de Favre é

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\,\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\tilde{u}_j\,\tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + $$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \tau_{t,ij}\right]$$

- Um aspecto físico a ser destacado é que embora a média de Favre elimine as flutuações da densidade dentro das equações de conservação, a mesma não remove o efeito dessas flutuações sobre a turbulência. Conseqüentemente, a média de Favre é apenas uma simplificação do ponto de vista matemático e não físico.