

Vortex Stretching (Esticamento de vórtices)

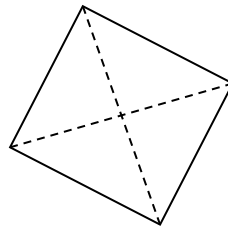
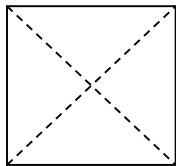
- Turbilhões turbulentos (e alguns escoamentos laminares ou não viscosos) possuem tanto movimento de translação com de rotação.
- A vorticidade é igual a duas vezes a velocidade angular. Na direção z é

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

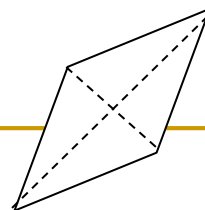
- Enquanto a vorticidade é uma medida da rotação, o tensor taxa de deformação

$$e = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

é uma medida da deformação.

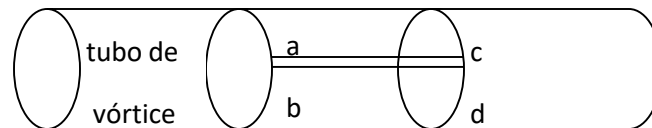


rotação sem deformação

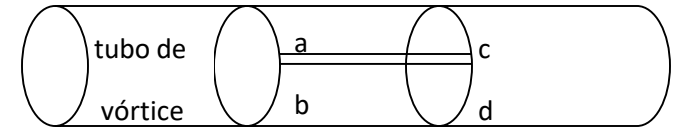


distorção sem rotação

- Se além da rotação, o elemento de fluido estiver sob a ação da taxa de deformação linear na direção z, o elemento será esticado na direção z e sua seção transversal no plano x-y ficará menor.
- A integral do componente tangencial da velocidade ao redor do perímetro, chamado de circulação, deve permanecer constante, na ausência de viscosidade.
- Teorema de Stokes:
$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{t} \, dl = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} \, dS$$
- Circulação:
$$\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot \vec{t} \, dl \qquad \Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS$$
- Para facilitar, vamos considerar o caso de um elemento de seção transversal circular e sem viscosidade.



➤ Um tubo de vórtice é formado de filamentos de vórtices (alinhados com a Vorticidade) logo não pode haver fluxo de vorticidade através do mesmo.



logo

$$\Gamma_{abcd} = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bd} + \underbrace{\Gamma_{dc}}_{-\Gamma_{cd}} + \underbrace{\Gamma_{ca}}_{-\Gamma_{bd}} = \int_C \vec{V} \cdot \vec{t} \, dl = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

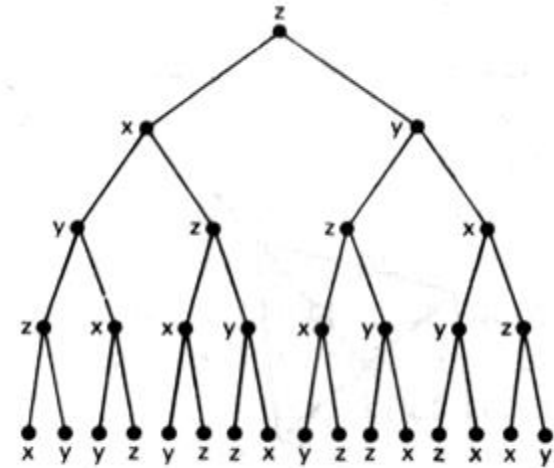
então

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{cd} = \text{constante} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = \omega_z \int_S dS = \omega_z \pi r^2$$

➤ Para que haja conservação de quantidade de movimento angular, o produto da vorticidade pelo quadrado do raio deve permanecer constante.

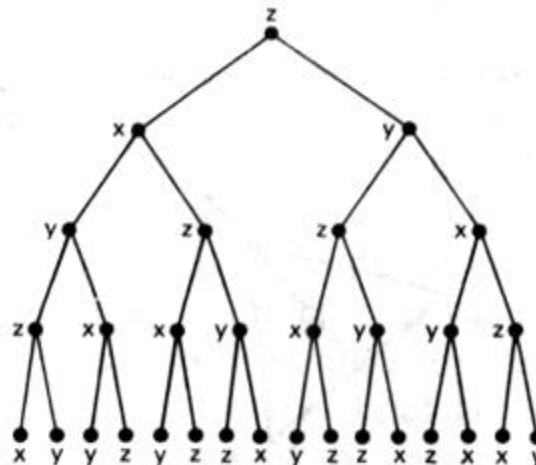
➤ Durante o processo de esticamento, a energia cinética da rotação cresce (as custas da energia cinética do componente w do movimento que está causando o esticamento) e a escala do movimento no plano x - y diminui. Portanto, a extensão em uma direção (neste caso, a direção z) pode diminuir o comprimento de escala e crescer os componentes de velocidade nas outras duas direções (x e y) que por sua vez estica outros elementos de fluidos com componentes de vorticidade nestas direções e continua daí por diante. O comprimento de escala do movimento que está sendo aumentado torna-se menor a cada estágio.

- A figura ilustra que o esticamento na direção z intensifica o movimento nas direções x e y , produzindo menores escalas de esticamento em x e y , que intensificam o movimento em $y-z$ e $z-x$, respectivamente, e daí em diante.

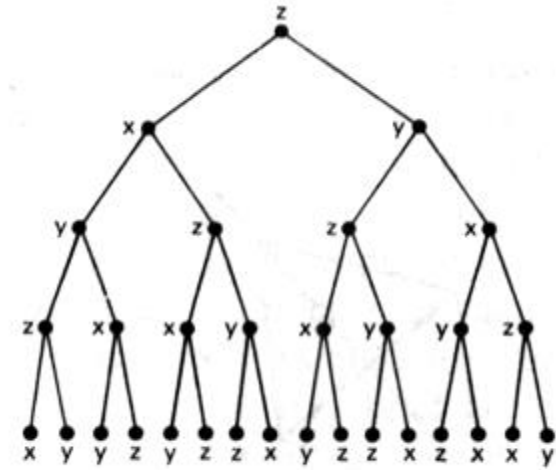


- Podemos observar, que qualitativamente, o esticamento inicial em uma direção produz quantidades aproximadamente iguais (em escalas menores) de esticamentos nas direções x , y e z , depois de alguns poucos estágios do processo. Logo, os pequenos vórtices na turbulência não dependem da orientação preferencial da taxa média de deformação: eles possuem uma estrutura aproximadamente universal, o que torna o seu estudo mais simples.

- A “cascata” de energia do movimento turbulento continua para as escalas menores e menores (com gradientes de velocidade maiores e maiores). De fato, na ausência da viscosidade, descontinuidades da velocidade surgiriam. Na realidade, a viscosidade finalmente dissipa a energia transferida que é para os pequenos vórtices (na forma de energia térmica), mas não possui um papel essencial no processo de esticamento.



➤ Turbulência pode ser considerada como um conjunto de linhas ou superfícies de vórtices, esticados em uma direção preferencial pelo escoamento médio e em direções randômicas uns pelos outros.



➤ Turbulência é um movimento transiente tridimensional, no qual o esticamento dos vórtices causa flutuações da velocidade que se espalham por todos os comprimentos de onda, entre um mínimo determinado pelas forças viscosas e um máximo determinado pelas condições de contorno do escoamento.

Escalas do Movimento Turbulento

- O escoamento turbulento apresenta uma variedade de escalas (e.g. largura dos jatos livres até escalas bem inferiores)
- A medida que o Reynolds cresce, as escalas são cada vez menores
- A energia cinética turbulenta e a anisotropia das tensões de Reynolds são muito importantes para a caracterização do escoamento
- Vamos analisar como a energia e anisotropia são distribuídas entre as diversas escalas

Cascata de energia e Hipótese de Kolmogorov

- O conceito da cascata de energia foi introduzido por Richardson (1922)
 - A energia cinética turbulenta é produzida pelas grandes escalas do movimento
 - A energia é transferida por um processo não viscoso para escalas menores, até atingir a menor escala, na qual a energia é dissipada pela ação da viscosidade
- Kolmogorov (1941) quantificou este conceito e identificou as pequenas escalas.

Cascata de energia e Hipótese de Kolmogorov

- Considere alto número de Reynolds: $Re=U L/\nu$
- A turbulência é formada de vórtices de diferentes tamanhos
 - O vórtice de tamanho ℓ , possui velocidade característica $u(\ell)$, com escala de tempo $\tau(\ell) = \ell / u(\ell)$
 - Os vórtices da faixa de tamanho grande possuem comprimento de escala ℓ_o , a qual é comparável com a escala do escoamento L , e sua velocidade característica $u_o = u(\ell_o)$ é da ordem da rms da intensidade de turbulência $u' = (2/3) (\rho \kappa)^{1/2}$, a qual é comparável a U . O número de Reynolds destes vórtice $Re_o = u_o \ell_o / \nu$ é grande, portando os efeitos diretos da viscosidade são desprezíveis.

■ Cascata de energia:

- De acordo com Richardson, os grandes vórtices são instáveis e quebram, transferindo sua energia para vórtices menores. Estes vórtices menores seguem um processo de quebra semelhante e transferem sua energia para vórtices ainda menores, e assim sucessivamente, até que o número de Reynolds $Re(\ell) = u(\ell) \ell / \nu$ é pequeno o suficiente tal que o movimento do vórtice é estável, e a viscosidade molecular se torna efetiva e dissipa energia cinética.
- A dissipação ocorre no final do processo, porém ε é determinada pelo início do processo, pela energia transferida dos grandes vórtices, a escala de ε é u_0^3 / ℓ_0 , independente de ν , concordando com evidências experimentais.

■ Hipótese de Kolmogorov (1941)

- **Isotropia local:** Para altos números de Reynolds, as pequenas escalas ($l \ll l_o$) do escoamento turbulento são estatisticamente isotrópicas.
 - O comprimento de escala $l_{E1} \approx (1/6) l_o$ delimita a região em que os grandes vórtices são anisotrópicos ($l > l_{E1}$) e isotrópicos ($l < l_{E1}$)
- **Primeira hipótese de similaridade:** Em todo escoamento turbulento a altos números de Reynolds, as estatísticas da pequenas escalas ($l < l_{E1}$) possuem uma forma universal, determinada de forma única em função de ν e ε .
 - A faixa $l < l_{E1}$ é referenciada como a faixa de equilíbrio universal. Nesta faixa, a escala de tempo $l/u(l)$ é pequena em comparação com l_o/u_o , tal que o pequeno vórtice pode se adaptar rapidamente para manter o equilíbrio dinâmico com a taxa de transferência de energia T_{E1} imposta pelos grandes vórtices.

■ Escalas de Kolmogorov

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad ; \quad \tau \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad ; \quad \nu \equiv (\nu \varepsilon)^{1/4}$$

■ Razão entre as pequenas e grandes escalas

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\tau}{L/u} = \left(\frac{u L}{\nu} \right)^{-1/2} = \mathbf{Re}^{-1/2} \quad \frac{\eta}{L} = \left(\frac{u L}{\nu} \right)^{-3/4} = \mathbf{Re}^{-3/4} \quad \frac{\nu}{u} = \left(\frac{u L}{\nu} \right)^{-1/4} = \mathbf{Re}^{-1/4}$$

- **Segunda hipótese de similaridade:** Em todo escoamento turbulento a altos números de Reynolds, as estatísticas da escala l na faixa ($l_0 \gg l \gg \eta$) possuem uma forma universal, determinada de forma única em função ε , independente de ν .
- A hipótese é válida na faixa $l_{E1} > l > l_{D1}$, sendo $l_{D1} = 60\eta$. A escala l_{D1} divide a faixa de equilíbrio universal ($l < l_{E1}$) em duas sub-faixas: a sub-faixa inercial $l_{E1} > l > l_{D1}$ (efeitos viscosos desprezíveis) e a faixa dissipativa $l < l_{D1}$

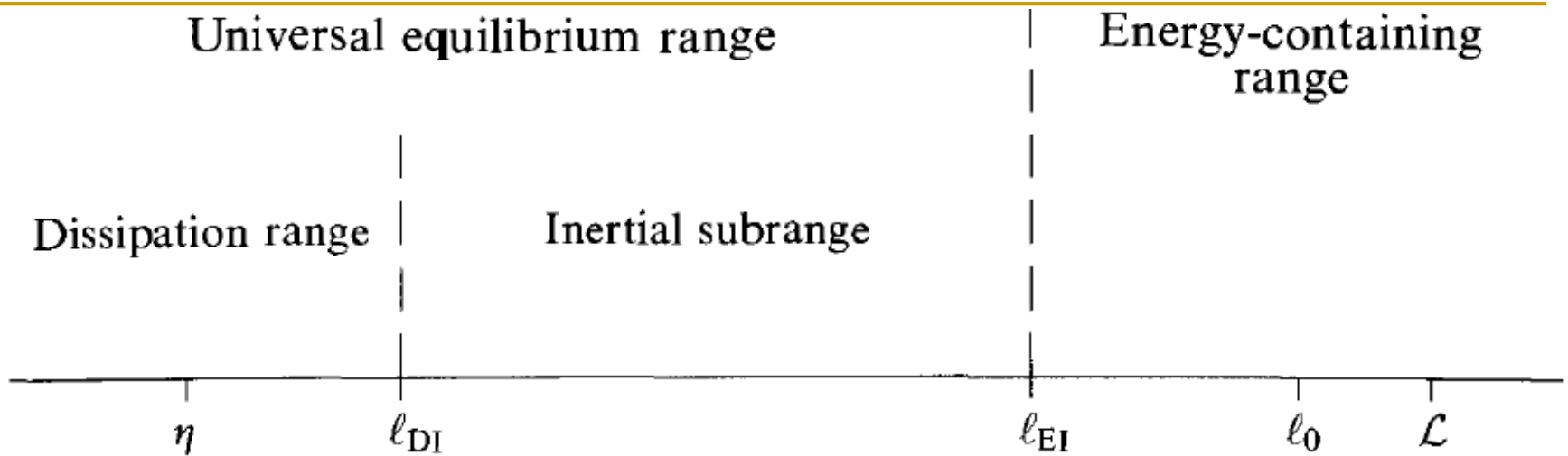


Fig. 6.1. Eddy sizes ℓ (on a logarithmic scale) at very high Reynolds number, showing the various lengthscales and ranges.

- As escalas de comprimento, de velocidade e tempo característicos podem ser estimados com

$$u(\ell) = (\varepsilon \ell)^{1/3} = u_\eta (\ell/\eta)^{1/3} \approx u_o (\ell/\ell_o)^{1/3} \quad \tau(\ell) = (\ell^2 / \varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (\ell/\eta)^{2/3} \approx \tau_o (\ell/\ell_o)^{2/3}$$

- As escalas caem com a diminuição do comprimento
- A taxa de energia transferida das grandes para as pequenas escalas é igual a energia dissipada

$$T_{E1} = T(\ell_{E1}) = T(\ell) = T_{D1} = T(\ell_{D1}) = \varepsilon = u(\ell) / \tau(\ell)$$

Série de Fourier

- Uma função arbitrária $g(t)$ pode ser expandida e representada por séries de funções ortogonais num intervalo (a, b) .

$$g(t) = \alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots$$

- Considere o conjunto de auto-funções $\varphi(t)$, ortogonais em (a, b) com respeito a função peso $w(t)$
- Uma função genérica $g(t)$ pode ser representada no intervalo (a, b) pela expansão

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t)$$

- Os coeficientes α_k podem ser obtidos multiplicando-se ambos os lados por $w(t) \varphi(t)$ e integrando em (a, b) , isto é:

$$\int_a^b \omega(t) \varphi_m(t) g(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_a^b \varphi_k(t) \omega(t) \varphi_m(t) dt$$

todos os termos são nulos, exceto quando $k=m$

- Segue

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b \omega(t) \varphi_k(t) g(t) dt}{\int_a^b \omega(t) \varphi_k^2(t) dt}$$

- Senos e cosenos são funções ortogonais, logo uma **Série de Fourier** é

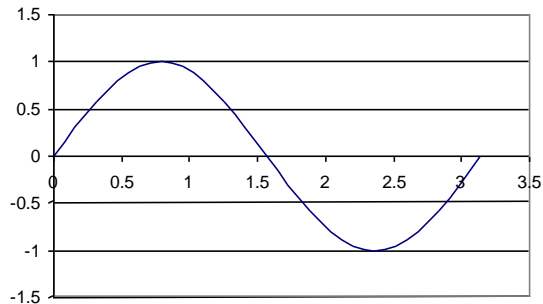
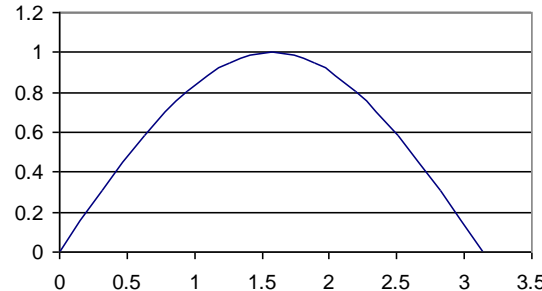
$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k \mathbf{cos}(k \omega_o t) + \beta_k \mathbf{sin}(k \omega_o t)]$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \mathbf{cos}(k \omega_o t) dt \quad \beta_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \mathbf{sin}(k \omega_o t) dt$$

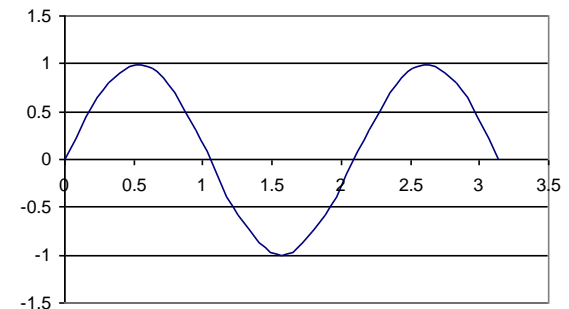
- T é o período (em segundos), $\omega = k\omega_o$ é a freqüência em radianos/segundo, $T = 2\pi/\omega = 1/f$, sendo f a freqüência em hertz (1/s). k é o número da onda

- Uma onda senoidal de comprimento de onda λ possui a mesma relação com número de onda k , $\lambda = 2\pi/k$, que a frequência em radianos ω tem com o período T
- Os maiores números de onda estão associados aos menores comprimentos de onda.

1o harmônico com número de onda $k=1$



2º harmônico com número de onda $k=2$



3º harmônico com número de onda $k=3$

- A **Integral de Fourier** da transformada de Fourier pode ser definida de forma análoga

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\omega) \cos(\omega t) + S(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \qquad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\omega t) dt$$

- A **Série de Fourier** assim como a **Integral de Fourier** podem envolver só senos ou só cosenos.

Potência de um Espectro

- Como a potência dissipada por um resistor é v^2/R , o quadrado de qualquer sinal é freqüentemente chamado de potência.

- A potência média é
$$\langle g^2(t) \rangle = \alpha_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

- A cada número de onda, tem-se uma potência média associada.

- Para uma função periódica, a potência média é

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g^2(t) dt = \alpha_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

- Para um pulso a integral é finita e a potência média é nula. Então é necessário usar a integral sem dividir por T , o que é chamado de energia no pulso.
- A energia em um pulso pode ser obtida de

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (C(\omega)^2 + S(\omega)^2)$$

- O lado esquerdo é a energia total do sinal $g^2(t)$ é a quantidade de energia de um sinal entre t e $t+dt$. Então $\Phi(\omega) d\omega$ é a quantidade de energia no intervalo de frequência ω e $\omega+d\omega$.

$$\Phi(\omega) d\omega = \frac{d\omega}{2\pi} (C(\omega)^2 + S(\omega)^2)$$

- **Exemplo:** Considere a função $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ A e^{-at} & ; t > 0 \end{cases}$$

- Os coeficientes da Transformada de Fourier $C(\omega)$ e $S(\omega)$ podem ser avaliadas a partir das equações dados, resultando em

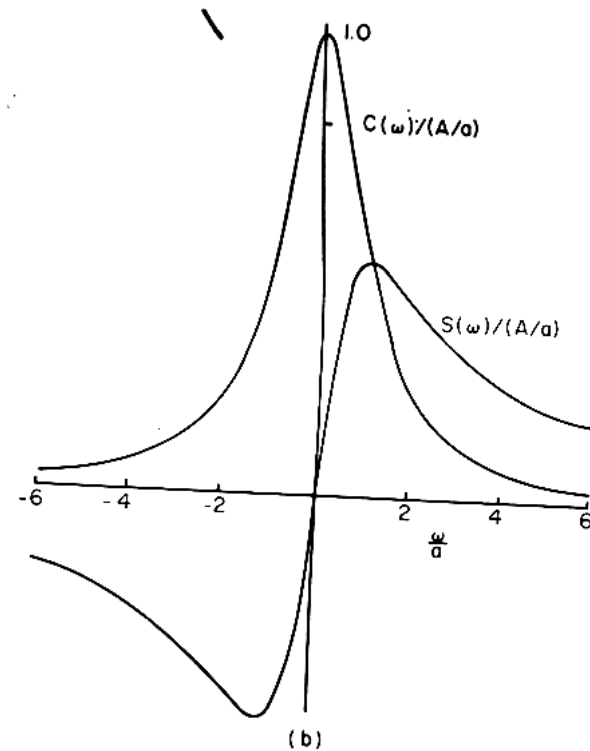
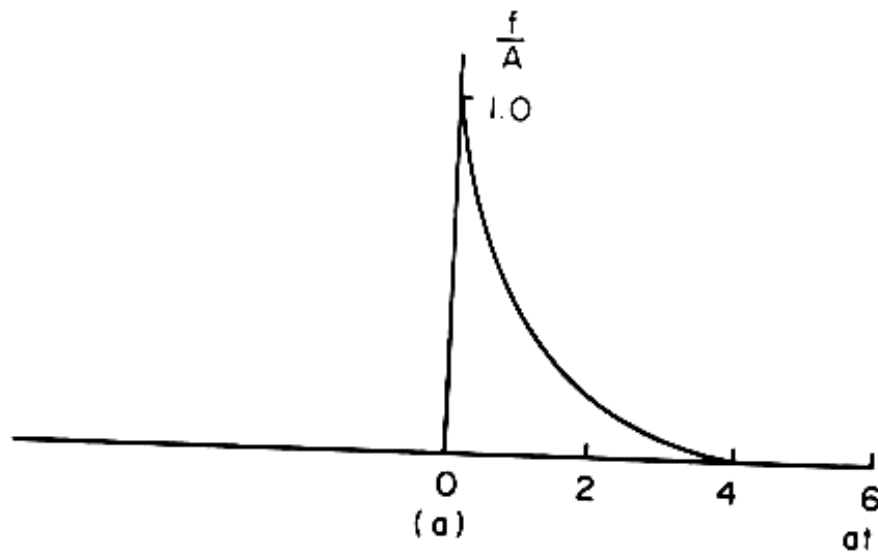
$$C(\omega) = \int_0^{\infty} A e^{-at} \cos(\omega t) dt = \frac{A a}{a^2 + \omega^2} = \frac{A/a}{1 + (\omega/a)^2}$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} a e^{-at} \sin(\omega t) dt = \frac{(A/a)(\omega/a)}{1 + (\omega/a)^2}$$

- O espectro de energia do pulso é

$$\Phi(\omega) d\omega = \frac{d\omega}{2\pi} (C^2 + S^2) = \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{A}{a}\right)^2 \left[\frac{1}{1 + (\omega/a)^2} \right]$$

- As figuras ilustram estes resultados



Física

- Grande parte do trabalho básico em turbulência é relacionado com o comportamento do espectro da transferência de energia turbulenta dos baixos números de onda (grandes comprimentos de onda) para os altos números de onda (baixos comprimentos de onda).
- Se a razão entre os números de onda da faixa dissipativa e os números da faixa contendo energia for grande (pelo menos maior que 10), os vórtices na faixa dissipativa são isotrópicos ($\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$) e independentes dos detalhes da faixa contendo energia, a qual pode ser significativamente anisotrópica.

- A estrutura na faixa dissipativa dependerá somente da transferência de energia da faixa contendo energia (igual a taxa de energia dissipada, ε), e do número de onda, viscosidade e densidade.
- Os comprimentos de escala típicos dos vórtices dissipativos são as escalas de Kolmogorov, as quais (como vimos) são obtidas através da análise dimensional como

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad ; \quad \tau \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad ; \quad \nu \equiv (\nu \varepsilon)^{1/4}$$

- Análise dimensional também nos mostra que a magnitude da densidade do espectro de energia na faixa isotrópica tem a forma

$$\nu^2 \eta f(k \eta) = \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4} f \left(k \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right)$$

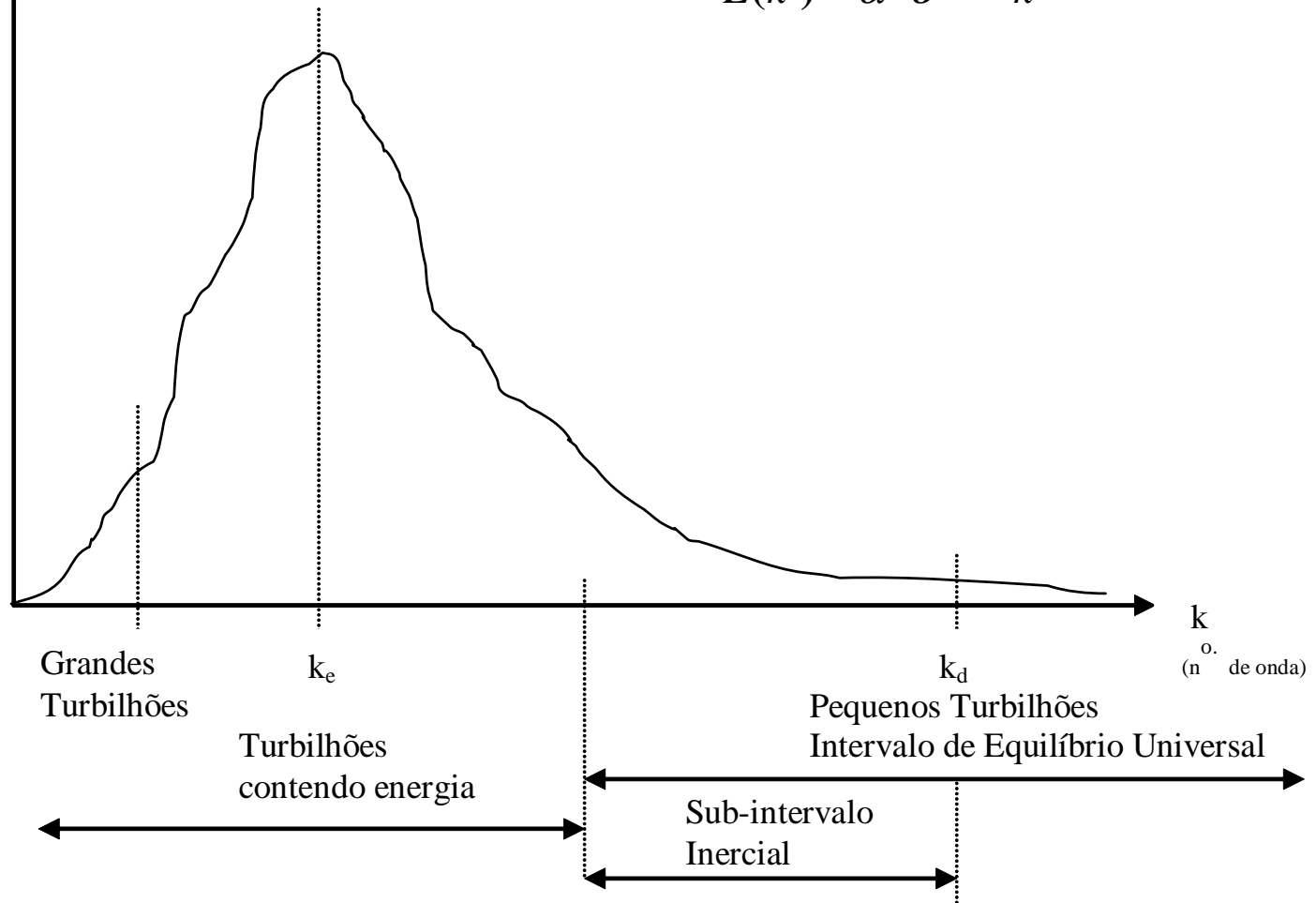
- Se os números de onda dissipativos forem muito maiores que os números de onda contendo energia (pelo menos maior que 100), então a condição de isotropia e independência dos detalhes dos vórtices contendo energia, também pode ser satisfeita na faixa de número de onda abaixo da faixa dissipativa, onde a estrutura do vórtice será independente da viscosidade: essa faixa é chamada de sub-faixa inercial, e o espectro de densidade de energia depende somente de k e da energia transferida através do comprimento de onda k (igual a ε). Através de análise dimensional, o espectro nesta sub-faixa é

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

a constante α deve ser determinada experimentalmente, ou teoricamente (quando possível).

$E(k)$

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$



Vórtices Coerentes

- Vamos considerar escoamentos sem rotação e com densidade uniforme.
- **Definição:** Vórtices coerentes, de acordo com Lesier, 1997, são regiões de escoamento que satisfazem as seguintes condições:
 - (i) A concentração de ω (módulo do vetor vorticidade) deve ser alta o suficiente para que um enrolamento do fluido circundante seja possível
 - (ii) Eles devem manter seus formatos durante aproximadamente um período de tempo T_c , longo o suficiente em relação ao tempo de retorno local ω^{-1} .
 - (iii) Devem ser imprevisíveis.
- Neste contexto, alto ω é um possível candidato para identificação de vórtices coerente.

Pressão:

- A partir da definição de vórtice coerentes, conclui-se que estes são núcleos de baixa pressão. De fato, um pacote de fluido flutuando ao redor de um vórtice estará em equilíbrio aproximado entre efeitos centrífugos de gradiente de pressão.

- Considere a Equação de Euler
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

onde $P = p + \rho \left[\Phi + \vec{u}^2 / 2 \right]$ é a pressão dinâmica.

- Em um referencial localmente Galileano, que se move junto com o vórtice coerente, a razão (dentro do vórtice) do segundo pelo primeiro termo do lado esquerdo da equação acima é da ordem de $T_c \omega$. Então, a equação para um vórtice coerente se reduz a

$$\vec{\omega} \times \vec{u} \approx -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

se a condição (ii) é satisfeita. Supondo que o vórtice coerente é um tubo de vórtice tangente ao vetor velocidade, então este tubo é possui baixa pressão dinâmica.

Critério Q :

Considere o tensor gradiente de velocidade $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, com suas partes simétrica e anti-simétrica .

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- O segundo invariante deste tensor é

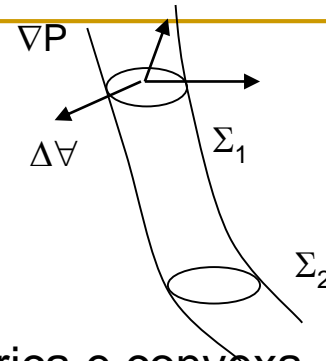
$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \Omega_{ij} - S_{ij} S_{ij}) = \frac{1}{4} (\bar{\omega}^2 - 2 S_{ij} S_{ij})$$

- sendo igual a $\frac{1}{2\rho} \nabla^2 P$

- A equação de Poisson para a pressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla^2 P &= \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \\ &= \left(S_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij\lambda} \omega_\lambda \right) \left(S_{ji} + \frac{1}{2} \epsilon_{ji\mu} \omega_\mu \right) = S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 = -2Q \end{aligned}$$

- Considere um tubo de pressão estática baixa com pequena seção transversal.



➤ Seja $\Delta\Sigma$ sua superfície lateral, a qual é isobárica e convexa. Sejam Σ_1 e Σ_2 duas seções transversais do tubo normais ao seu eixo, e seja $\Delta\forall$ o volume da porção entre Σ_1 e Σ_2 . O gradiente de pressão em $\Delta\Sigma$ é normal à mesma e é direcionado para o exterior. O gradiente de pressão nas duas seções transversais é tangente à elas. Então, o fluxo do gradiente de pressão saindo do tubo é igual ao fluxo através de $\Delta\Sigma$ e é positivo. Pelo teorema de divergência, isto é igual a integral sobre $\Delta\forall$ de $\nabla^2 p$, a qual é positiva, assim com a integral de Q . Se assumirmos que o tamanho de $\Delta\forall$ é tão pequeno que Q não varia no seu interior, isto significa que Q é positivo em $\Delta\forall$. Este procedimento pode ser repetido para todo o comprimento do tubo, e o critério Q é portanto uma condição necessária para a existência de tubos pequenos, convexos de baixa-pressão.

➤ O critério Q , apesar de não ser exato para caracterizar uma rotação local de um gradiente de um escalar passivo em 3 dimensões, é útil para caracterizar tubos de baixa pressão convexos, os quais geralmente encontram-se associados à vórtices coerentes.

