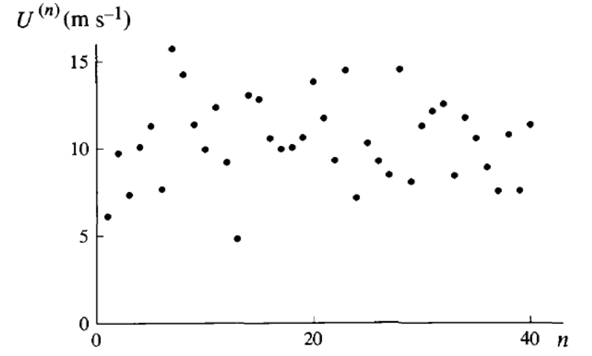
Caracterização da Turbulência

- Equação de Navier-Stokes é determinística
- Em um escoamento turbulento, a velocidade é randômica



  - Em todo escoamento turbulento há perturbações nas condições iniciais e de contorno e nas propriedades materiais
  - Escoamentos turbulentos apresentam sensibilidade muito acentuada à perturbações
  - Abaixo de um número de Reynolds crítico, o escoamento é estável e laminar
  - Acima do Reynolds crítico, o escoamento é instável, caótico

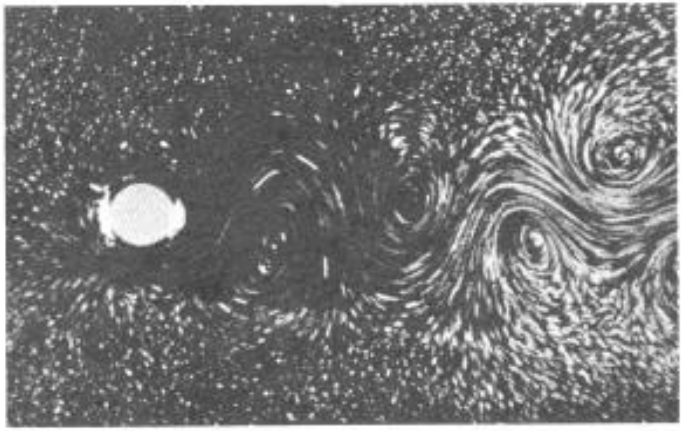
Caracterização da Turbulência

- irregularidade: a turbulência é irregular e aleatória. É necessária a utilização de métodos estatísticos, que indiquem a probabilidade de eventos, por exemplo, $A=\{U< 10$ m/s$\}$

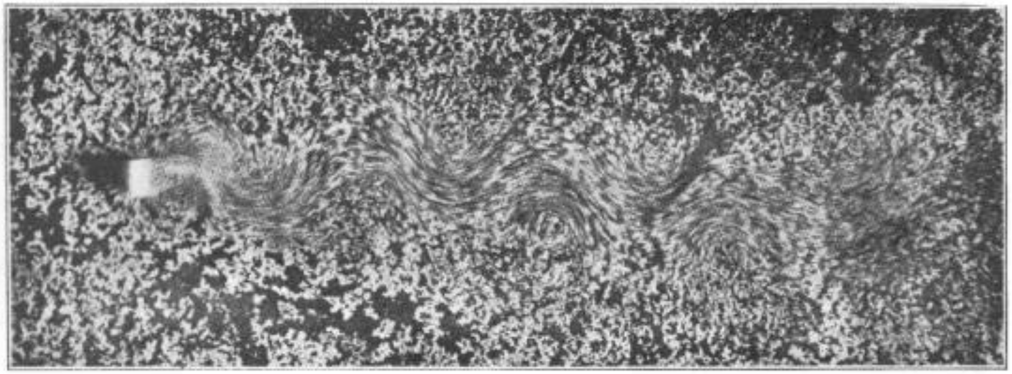
- altos números de Reynolds: a turbulência em geral surge de uma instabilidade do escoamento em regime laminar, quando o número de Reynolds torna-se grande. As instabilidades estão relacionadas com interações entre termos viscosos e termos de inércia não lineares nas equações de quantidade de movimento linear.

- Os efeitos advectivos altamente não lineares, são efeitos amplificadores de perturbações é geradores de instabilidades.
- Por outro lado os efeitos difusivos são amortecedores ou inibidores da formação de instabilidades.
- O número de Reynolds (Re) é definido como a razão entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos.
- Desta forma um escoamento só poderá transicionar ou se manter turbulento quando Re for maior que a unidade.

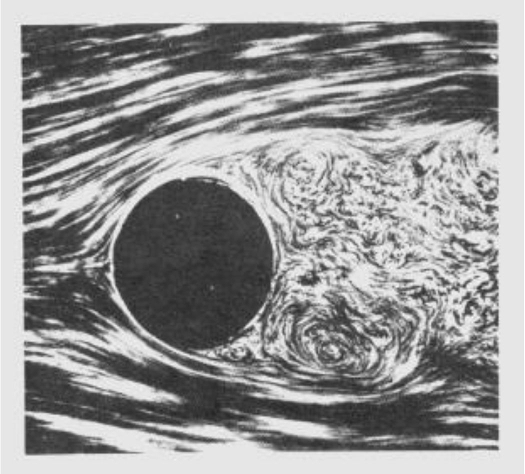
Escoamento ao redor de um cilindro



Baixo número de Reynolds



Número de Reynolds Intermediário



Alto Número de Reynolds

- fenômeno difusivo: a difusão da turbulência é o que causa as rápidas misturas e aumenta as taxas de transferência de "momentum".

  - A difusividade da turbulência é em geral a característica mais importante da turbulência:
    - previne separação da camada limite em aerofólios com grandes ângulos de ataque,
    - aumenta a taxa de transferência de calor em máquinas de um modelo geral;
    - é a fonte de resistência ao escoamento de fluidos em tubulações,
    - aumenta a transferência de "momentum" entre correntes de ventos e oceanos.

- O aumento da difusão ocorre devido ao fato que, no regime turbulento, tem-se a presença de flutuações térmicas e de concentração, o que cria fortes e numerosos gradientes locais, tornando o processo de difusão molecular mais eficiente.

- Outra fonte homogenizadora é o transporte de parcelas de fluido para diferentes regiões do escoamento o que também gera fortes gradientes locais.

- dissipação: o escoamento turbulento é sempre dissipativo.
  - As tensões viscosas geram trabalho de deformação que aumenta a energia interna de um fluido, as custas da energia cinética turbulenta.
  - A turbulência necessita uma fonte contínua de energia para compensar essas perdas viscosas. Se nenhuma energia for fornecida a turbulência decairá rapidamente.
  - O processo de dissipação viscosa de energia cinética turbulenta, gerando aumento de energia interna acontece nas altas frequências.
  - Toda energia injetada no escoamento no regime turbulento completamente desenvolvido deve cascatear sobre o espectro de turbilhões até as frequências dissipativas.

- fenômeno contínuo: a turbulência é um fenômeno contínuo, governado pelas equações da mecânica dos fluidos. Mesmo as menores escalas existentes em um escoamento turbulento são significativamente superiores que o comprimento de escala molecular.
  - As menores escalas de comprimento da turbulência são muito maiores que o livre caminho médio molecular do fluido. Este fato, no entanto, está limitado a escoamentos com número de Mach inferior a 15

- fenômeno impredíscível: É a característica relativa à incapacidade de reproduzir ou repetir um dado experimento.
  - Em um laboratório, sob condições extremas de controle, não é possível desenvolver duas realizações idênticas.
  - Numericamente é impossível reproduzir exatamente as condições iniciais e de contorno experimentadas no laboratório.
  - Um escoamento turbulento tem, pelos efeitos não lineares, uma alta capacidade de amplificação destes pequenos erros, conduzindo a resultados completamente diferentes, em duas realizações que diferem minimamente nas condições iniciais e de contorno

- <u>rotacional e tridimensional</u>: a turbulência só pode ocorrer em escoamentos rotacionais.
  - As flutuações randômicas da vorticidade não são capazes de se manter, se as flutuações da velocidade forem bidimensionais, uma vez que o mecanismo que mantem a vorticidade ("vortex stretching“) não existe em escoamentos bidimensionais.
  - Isto pode ser demonstrado através da equação de transporte para a vorticidade (equação de Helmholtz), a qual pode ser obtida, como já mencionado, aplicando-se o operador rotacional na equação de Navier-Stokes.
  - Demonstra-se que o termo de geração de vorticidade é nulo em escoamentos bidimensionais.

Escalas da Turbulência

- Uma das características marcantes da turbulência é o aumento das taxas de transferência de quantidade de movimento, energia e massa, quando comparado com um regime laminar.
- Para ilustrar vamos comparar as taxas de difusão molecular e turbulenta de calor em uma sala com uma dimensão característica *L* e na qual está instalado um radiador de calor. Vamos proceder uma análise dimensional
- Numa sala, com ar parado, a transferência de calor ocorrerá por difusão molecular. Este processo é governado pela equação de difusão

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

- Esta equação pode ser avaliada dimensionalmente. Vamos considerar que $\Delta\theta$ é a diferença de temperatura característica, então

$$\frac{\Delta\theta}{T_m} = \alpha \frac{\Delta\theta}{L^2} \qquad\qquad T_m \approx \frac{L^2}{\alpha}$$

- Para uma sala de 5 m, como a difusividade térmica a é 2×10^{-5} m^2/s, o tempo característico da a difusão térmica T_m é da ordem 10^6 s igual a mais de 10 dias.

- Vamos considerar agora, que a turbulência também possa ser caracterizada por *L*, ou seja os maiores vórtices possuem uma dimensão *L* já que estão limitados pelo tamanho da sala. Vamos chamar de *u* a velocidade característica do vórtice. O tempo característico T_t é

$$T_t = \frac{L}{u}$$

- Considerando uma velocidade característica da ordem de 5 cm/s, o tempo característico para a difusão turbulenta é T_t= 100 segundos. Logo a difusão turbulenta é bem mais efetiva que a molecular.

- A razão dos tempos característicos é $\dfrac{T_t}{T_m} = \dfrac{L}{u}\dfrac{\alpha}{L^2} = \dfrac{\alpha}{u\,L} = \dfrac{1}{\mathbf{Pe}} = \dfrac{\upsilon}{u\,L}\dfrac{\alpha}{\upsilon} = \dfrac{1}{\mathbf{Re}}\dfrac{1}{\mathbf{Pr}}$

- Para gases, o número de Prandtl **Pr** é da ordem de 1 (para ar: **Pr =** 0,7) logo a razão acima fica

$$\frac{T_t}{T_m} = \frac{1}{\mathbf{Re}}$$

Neste exemplo, o número de Reynolds **Re** ≈ 15.000.

- Este exemplo mostra que o número de Reynolds para um escoamento turbulento pode ser interpretado como a razão entre as escalas de tempo molecular e escala de tempo turbulenta.

- Esta interpretação é mais confiável do que a interpretação do número de Reynolds como a razão entre forças de inércia e forças viscosa. Esta interpretação pode ser enganosa, pois para altos números de Reynolds, os efeitos viscosos e outros efeitos difusivos operam em escalas de comprimento diferentes que os termos de inércia.

- Uma forma de tratar o aumento da difusividade originada pela turbulência é através de uma difusividade turbulenta. Neste caso, estaremos tratando a turbulência como uma propriedade do fluido e não do escoamento. Isto é muito perigoso, mas torna a matemática mais simples.

- Se os efeitos da turbulência puderem ser representados por uma simples difusividade constante e escalar, podemos escrever a equação de difusão de calor devido a movimento turbulento como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \, \partial x_i}$$

onde K representa a difusividade turbulenta.

- A escala de tempo *T* para a equação acima é

$$T = L^2 / K$$

- Esta difusividade deve fornecer a mesma escala de tempo que o processo de mistura analisado. Logo, igualando $T = T_t$

$$T = L^2 / K \qquad T_t = \frac{L}{u} \qquad K = u\ L$$

- Esta equação mostra que K aumenta com o tamanho dos vórtices.

- A difusividade do vórtice K pode ser comparada com a difusividade de quantidade de movimento molecular υ e com a difusividade térmica α .

$$\frac{K}{\alpha} \approx \frac{K}{\upsilon} \approx \frac{u\ L}{\upsilon} = \mathbf{Re}$$

- a razão entre as difusividade turbulenta e molecular é portanto outra interpretação para o número de Reynolds do movimento turbulento.

Pequenas Escalas da Turbulência

- Os grandes vórtices de um escoamento turbulento são responsáveis pela maior parte do transporte de "momentum".
  - Sugerimos que os grandes vórtices sejam tão grandes quando o tamanho do escoamento e que esta é a escala relevante para a análise das interações da turbulência com o escoamento médio.
  - Contudo, para outros aspectos da turbulência outras escalas são necessárias.

- Para escalas muito pequenas, a viscosidade pode ser efetiva em suavizar as flutuações da velocidade.
  - A geração das flutuações de pequena escala é devido a termos não lineares das equações do movimento.

- Ao nível das menores escalas de comprimento, correspondentes aos menores vórtices, os termos viscosos atuam no sentido de limitar o surgimento de vórtices ainda menores através da dissipação de energia na forma de calor.

- Já que movimentos com pequenas escalas de comprimento tendem a ter pequenas escalas de tempo, é possível que estes movimento sejam estatisticamente independentes dos movimentos mais lentos de grande escalas, bem como do escoamento médio.

- Se esta hipótese estiver certa, movimentos de pequenas escalas deveriam depender somente da taxa de suprimento de energia pelo escoamento médio e da viscosidade cinemática.

- É razoável assumir que a taxa de energia suprida deve ser igual à taxa dissipada, porque a taxa líquida de variação de energia das pequenas escalas é relacionada com a escala de tempo do escoamento como um todo.
- A taxa líquida de variação deve ser pequena comparada com a taxa na qual a energia é dissipada. Como os termos viscosos limitam o tamanho dos menores vórtices, a dissipação ocasionada por estes termos deve igualar a quantidade de energia fornecida.

- Esta é a base da "Hipótese do Equilíbrio Universal" de Kolmogorov (1942), a qual postula que os únicos parâmetros importantes para os movimentos das pequenas escalas são a taxa de dissipação por unidade de massa ε e a viscosidade cinemática υ.

- Usando portanto, a dissipação ε e a viscosidade cinemática υ, podemos formar, através de uma análise dimensional, as escalas de comprimento, tempo e velocidade.

- Para avaliar a dimensão da dissipação, vamos considerar que a energia dissipada por um vórtice de dimensão *L* pode ser estimada da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{Potencia}{massa} = \frac{Forca\ u}{\rho\ \forall} \approx \frac{\left(\rho\ \frac{u^2}{2}\ area\right)\ u}{\rho\ \forall} \approx \frac{\rho\ \frac{u^2}{2}\ L^2\ u}{\rho\ L^3} \approx \frac{u^3}{L}$$

dimensões da grandezas envolvidas

$$\eta = [L] \quad ; \quad \tau = [T] \quad ; \quad v = \left[\frac{L}{T}\right] \quad ; \quad \upsilon = \left[\frac{L^2}{T}\right] \quad ; \quad \varepsilon = \left[\frac{L^2}{T^3}\right]$$

grupos adimensionais

$$\pi_1 = \eta^{a1}\,\upsilon^{b1}\,\varepsilon^{c1} \quad ; \quad \pi_2 = \tau^{a2}\,\upsilon^{b2}\,\varepsilon^{c2} \quad ; \quad \pi_3 = v^{a3}\,\upsilon^{b3}\,\varepsilon^{c3}$$

Para π_1 ; $\pi_1 = \eta^{a1}\,\upsilon^{b1}\,\varepsilon^{c1} = [L\,]^{a1}\left[\dfrac{L^2}{T}\right]^{b1}\left[\dfrac{L^2}{T^3}\right]^{c1} = 1$

$T:$ $\quad - b1 - 3\,c1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b1 = -3\,c1$

$L:$ $\quad a1 + 2\,b1 + 2\,c1 = 0$

$\Rightarrow \quad a1 = 4\,c1 \quad \Rightarrow \quad c1 = a1/4$ e $b1 = -3/4\,a1$

$$\pi_1 = \eta^{a1}\,\upsilon^{b1}\,\varepsilon^{c1} = \eta\,\upsilon^{-3/4}\,\varepsilon^{1/4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \left(\frac{\upsilon^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}}$$

Para π_2 ; $\pi_2 = \tau^{a2}\,\upsilon^{b2}\,\varepsilon^{c2} = [T\ ]^{a2}\left[\frac{L^2}{T}\right]^{b2}\left[\frac{L^2}{T^3}\right]^{c2} = 1$

L **:** $2\,b2 + 2\,c2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b2 = -\,c2$

$T:$ $a2 - b2 - 3\,c2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a2 + c2 - 3\,c2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c2 = a2/2$ e $b2 = -\,a2/2$

$$\pi_2 = \tau^{a2}\,\upsilon^{b2}\,\varepsilon^{c2} = \tau\,\upsilon^{-1/2}\,\varepsilon^{1/2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau = \left(\frac{\upsilon}{\varepsilon}\right)^{1/2}}$$

Para π_3 ; $\pi_3 = v^{a3}\,\upsilon^{b3}\,\varepsilon^{c3} = \left[\frac{L}{T}\right]^{a3}\left[\frac{L^2}{T}\right]^{b3}\left[\frac{L^2}{T^3}\right]^{c3} = 1$

L **:** *a3 + 2 b3 + 2 c3 = 0* $\Rightarrow$ *b3 = - a3 /2- c3*

T : *- a3 - b3 - 3 c3 = 0* $\Rightarrow$ *- a3 + a3/2 + c3- 3 c2=0* $\Rightarrow$ *c3 = - a3/4*

e *b3 = - a3/2 + a3/4 = - a3/4* $\Rightarrow$ *b3 = - a3/4*

$\pi_3 = v^{a3}\,\upsilon^{b3}\,\varepsilon^{c3} = v\,\upsilon^{-1/4}\,\varepsilon^{-1/4} = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = (\upsilon\,\varepsilon)^{1/4}}$

$$\boxed{\eta \equiv \left(\frac{\upsilon^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \quad ; \quad \tau \equiv \left(\frac{\upsilon}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad ; \quad v \equiv (\upsilon\,\varepsilon)^{1/4}}$$

- Estas escalas são chamadas de microescalas de Kolmogorov de comprimento, tempo e velocidade.

- O número de Reynolds calculado com as dimensões acima é

$$\mathbf{Re} = \frac{v\,\eta}{\upsilon} = 1$$

- este resultado mostra que o movimento das pequenas escalas é bem viscoso e que a dissipação viscosa se ajusta à energia fornecida ajustando os comprimentos de escala.

Estimativa da Taxa de Dissipação

- Uma hipótese razoável a respeito da taxa de transferência de energia dos vórtices de grande escala para os de pequena escala é assumir que esta seja proporcional ao inverso da escala de tempo dos vórtices de grande escala:

$$T_t^{-1} = \frac{u}{L}$$

- Como a energia por unidade de massa dos grandes vórtices é proporcional a u^2, a taxa de transferência de energia é portanto proporcional a u^3/L. Como esta energia deve ser dissipada ao nível dos menores vórtices

$$\varepsilon \approx \frac{u^2}{T_t} \quad ; \quad \varepsilon \approx \frac{u^3}{L}$$

- Note que chegamos a mesma expressão obtida anteriormente.

Razão entre as micro e macro escalas da turbulência

$$\frac{\eta}{L} = \left(\frac{u\,L}{\upsilon}\right)^{-3/4} = \mathbf{Re}^{-3/4}$$

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\tau}{L/u} = \left(\frac{u\,L}{\upsilon}\right)^{-1/2} = \mathrm{Re}^{-1/2}$$

$$\frac{v}{u} = \left(\frac{u\,L}{\upsilon}\right)^{-1/4} = \mathbf{Re}^{-1/4}$$

- Podemos observar que as escalas de comprimento, tempo e velocidade dos menores vórtices são muito menores do que as escalas dos maiores e que esta diferença cresce com o aumento do número de Reynolds

- A vorticidade tem dimensões de freqüência (s^{-1}). A vorticidade de um pequeno vórtice deve ser proporcional ao inverso da escala de tempo. Logo, a vorticidade dos menores vórtices deve ser muito maior do que as dos maiores vórtices.

- A relação υ/u mostra que a energia dos menores vórtices é bem menor do que a energia contida nos vórtices de grandes escala.

- Para toda a turbulência tem-se que a maior parte da energia é associada aos movimentos de grandes escalas e a maior parte da vorticidade é associada aos movimentos das pequenas escalas.

Escala turbulenta e molecular

- As escalas de comprimento e tempo de Kolmogorov são as menores escalas que ocorrem no movimento turbulento.

- Demonstraremos que os escoamentos turbulentos podem ser descritos pela hipótese do contínuo.

- As escalas de tempo e comprimento de Kolmogorov diminuem com o aumento das taxas de dissipação. Altas taxas de dissipação são associadas a altos valores de u. É interessante notar que gases apresentam velocidade mais altas que líquidos.

- O comprimento de escala molecular relevante é o caminho médio livre ℓ. A escala de velocidade para o movimento molecular em um gás é proporcional a velocidade do som *a*. Pela teoria cinética dos gases, o produto *a* ℓ é proporcional a viscosidade cinemática do gás

$$\upsilon \approx a\,\ell$$

a razão entre o caminho médio livre ℓ e a escala de comprimento de Kolmogorov η é chamada de número de microescala de Knudsen

$$\frac{\ell}{\eta} = \frac{\upsilon / a}{(\upsilon^3 / \varepsilon)^{1/4}} = \frac{\upsilon / a}{(\upsilon^3 L / u^3)^{1/4}} \frac{u}{u} = M \left(\frac{\upsilon}{u\,L}\right)^{1/4} = \frac{M}{\mathbf{Re}^{1/4}}$$

onde $\mathbf{Re} = \dfrac{u\,L}{\upsilon}$; $M = \dfrac{u}{a}$ é o número de Mach

- Para a turbulência interferir no movimento molecular o número de Mach deve ser alto e o número de Reynolds baixo, o que é pouco provável de ocorrer.