
Equações de Conservação

Propriedades dos Fluidos

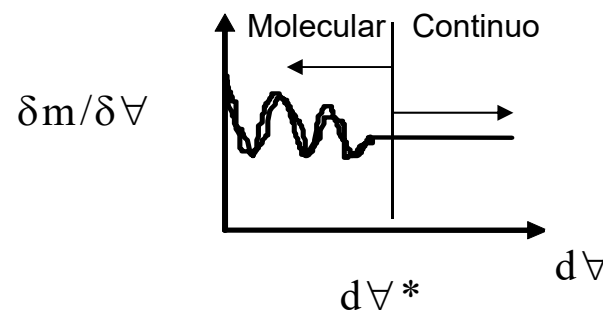
- Matéria é formada por moléculas em movimento, colidindo. As propriedades de matérias estão relacionadas com o comportamento molecular
 - Colisão com as paredes → pressão
 - Ocupação do espaço → densidade
 - Energia cinética → temperatura
- Para entender o comportamento da matéria seria necessário considerar cada molécula, conhecendo a história de cada uma, velocidade, aceleração e modos de interação. Isto é inviável sem um tratamento estatístico, devido ao elevado número de moléculas.

- Na maioria das aplicações da engenharia, desejamos estudar uma quantidade de volume de fluido contendo um grande número de moléculas

→ **hipótese do contínuo**: admite-se que os fluidos são meios contínuos, esquecendo-se da sua estrutura molecular.

- Para demonstrar o conceito do contínuo, considere a propriedade densidade:

□ ex: densidade: $\rho(x,y,z,t) = \lim_{dV \rightarrow dV^*} \delta m / \delta V$



- A hipótese do **contínuo** falha quando as dimensões envolvidas forem da ordem do caminho médio livre entre colisões moleculares:
 - Exemplo:
 - Distância média entre colisões de moléculas do ar nas CNTP: 3×10^{-9} m
 - Caminho médio livre λ : 6×10^{-8} m
 - Menor comprimento de escala de um escoamento: $\ell = 10^{-4}$ m
 - Comparação entre escalas:
 - número de Knudsen: $Kn = \lambda / \ell$
 - O conceito do contínuo é válido para $Kn \ll 1$
 - $Kn > 1$ por ex. arraste em satélites. A Teoria cinética dos gases trata desta área.

-
- Conceito do contínuo está associado com o conceito de campo, i.e., todas as grandezas são definidas no espaço e no tempo: Ex: $V(x,y,z,t)$; $P(x,y,z,t)$; $\rho(x,y,z,t)$; etc.
 - Não importa qual a partícula que está no ponto em um determinado instante de tempo, mas sim em que condições a partícula que passar pelo ponto naquele instante possui.
 - O escoamento dos fluidos é determinado a partir do conhecimento da velocidade em cada ponto do escoamento, isto é, a partir do campo de velocidade
 - Descrição de campo de variáveis físicas:
 - Método Lagrangiano
 - Método Euleriano
-

Método Lagrangeano

- ❑ As equações de conservação são aplicadas a um **sistema** arbitrário, o qual pode ser infinitesimal ou finito.
 - ❑ A variável física é descrita para um determinada partícula
 - ❑ A variável independente é um “rótulo” da partícula, como por exemplo, a coordenada da partícula em um determinado instante de tempo: \vec{r}_P é a posição da partícula P em $t = 0$
 - ❑ $\phi = \phi(\vec{r}_P, t)$ Esta função descreve como a função ϕ da partícula P varia com o tempo
 - ❑ Ex: policial seguindo carro

- A velocidade mede como a posição de uma partícula varia com o tempo

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\vec{V} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\text{particula}}$$

$$V_x = u = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\text{particula}}$$

$$V_y = v = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{\text{particula}}$$

$$V_z = w = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\text{particula}}$$

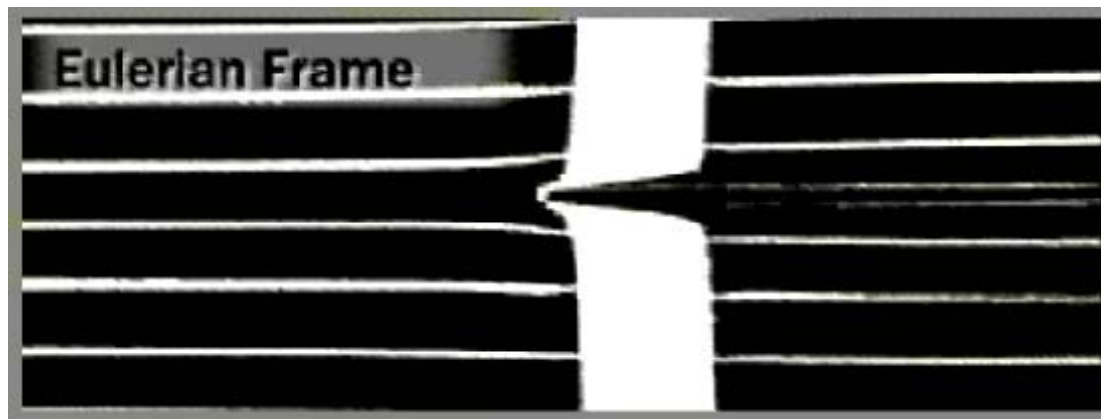
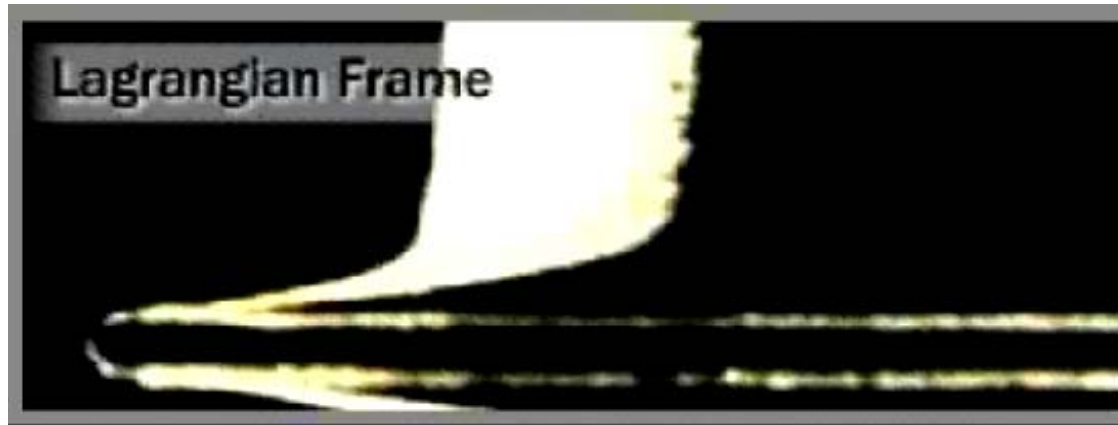
- Aceleração de uma partícula varia com o tempo

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{particula}}$$

Método Euleriano

- As equações de conservação são aplicadas a um **volume de controle** arbitrário, o qual pode ser infinitesimal ou finito
 - A variável física é descrita em relação a um ponto do espaço
 - Para cada instante t , a partícula em \vec{r} é uma partícula diferente
 - \vec{r} é a posição da partícula P em t
 - $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ Esta função descreve a função ϕ na posição da partícula P em função do tempo
 - Ex: controlador de tráfego



Vamos utilizar a formulação Euleriana, juntamente com o conceito de campo, i.e., todas as propriedades são definidas em função de sua localização no espaço e no tempo

Fluidos em Movimento

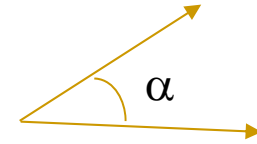
- O escoamento dos fluidos é determinado a partir do conhecimento da velocidade em cada ponto do escoamento, isto é, a partir do campo das diversas grandezas relevantes.
- **Tipos de Campos:**
 - Campo escalar:
 - massa específica: $\rho(\mathbf{r}, t)$; temperatura: $T(\mathbf{r}, t)$; pressão $p(\mathbf{r}, t)$
 - Campo vetorial:
 - velocidade: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$; aceleração: $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$; força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$
 - Campo Tensorial:
 - tensão: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$; gradiente de velocidade: $\nabla V(\mathbf{r}, t)$;
taxa de deformação $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$

■ Vetor Velocidade:

$$\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = \sum_i u_i \vec{e}_i = u_i \vec{e}_i$$

■ Produto escalar entre vetores:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$$



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i \vec{e}_i \bullet B_j \vec{e}_j = A_i B_j \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

produto escalar entre dois vetores unitários:

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

■ Operador gradiente:

$$\mathbf{grad} \phi = \nabla \phi = \vec{e}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \vec{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- Operador Divergente:

$$\mathbf{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_j A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

- Teorema de divergência de Gauss

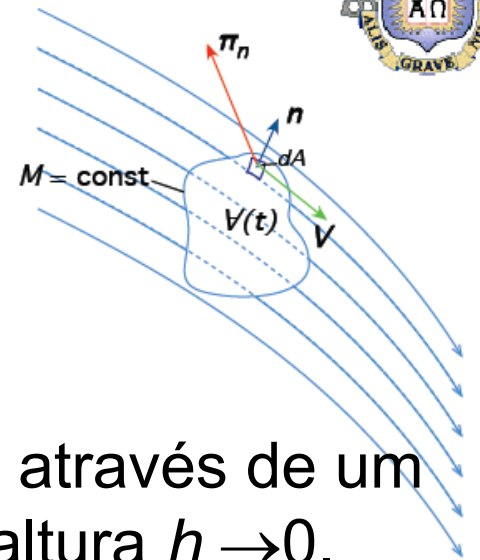
$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_{\forall} \mathbf{div}(\vec{A}) d\forall$$
$$\mathbf{div} \vec{A} = \lim_{\forall \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\forall} \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \right]$$

Fluxo líquido por unidade de volume



Vetor tensão

- O vetor tensão \mathbf{t}_n é a força de contato por unidade de área que um material dentro de $\nabla(t)$ faz no material fora de $\nabla(t)$.
- Hipótese de Cauchy: $\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_n(\mathbf{n})$
- A dependência de \mathbf{t}_n em \mathbf{n} pode ser obtida através de um balanço de forças em um tetraedro com a altura $h \rightarrow 0$.



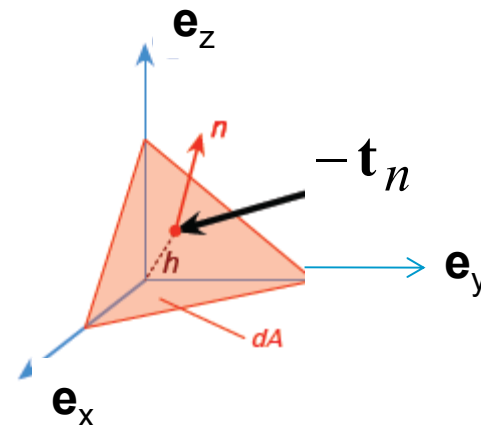
$$\sum F = 0 \Rightarrow -\mathbf{t}_n dA - \mathbf{t}_{-x} dA(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) - \mathbf{t}_{-y} dA(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) - \mathbf{t}_{-z} dA(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) = 0$$

- Da 3ª. Lei de Newton

$$\mathbf{t}_{-x} = -\mathbf{t}_x \quad ; \quad \mathbf{t}_{-y} = -\mathbf{t}_y \quad ; \quad \mathbf{t}_{-z} = -\mathbf{t}_z$$

- então

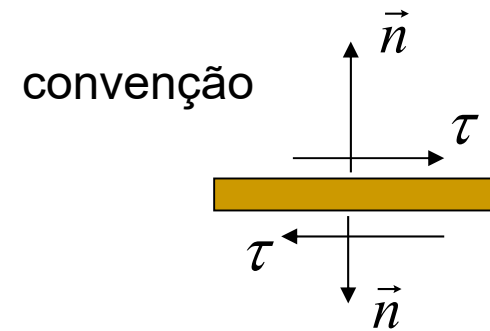
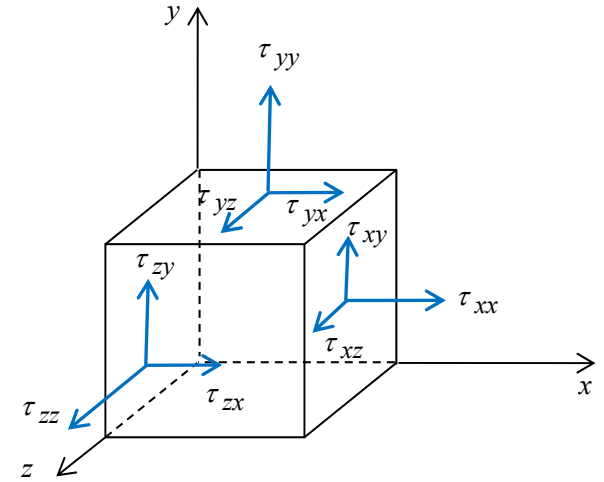
$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) + \mathbf{t}_y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) + \mathbf{t}_z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) = \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{t}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{t}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{t}_z \mathbf{e}_z \right] = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$



- Tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



Descrição Euleriana

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\text{particula}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_u + \frac{\partial \phi}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_v + \frac{\partial \phi}{\partial z} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_w$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{taxa de variação com o tempo (posição fixa)}} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} v + \frac{\partial \phi}{\partial z} w}_{\text{taxa de variação com o tempo devido ao mov. da partícula (variação convectiva)}}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla \phi$$

ou

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- Derivada Material ou Total de uma grandeza ϕ (pressão, temperatura, velocidade, etc) descreve como a grandeza varia segundo o movimento (= como ϕ varia com o tempo para uma determinada partícula)

Derivada Material

Derivada Material

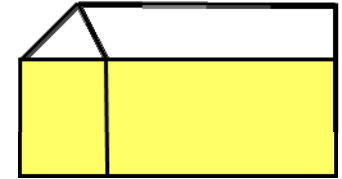
$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\phi$$

Deseja-se medir variação da pressão com o tempo, em três situações diferentes:

1 - Estação Meteorológica $p=p(t)$

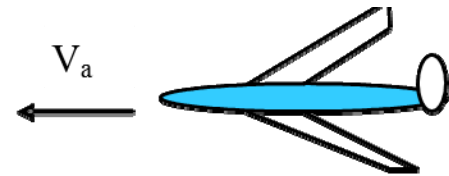
\Rightarrow

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$



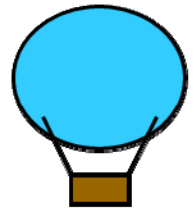
2 - Avião com velocidade $\vec{V}_a = u_a \vec{i} + v_a \vec{j} + w_a \vec{k}$

\Rightarrow



$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u_a + \frac{\partial p}{\partial y} v_a + \frac{\partial p}{\partial z} w_a$$

3 - Balão sem propulsão, se deslocando com a velocidade do ar, do fluido, com velocidade $\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$



$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla p = \frac{Dp}{Dt}$$

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \vec{V}$$

**aceleração
local temporal**

**aceleração
convectiva**

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

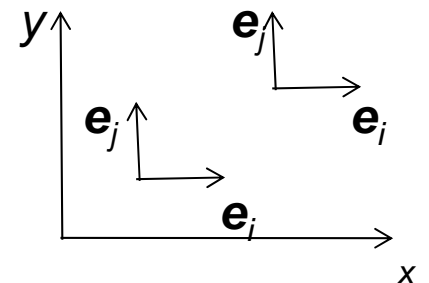
$$a_i = \frac{D u_i}{D t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Em coordenadas cartesianas: $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$



Aceleração:

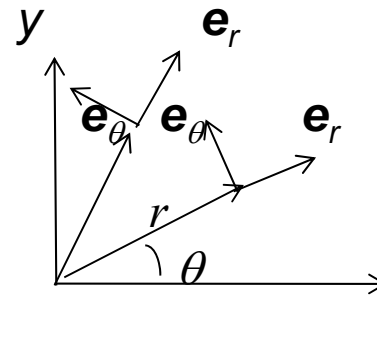
$$\vec{a} = \frac{D \vec{V}}{D t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \vec{V}$$

aceleração local temporal
aceleração convectiva

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$$



$$a_r = \frac{D u_r}{D t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$$

centrífuga

$$a_\theta = \frac{D u_\theta}{D t} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}$$

coriolis

$$a_z = \frac{D u_z}{D t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Varição da massa
com o tempo por
unidade de volume

Fluxo líquido de massa
por unidade de volume

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

derivada material, ou total ou substantiva

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

variação local
temporal

variação
convectiva

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Varição temporal da massa
por unidade de volume

Fluxo líquido de massa
por unidade de volume

Notação
indicial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

Notação
indicial

ou

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \qquad \frac{D \rho}{D t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

derivada material, ou total ou substantiva

$$\frac{D \rho}{D t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

variação local
temporal

variação
convectiva

Equação de Conservação de Massa ou Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \vec{V}) = 0$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} (\vec{V}) = 0$$

- Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] = 0$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{r \partial r} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{r \partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right] = 0$$

Casos Particulares

1. Regime Permanente:

$$\mathbf{div} (\rho \vec{V}) = 0$$

2. Incompressível:

$$\mathbf{div} (\vec{V}) = 0$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2a Lei de Newton)

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \Sigma dV \vec{f}_{ext} = \rho dV \frac{D\vec{V}}{Dt} \Rightarrow \vec{f}_S + \vec{f}_C = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

aceleração: $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \vec{V}$

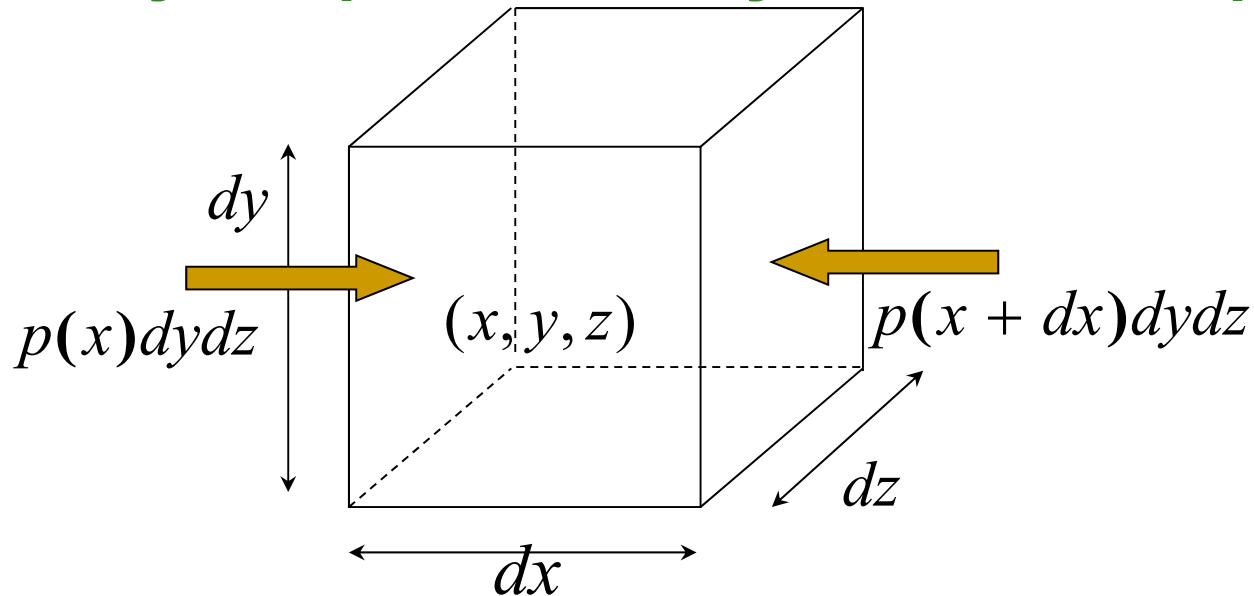
força de corpo: \vec{f}_C

força volumétrica: ex: força gravitacional

$$\vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

força de superfície: $\vec{f}_S = \vec{f}_p + \vec{f}_\mu$

\vec{f}_p - força de pressão: força normal compressiva



$$dF_{p,x} = p \, dy \, dz - (p \, dy \, dz + \partial p / \partial x \, dx \, dy \, dz) = - \partial p / \partial x \, dV$$

$$\Rightarrow f_{p,x} = - \partial p / \partial x \quad \text{logo} \quad f_{p,y} = - \partial p / \partial y \quad \text{e} \quad f_{p,z} = - \partial p / \partial z$$

Notação
indicial

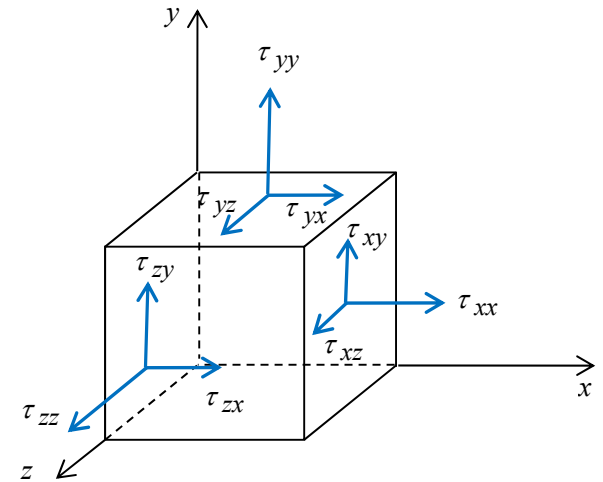
$$\vec{f}_p = - \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_p = - \vec{\nabla} p}$$

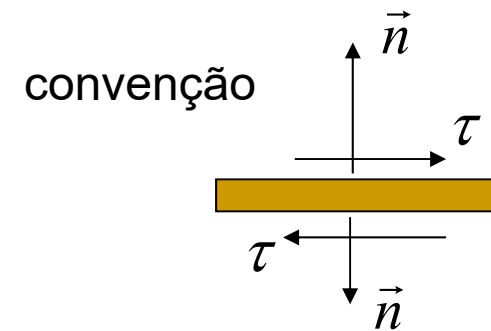
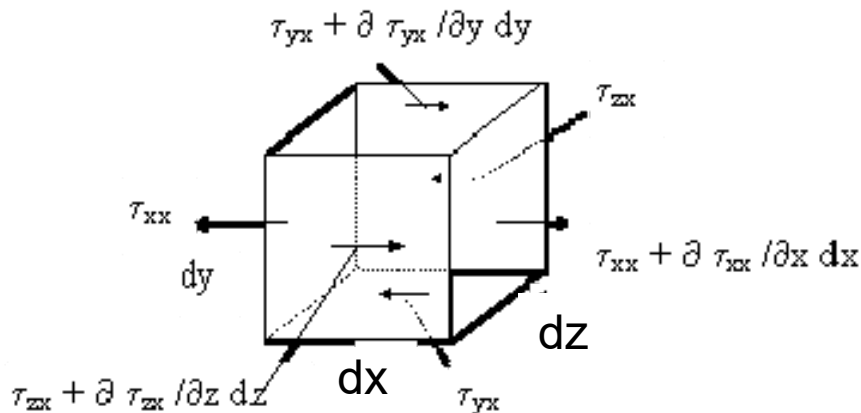
$$\boxed{f_{p_i} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

\vec{f}_μ **força viscosa**: força definida por um tensor, em cada face possui 3 componentes, dois tangenciais e um normal

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



- Força de superfície viscosa resultante na direção x



$$F_{\mu,x} = -\tau_{xx} \Delta y \Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) \Delta y \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \Delta x \Delta z - \tau_{zx} \Delta x \Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \Delta x \Delta y$$

$$F_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \longrightarrow \quad f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)_{23}$$

- Procedendo de forma análoga para as outras direções

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$



$$\vec{f}_{\mu} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

$$f_{\mu i} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{Notação indicial}$$

$$\vec{f}_{\mu} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\vec{f}_{\mu} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Pode-se demonstrar através da equação de conservação de quantidade de movimento angular que o tensor viscoso é simétrico

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

Na forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

Na forma indicial

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$$

Equação diferencial de quantidade de movimento

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \bullet \tau$$

coordenadas cartesianas

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

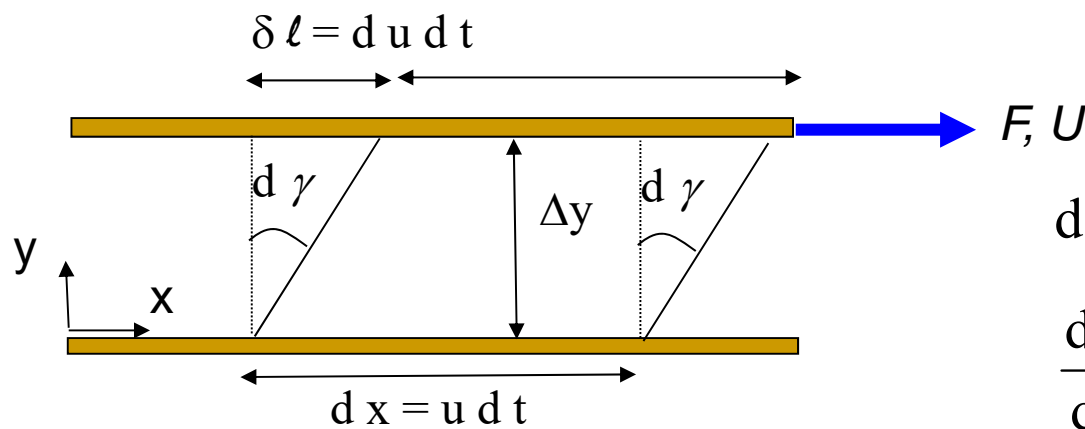
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Equações Constitutivas

Descrevem o comportamento do material \Rightarrow qual a resposta desta material (taxa de deformação) para um determinado esforço

Fluidos Newtonianos: tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação

Considere o escoamento entre 2 placas



Taxa de deformação

$$d\gamma \cong \tan(d\gamma) = \frac{\sin(d\gamma)}{\cos(d\gamma)} = \frac{du dt}{dy}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Lei da viscosidade de Newton: $\tau_{xy} = \frac{F}{A_y} = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{U}{\Delta y}$

μ = viscosidade absoluta (propriedade do fluido): dimensão: M/Lt (Pa s)

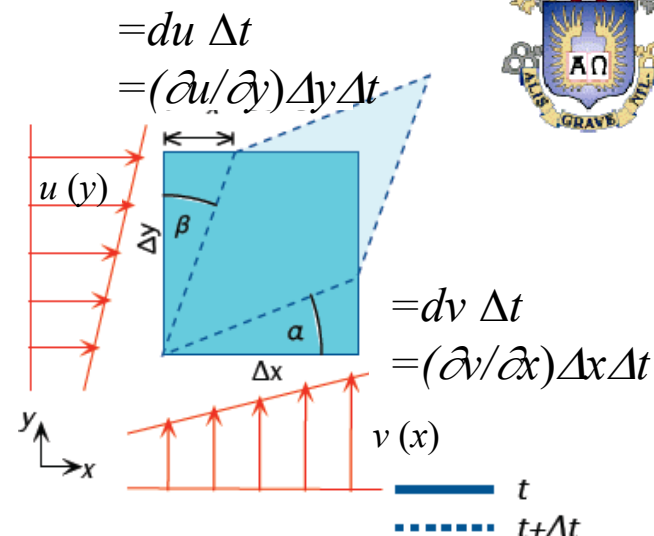
ν = viscosidade cinemática: μ / ρ



Taxa de deformação angular:

$$\Delta \gamma_{yx} = \alpha + \beta \approx \tan \alpha + \tan \beta = \frac{dv \Delta t}{\Delta x} + \frac{du \Delta t}{\Delta y}$$

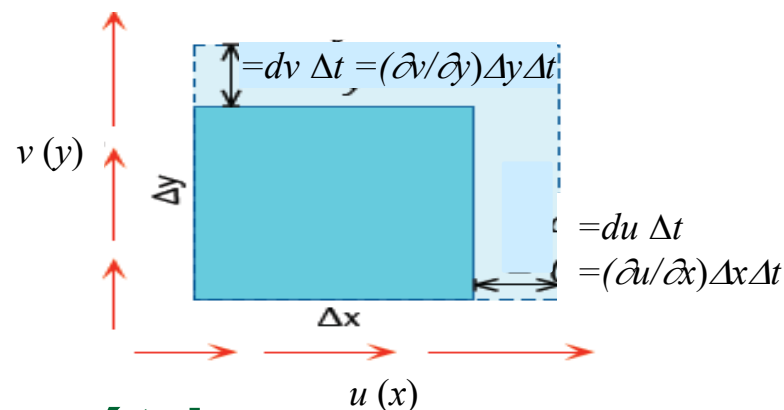
$$\dot{\gamma}_{yx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma_{yx}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 D_{yx}$$



Taxa de deformação linear:

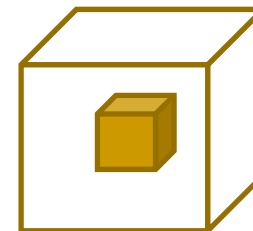
$$\Delta \gamma_{xx} = \frac{du \Delta t}{\Delta x}$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma_{xx}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} = D_{xx}$$



Taxa de deformação volumétrica:

$$\dot{V} = \dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} = \dot{\gamma}_{zz} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \vec{V}$$



Equação Constitutiva para fluidos Newtonianos $\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V}$$

Em notação vetorial, a taxa de deformação de um elemento de fluido, pode ser escrita como:

$$\underline{\dot{\gamma}} = [\mathbf{grad} \vec{V} + (\mathbf{grad} \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mathbf{div} \vec{V} \underline{I}$$

$$\mathbf{grad} \vec{V} = \vec{\nabla} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (u \quad v \quad w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{grad} \vec{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} ; \quad \underline{I} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_\mu = \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = \operatorname{div} \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \operatorname{div} \left\{ \mu [\operatorname{grad} \vec{V} + (\operatorname{grad} \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} \right\}$$

- **Equação de Navier-Stokes**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad} p +$$

$$+ \operatorname{div} \left\{ \mu [\operatorname{grad} \vec{V} + (\operatorname{grad} \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} \right\}$$

Na forma indicial

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\}$$

- A equação de quantidade de movimento linear pode ser escrita na forma conservativa, isto é, pode ser escrita, combinando com a equação de conservação de massa
 - Considere o termo de aceleração

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + V_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{zero}}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \left(\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{Variação da quantidade de movimento}$$

$$\left(\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left\{ \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} \right]$$

Equação de Navier-Stokes: Equação de conservação de quantidade de movimento linear para fluido Newtonianos (coordenadas cartesianas)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Casos Particulares:

- **Equação de Euler (fluido perfeito, não viscoso)**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad} p$$

Pode-se demonstrar que se integrarmos a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente obtemos a equação de Bernoulli

- **Equação da Hidrostática:** $\rho \vec{g} = \mathbf{grad} p$

Casos Particulares: Fluido Newtoniano

• com viscosidade constante

- A viscosidade da maioria dos gases é aproximadamente constante

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right\} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right\}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right\}} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\}$$

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right\} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\}$$

$$\vec{f}_{\mu} = \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}}$$

Casos Particulares: Fluido Newtoniano

- **com viscosidade e massa específica constantes**
 - A maioria dos líquidos pode ser considerada como fluido incompressível (maioria dos líquidos) $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}$$

$$\vec{f}_{\mu} = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Navier-Stokes (propiedades constantes)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

coordenadas cartesianas

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Potencial Gravitacional

- Considere Ψ como o potencial gravitacional, isto é, energia por unidade de massa associada ao campo gravitacional. Então, a força de corpo por unidade de massa é

$$\vec{g} = - \nabla \varphi$$

- Para um campo gravitacional constante, o potencial é $\varphi = g z$.

- A equação de quantidade de movimento linear pode ser escrita como

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$$

- Considerando agora, um fluido incompressível ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$), e definindo a pressão modificada P como $P = p + \rho \varphi$ a equação simplifica para

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

- adicionalmente, considerando viscosidade constante, temos

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}$$

ou

$$\frac{D \vec{V}}{D t} = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática.

- Condições de contorno

- Superfície sólida, com unitário normal \mathbf{n}

- ***Impermeável***

$$\vec{n} \bullet \vec{V} = 0$$

- ***não deslizamento***

$$\vec{t} \bullet \vec{V} = V_{wall}$$

Equação de Poisson da Pressão

Aplicando o divergente na equação de Navier-Stokes, temos

$$\nabla \cdot \left(\frac{D \vec{V}}{D t} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \nu \nabla \cdot \left(\nabla^2 \vec{V} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} e_k \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) e_i = -\frac{\partial}{\partial x_k} e_k \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} e_i + \frac{\partial}{\partial x_k} e_k \cdot \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} e_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Definindo $\Delta = \nabla \cdot \vec{V}$

$$\left[\frac{D}{Dt} - \nu \nabla^2 \right] \Delta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Logo, como para um escoamento de fluido incompressível $\Rightarrow \Delta = 0$

$$\nabla^2 P = -\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

A equação de Poisson é uma condição necessária e suficiente para que um escoamento incompressível permaneça incompressível

-
- Para obter a condição de contorno para a equação de Poisson da pressão, pode-se aplicar a equação de Navier Stokes a uma superfície sólida estacionária , logo,

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \mu \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2}$$

- onde n é a coordenada normal à parede e u_n é o componente de velocidade normal à parede.
- Dada a condição de Neumann na forma acima, o campo de pressão fica determinado (a menos de uma constante) pelo campo de velocidade, independente da história do escoamento.

Equação de conservação de escalares passivos

$$\frac{D\phi}{Dt} = \Gamma \nabla^2 \phi$$

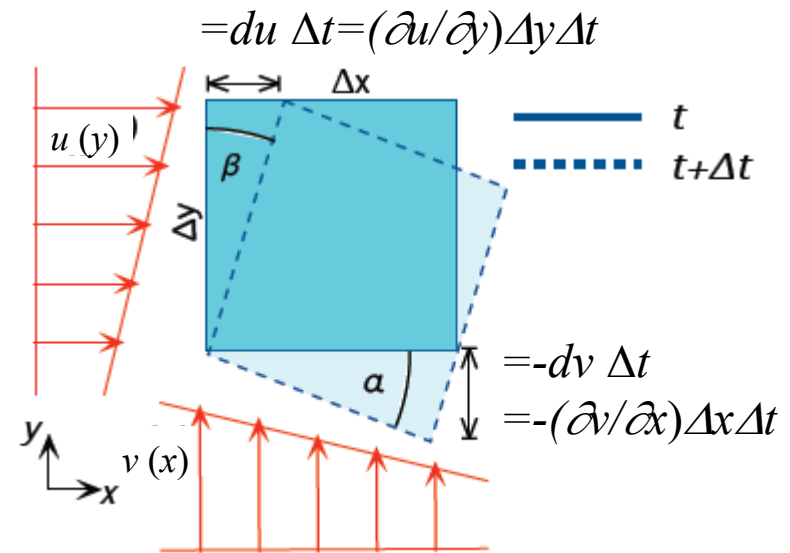
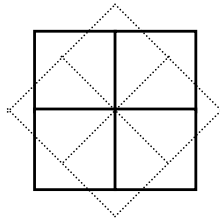
- onde Γ é a difusividade e é constante.
- O escalar ϕ é conservado, pois não há fontes ou sorvedouros.
- Uma propriedade importante das variáveis conservadas é que as mesmas são limitadas pelos valores iniciais e de fronteira.

$$\phi_{min} \leq \phi \leq \phi_{max}$$

Rotação:

A rotação $\vec{\omega}$ de uma partícula de fluido é definida como a velocidade angular média de quaisquer duas linhas mutuamente perpendiculares, que se cruzam no centro da partícula..

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$



$$\Delta \theta_{yx} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \approx \frac{1}{2}(\tan \alpha + \tan \beta) = \frac{1}{2} \left(-\frac{dv \Delta t}{\Delta x} + \frac{du \Delta t}{\Delta y} \right)$$

$$\dot{\theta}_{yx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta_{yx}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\omega_z$$

$$\text{logo } \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{e} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad , \quad \text{rotacional } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

$$\text{vorticidade: } \vec{\xi} = 2 \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

Equação da Vorticidade

- Uma característica essencial do escoamento turbulento é que estes devem ser rotacionais, isto é a vorticidade é não nula. A vorticidade é definida pelo rotacional do vetor velocidade

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V}$$

- sendo igual a duas vezes a rotação do elemento de fluido.

- Em notação indicial $\xi_k e_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) \times (V_j e_j) = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} e_k$

- onde $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$ sendo $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ são cíclicos} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ são anti-cíclicos} \\ 0 & \text{se } (i, j, k) \text{ caso contrário} \end{cases}$

símbolo de permutação (símbolo Levi-Civita)

- A equação para a vorticidade pode ser derivada, aplicando o rotacional na equação de Navier-Stokes

$$\nabla \times \left(\frac{D \vec{V}}{D t} \right) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \nu \nabla \times \left(\nabla^2 \vec{V} \right)$$

- resultando em
$$\frac{D \vec{\xi}}{D t} = \nu \nabla^2 \vec{\xi} + \vec{\xi} \bullet \nabla \vec{V}$$

- A equação para a evolução de um elemento de linha material infinitesimal é
$$\frac{d \vec{s}}{d t} = \vec{s} \bullet \nabla \vec{V}$$

- Comparando as duas últimas equações, observa-se que para um escoamento não viscoso, o vetor vorticidade se comporta da mesma forma que um elemento de linha material infinitesimal (teorema de Helmholtz)

Teorema de Helmholtz

(fluido não viscoso, barotrópico ($\rho = \rho(P)$), força de corpo conservativa (não produz torque))

- 1 - *A intensidade de um filamento de vórtice é constante ao longo de seu comprimento*
- 2 - *Um filamento de vórtice não pode terminar em um fluido, deve estender até a fronteira do fluido ou formar um caminho fechado*
- 3 - *A ausência de forças externas rotacionais, um fluido inicialmente irrotacional, permanece irrotacional*

- Se a taxa de deformação produzida pelo gradiente de velocidade atua para esticar um elemento de linha material alinhada com $\vec{\xi}$, então a magnitude de $\vec{\omega}$ cresce de acordo. Este é o fenômeno chamado de *vortex stretching*, que é um processo importante nos escoamentos turbulentos e o termo $\vec{\xi} \cdot \nabla \vec{V}$ é referido ao termo de *vortex stretching*.
- Para escoamentos bi-dimensionais, o termo de *vortex stretching* se anula, e o componente não nulo da vorticidade se comporta como um escalar conservado. Devido a ausência do *vortex stretching*, a turbulência bi-dimensional é qualitativamente diferente da turbulência tri-dimensional.
- **Enstrofia:** vorticidade ao quadrado $\Rightarrow \xi^2 = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$

Taxa de Deformação e Rotação

- O tensor gradiente de velocidade pode ser decomposto em uma parcela isotrópica, uma simétrica deviatórica s_{ij} e uma anti-simétrica deviatórica Ω_{ij}

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} + s_{ij} + \Omega_{ij}$$

- onde $\Delta = \nabla \cdot \vec{V}$ é a dilatação, sendo nula para escoamento de fluido incompressível
- Tensor simétrico tem os mesmos componentes em qualquer sistema de coordenadas
- Tensor deviatórico possui traço nulo ($\tau_{ii} = \text{traço } \tau = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$)
- A parcela deviatórica simétrica é $s_{ij} = \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} + S_{ij}$

- A parte simétrica é a taxa de deformação $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

- A parte anti-simétrica é o tensor taxa de rotação $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

- Pode-se mostrar que a lei de Newton/Stokes para a tensão viscosa para fluido incompressível pode ser reescrita como

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$$

- mostrando que a tensão viscosa depende linearmente da taxa de deformação, sendo independente da rotação.
- A vorticidade é relacionada com a taxa de rotação por

$$\xi_i = -\varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} ; \quad \Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \xi_k$$

ambos contém a mesma informação.

Equação de Conservação de Energia

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(i + \frac{V^2}{2} \right) = -\mathbf{div} \vec{q} + w_s + w_c + \rho \dot{q} + S_r$$

onde

- $i \Rightarrow$ energia interna
- $V \Rightarrow$ módulo do vetor velocidade, $V^2 = u_i^2$
- $V^2 / 2$ é a energia cinética
- $\vec{q} \Rightarrow$ fluxo de calor por condução. Lei de Fourier $\Rightarrow \vec{q} = -k \mathbf{grad} T$
- $\dot{q} \Rightarrow$ geração de calor por unidade de volume
- $S_r \Rightarrow$ fluxo líquido de calor devido a radiação por unidade de volume
- $w_s \Rightarrow$ trabalho devido as forças de superfície $\Rightarrow w_s = \mathbf{div}[\vec{V} \bullet \underline{T}]$
- $\underline{T} \Rightarrow$ tensor da tensões (tensão normal de pressão e tensão viscosa)
- $\underline{T} = (-p \underline{I} + \underline{\tau})$
- $\underline{\tau} \Rightarrow$ tensão viscosa $\Rightarrow \underline{\tau} = \mu \mathbf{grad} \vec{V} + \mu (\mathbf{grad} \vec{V})^T - \frac{2}{3} \mu \mathbf{div} \vec{V} \underline{I}$
- $w_c \Rightarrow$ trabalho devido as forças de corpo (gravitacional) $\Rightarrow w_c = \vec{V} \bullet \rho \vec{g}$

Vamos desenvolver alguns termos da equação acima

- termo de energia cinética $\rho \frac{D}{D t} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{V} \bullet \frac{D \vec{V}}{D t}$

usando a equação de quantidade de movimento

$$\rho \frac{D}{D t} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \vec{V} \bullet [\rho \vec{g} + \mathbf{div}(-p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}})]$$

- Desenvolvendo o trabalho de superfície $\underline{\underline{T}} = (-p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}})$

$$w_S = \mathbf{div} [\vec{V} \bullet \underline{\underline{T}}] = \vec{V} \bullet \mathbf{div} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad} \vec{V}$$

$$w_S = \vec{V} \bullet \mathbf{div}(-p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}}) + \Psi \quad \Psi = \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad} \vec{V}$$

Substituindo e rearrumando a equação da energia

$$\rho \frac{D i}{D t} + \vec{V} \bullet [\rho \vec{g} + \mathbf{div}(-p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}})] = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] +$$
$$+ \vec{V} \bullet \mathbf{div}(-p\underline{I} + \underline{\underline{\tau}}) + \Psi + \vec{V} \bullet \rho \vec{g} + \rho \dot{q} + S_r$$

cancelando os termos iguais

$$\rho \frac{D i}{D t} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] + \Psi + \rho \dot{q} + S_r$$

trabalhando o termo $\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad} \vec{V}$

O tensor $\mathbf{grad} \vec{V}$ pode se decomposto em uma parte simétrica e uma outra anti-simétrica

$$\mathbf{grad} \vec{V} = \underbrace{\frac{1}{2} \left[\mathbf{grad} \vec{V} + (\mathbf{grad} \vec{V})^T \right]}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\mathbf{grad} \vec{V} - (\mathbf{grad} \vec{V})^T \right]}_{\underline{\underline{\Omega}}}$$

tensor deformação tensor rotação

$$\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad} \vec{V} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} + \underbrace{\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\Omega}}}_{zero}$$

$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0$ pois $\underline{\underline{T}}$ é simétrico e $\underline{\underline{\Omega}}$ é anti-simétrico

$$\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} = -p \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} = -p \mathbf{div} \vec{V} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}}$$

usando a conservação da massa

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \frac{D \rho}{D t} = \rho \frac{D (1 / \rho)}{D t}$$

finalmente

$$\Psi = - p \rho \frac{D(1/\rho)}{D t} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}}$$

$$- p \rho \frac{D(1/\rho)}{D t} \Rightarrow \text{trabalho de compressão por unidade de tempo por unidade de volume (trabalho reversível do tipo } p \, dv)$$

$$\Phi = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} \Rightarrow \text{trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa (i.e., conversão de energia mecânica para energia interna)}$$

$$\rho \frac{D i}{D t} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] - p \rho \frac{D(1/\rho)}{D t} + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

ou

$$\rho \frac{D i}{D t} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] - p \mathbf{div} \vec{V} + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

Entalpia: $h = i + p/\rho$

Trabalhando agora o termo referente a taxa de variação da energia interna por unidade de volume

$$\frac{D i}{D t} = \frac{D h}{D t} - \frac{D (p / \rho)}{D t} = \frac{D h}{D t} - \frac{1}{\rho} \frac{D p}{D t} - p \frac{D (1 / \rho)}{D t}$$

substituindo na equação da energia temos

$$\rho \frac{D h}{D t} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] + \frac{D p}{D t} + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

Normalmente escrevemos a equação da energia em termos de temperatura

$$h = h(T, p)$$

$$dh = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + c_p dT$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} + c_p \frac{DT}{Dt}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] + \frac{Dp}{Dt} \left[1 - \rho \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right] + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

trabalhando o termo entre chaves $\left[1 - \rho \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T$

utilizando a equação de Gibbs $T ds = di + p dv$

$$i = h - p/\rho = h - p v \Rightarrow di = dh - v dp - p dv$$

$$\Rightarrow T ds = dh - v dp \Rightarrow dh = T ds + v dp$$

diferenciando com relação a p mantendo a temperatura

constante $\frac{\partial h}{\partial p} \Big)_T = T \frac{\partial s}{\partial p} \Big)_T + v$

das relações de Maxwell: $\frac{\partial s}{\partial p} \Big)_T = \frac{\partial v}{\partial T} \Big)_p \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial p} \Big)_T = \beta^* v$

onde $\beta^* = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} \Big)_p$ coeficiente de expansão

volumétrica

então $\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = T \beta^* v + v$ substituindo na

equação de conservação

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] + \beta^* T \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

Coeficiente de Joule-Thompson $\mu_{JT} = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{v}{c_p} (\beta^* T - 1)$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathbf{div} [k \mathbf{grad} T] + (\rho c_p \mu_{JT} + 1) \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \rho \dot{q} + S_r$$

Em muitas aplicações práticas, a equação da energia pode ser simplificada com as seguintes hipóteses:

- 1) fluido incompressível, $\beta^* = 0$
- 2) propriedades constantes, c_p , k
- 3) A dissipação viscosa só é importante para escoamentos muito viscosos ou a altas velocidades, podendo ser desprezada em muitas aplicações práticas.
- 4) Fluxos de calor radiativos somente são importantes quando os escoamentos envolvem altas temperaturas.
- 5) Adicionalmente na ausência de geração de calor, a equação da energia pode ser escrita como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\nu}{\mathbf{Pr}} \nabla^2 T$$

$$\text{onde } \mathbf{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \quad ; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Neste caso, a temperatura se comporta como um escalar passivo

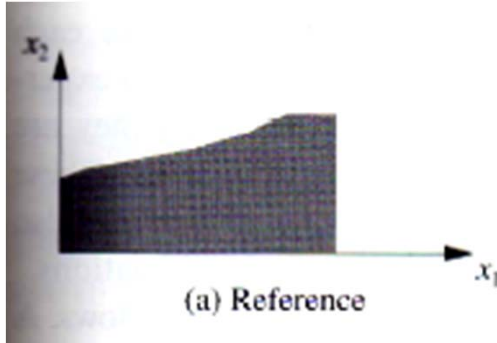
Propriedades de Transformação

- Importantes propriedades dos fluidos podem ser obtidas através do estudo da equação de Navier-Stokes
- As mais importantes são:
 - Similaridade de número de Reynolds
 - Invariância sob rotação e reflexão dos eixos de coordenadas
 - Invariância Galileana
 - Falta de invariância sobre rotação

Propriedades de Transformação

- Considere uma experiência realizada em um laboratório, e considere uma segunda experiência realizada de forma semelhante a primeira, mas com alguma diferença. Por exemplo, a experiência foi realizada em um tempo diferente, em uma localização diferente, com diferente orientação, etc.
- Para cada situação, o campo de velocidade será igual, se a escala adequada e referência apropriada for utilizada?

- Um modelo de turbulência deve respeitar as mesmas propriedades de transformação que a equação de Navier-Stokes.
- Experiência 1:



- Comprimento de escala: \mathcal{L} ,
velocidade de escala: \mathcal{U}

- Variáveis adimensionais:

- independentes $\hat{x} = x/L$ $\hat{t} = t \mathcal{U}/\mathcal{L}$
- dependentes:

$$\hat{U} = U / \mathcal{U} \quad \hat{p} = p / (\rho \mathcal{U}^2) = (P - \rho \Psi) / (\rho \mathcal{U}^2)$$

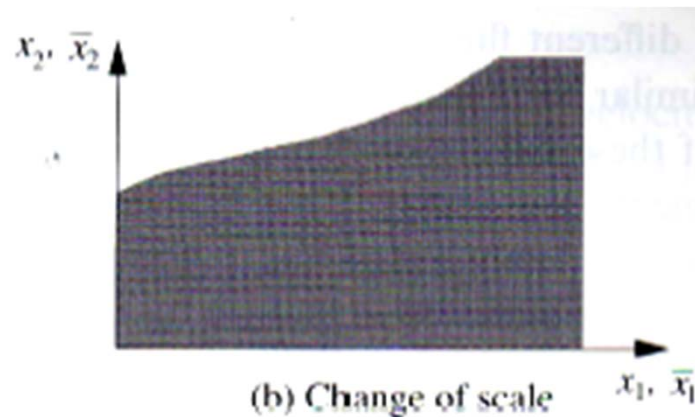
onde a gravidade é escrita em função do potencial gravitacional Ψ $\mathbf{g} = -\nabla \Psi$

$$\text{Continuidade: } \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0 \quad \text{Momentum: } \rho \left(\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \hat{t}} + \hat{U}_i \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) = \frac{1}{\mathbf{Re}} \frac{\partial^2 \hat{U}_j}{\partial \hat{x}_i^2} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i}$$

sendo $\mathbf{Re} = \mathcal{U} \mathcal{L} / \nu$

- *Similaridade de número de Reynolds*: mudança de escala

adimensionalizando o 2º experimento com as propriedades e grandezas deste, a eq. de Navier-Stokes e condições de contorno serão iguais, somente se o número de Reynolds for igual $\Rightarrow \mathbf{Re=Re_b}$



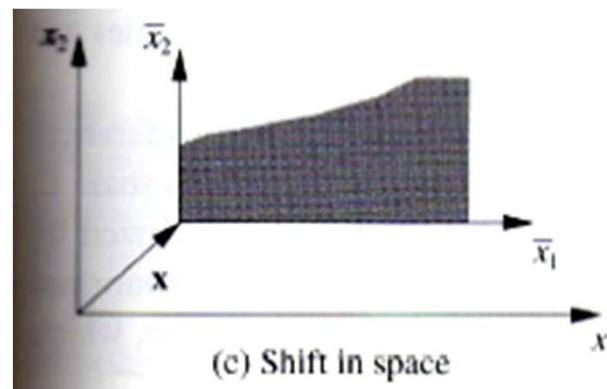
- *Invariância de tempo de espaço:*
experimento deslocado no tempo e espaço

adimensionalizando com

$$\hat{x} = (x - X) / \mathcal{L}$$

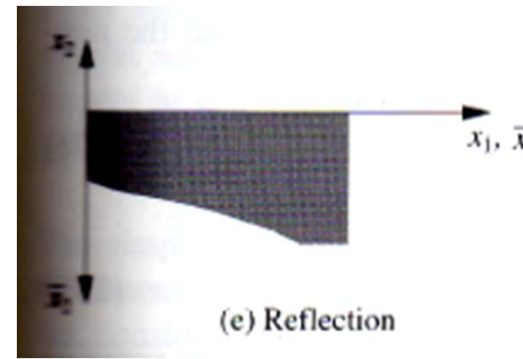
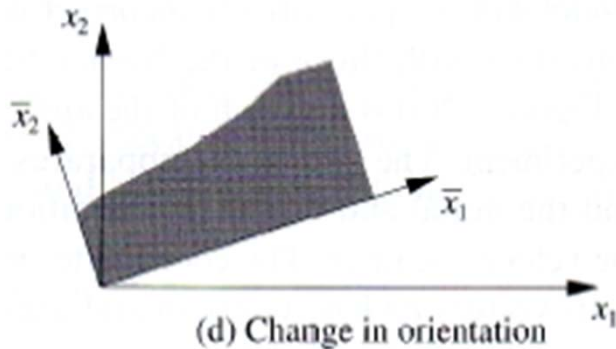
$$\hat{t} = (t - T) u / \mathcal{L}$$

pode-se facilmente mostrar que a eq. de Navier-Stokes transformada é idêntica a original



■ *Invariância de rotação e reflexão:*

experimento realizado com referência com outra orientação



adimensionalizando com

$$\hat{x} = a_{ji} x_j / \mathcal{L}$$

$$\hat{U}_i = a_{ji} U_j$$

onde $a_{ji} = e_i \bullet \bar{e}_j$ é o coseno diretor da transformação, pode-se facilmente mostrar que a eq. de Navier-Stokes transformada é idêntica a original

-
- Nestas transformações, a rotação é fixa, significando que os cosenos diretores não variam com o tempo.
 - A invariância com relação a reflexão indica que a eq. de Navier-Stokes não possui nenhuma tendência (bias) com relação a movimentos no sentido horário ou anti-horário.
 - Um escoamento pode ter dependência no sentido da rotação, por exemplo, com um tornado, mas esta tendência surge devido às condições de contorno e não pelas equações do movimento.

-
- *Reversão de tempo: Análogo a reflexão de coordenadas.*

Adimensionalizando com

$$\hat{t} = -t \mathcal{U} / \mathcal{L}$$

$$\hat{U} = -U / \mathcal{U}$$

as equações são iguais com exceção do termo viscoso, proporcional a \mathbf{Re}^{-1} , que será alterado, indicando que a Eq. de Navier Stokes não é invariante com relação a reversão do tempo.

-
- *Invariância Galileana*: Relacionada com eixos em movimento, com velocidade fixa V

As transformações entre coordenadas são:

$$\bar{t} = t \quad \bar{x} = x - V t$$

$$\bar{U} = U - V$$

A grandeza que for igual nos dois eixos inerciais diferentes é chamada de *invariante Galileana*.

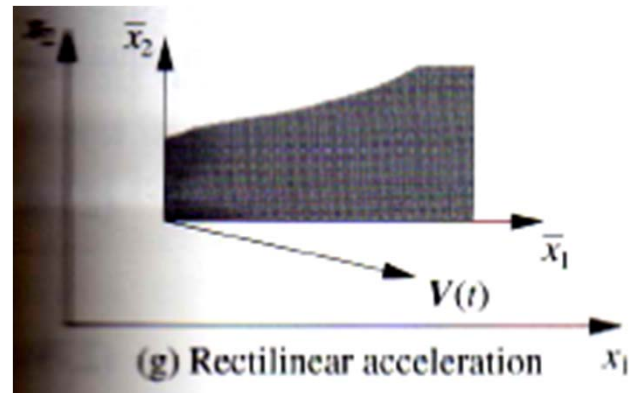
- Com as transformações dadas tem-se

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} = \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} + V \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{D\bar{U}_j}{Dt} = \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{DU_j}{Dt}$$

- gradiente de velocidade e aceleração são variáveis invariantes Galileanas
- velocidade e derivada parcial temporal não são
- A equação de Navier-Stokes é invariante Galileana
- O comportamento do escoamento de um fluido é o mesmo em todos os referenciais inerciais.

- *Invariância Galileana Extentida*: A eq. de Navier-Sokes é invariante com relação a eixos com aceleração retilínea.



- A eq. de Navier-Stokes é

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_i \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_i^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_i} - A_j$$

onde $A_j = dV / dt$ é a aceleração.

Os dois últimos termos podem ser rescritos como

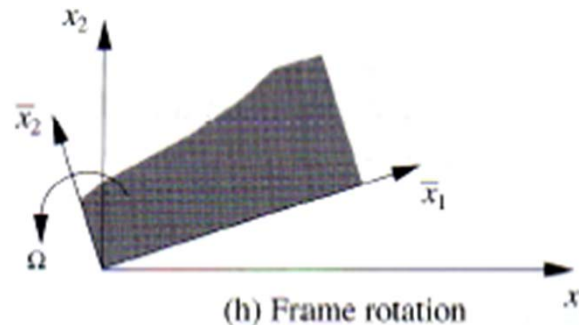
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}_i} + A_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} (p + \rho x_i A_j)$$

mostrando que a aceleração do eixo pode ser incorporado na pressão modificada.

- A eq. de Navier Stokes para fluidos incompressíveis é invariante Galileana extendida, pois a equação não é alterada, se adimensionalizada com

$$\hat{U} = \bar{U} / u \qquad \hat{p} = (p + \rho \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) / (\rho u^2)$$

- *rotação de referencial*: Considere o experimento em um referencial com rotação não-inercial.



- A Eq. de Navier-Stokes é igual a equação do caso anterior, mas com a aceleração $-A_j$ substituída pela força fictícia

$$F_j = -\bar{x} \tilde{\Omega}_{ik} \tilde{\Omega}_{kj} - 2 \bar{U} \tilde{\Omega}_{ij} - \bar{x}_i \frac{d\tilde{\Omega}_{ij}}{dt}$$

- As três contribuições para a força \mathbf{F} representam a força de centrífuga, força de Coriolis e força de aceleração angular.

- A força centrífuga pode ser absorvida na pressão modificada, mas as outras duas não.
- Uma grandeza que independe se o referencial encontra-se em rotação ou não, possui "material-frame indifference" (indiferente ao referencial material)
- A Eq. de Navier-Stokes não possui esta propriedade.
- O efeito da rotação também é evidente na equação da vorticidade.

$$\left(\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) = \nu \frac{\partial^2 \bar{\xi}_i}{\partial \bar{x}_j^2} + \bar{\xi}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_j} - 2\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_j} \tilde{\Omega}_{\ell k} - \varepsilon_{ijk} \frac{d\tilde{\Omega}_{jk}}{dt}$$

cuja eq. depende se o referencial encontra-se em rotação.