Equações de Conservação

Propriedades dos Fluidos

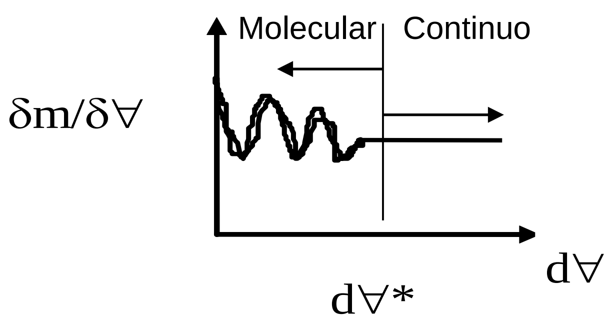
- Matéria é formada por moléculas em movimento, colidindo. As propriedades de matérias estão relacionadas com o comportamento molecular
  - Colisão com as paredes $\rightarrow$ pressão
  - Ocupação do espaço $\rightarrow$ densidade
  - Energia cinética $\rightarrow$ temperatura

- Para entender o comportamento da matéria seria necessário considerar cada molécula, conhecendo a história de cada uma, velocidade, aceleração e modos de iteração. Isto é inviável sem um tratamento estatístico, devido ao elevado número de moléculas.

- Na maioria das aplicações da engenharia, desejamos estudar uma quantidade de volume de fluido contendo um grande número de moléculas

$\rightarrow$ **hipótese do contínuo**: admite-se que os fluidos são meios contínuos, esquecendo-se da sua estrutura molecular.

- Para demonstrar o conceito do contínuo, considere a propriedade densidade:
  - ex: densidade: $\rho(x,y,z,t) = \lim\limits_{d\forall \rightarrow d\forall^*} \delta m/\delta\forall$



- A hipótese do **contínuo** falha quando as dimensões envolvidas forem da ordem do caminho médio livre entre colisões moleculares:
  - Exemplo:
    - Distância média entre colisões de moléculas do ar nas CNTP: 3×10^{-9} m
    - Caminho médio livre λ: 6×10^{-8} m
    - Menor comprimento de escala de um escoamento: $\ell = 10^{-4}$ m
  - Comparação entre escalas:
    - número de Knudsen: $Kn = \lambda / \ell$
    - O conceito do contínuo é válido para $Kn \ll 1$
    - $Kn > 1$ por ex. arraste em satélites. A Teoria cinética dos gases trata desta área.

- Conceito do contínuo está associado com o conceito de campo, i.e., todas as grandezas são definidas no espaço e no tempo: Ex: $V(x,y,z,t)$; $P(x,y,z,t)$; $\rho(x,y,z,t)$; etc.
  - Não importa qual a partícula que está no ponto em um determinado instante de tempo, mas sim em que condições a partícula que passar pelo ponto naquele instante possui.

- O escoamento dos fluidos é determinado a partir do conhecimento da velocidade em cada ponto do escoamento, isto é, a partir do campo de velocidade

- Descrição de campo de variáveis físicas:
  - Método Lagrangiano
  - Método Euleriano

Método Lagrangeano

- As equações de conservação são aplicadas a um sistema arbitrário, o qual pode ser infinitesimal ou finito.
  - A variável física é descrita para um determinada partícula
  - A variável independente é um “rótulo” da partícula, como por exemplo, a coordenada da partícula em um determinado instante de tempo: $\vec{r}_P$ é a posição da partícula P em t = 0
  - $\phi = \phi(\vec{r}_P\ ,t)$ Esta função descreve como a função ϕ da partícula P varia com o tempo
  - Ex: policial seguindo carro

- A velocidade mede como a posição de uma partícula varia com o tempo

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$V_x = u = \left.\frac{d\,x}{d\,t}\right|_{particula}$$

$$\vec{V} = \left.\frac{d\,\vec{r}}{d\,t}\right|_{particula}$$

$$V_y = v = \left.\frac{d\,y}{d\,t}\right|_{particula}$$

$$V_z = w = \left.\frac{d\,z}{d\,t}\right|_{particula}$$

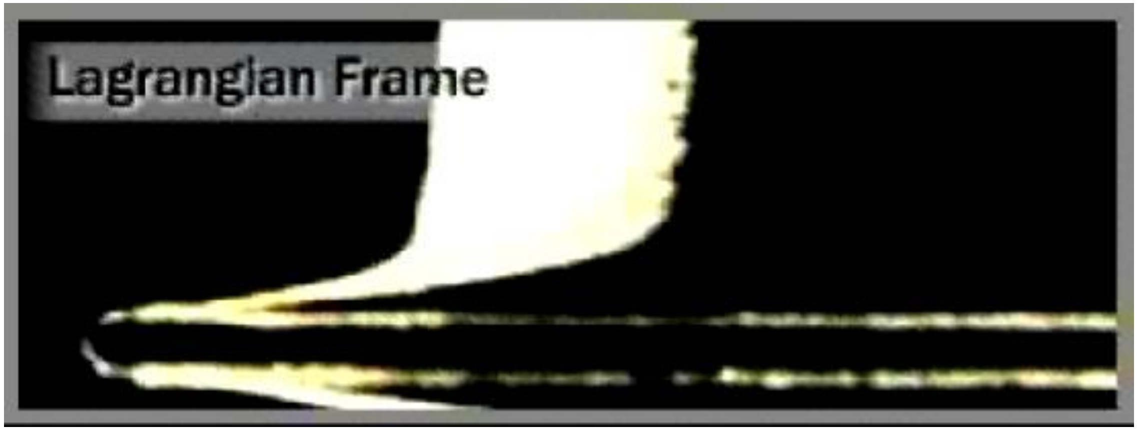
- Aceleração de uma partícula varia com o tempo

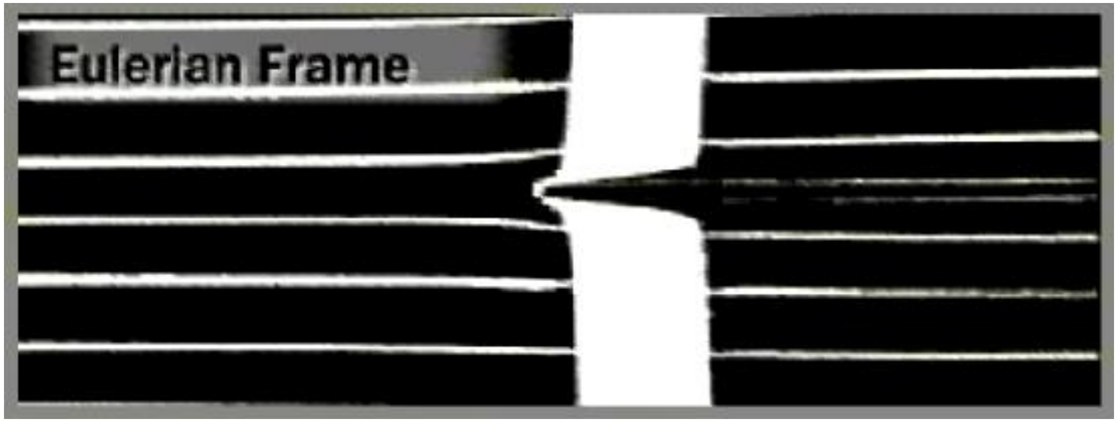
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \left.\frac{d\,\vec{V}}{d\,t}\right|_{particula}$$

Método Euleriano

- As equações de conservação são aplicadas a um volume de controle arbitrário, o qual pode ser infinitesimal ou finito
  - A variável física é descrita em relação a um ponto do espaço
  - Para cada instante *t*, a partícula em $\vec{r}$ é uma partícula diferente
  - $\vec{r}$ é a posição da partícula P em *t*
  - $\phi = \phi(\vec{r}\ , t)$ Esta função descreve a função ϕ na posição da partícula *P* em função do tempo
  - Ex: controlador de tráfego





Vamos utilizar a formulação Euleriana, juntamente com o conceito de campo, i.e., todas as propriedades são definidas em função de sua localização no espaço e no tempo

Fluidos em Movimento

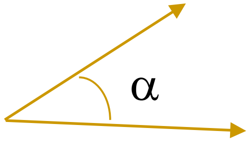
- O escoamento dos fluidos é determinado a partir do conhecimento da velocidade em cada ponto do escoamento, isto é, a partir do campo das diversas grandezas relevantes.
- **Tipos de Campos:**
  - Campo escalar:
    - massa específica: $\rho(\boldsymbol{r},t)$; temperatura: $T(\boldsymbol{r},t)$; pressão $p(\boldsymbol{r},t)$
  - Campo vetorial:
    - velocidade: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$; aceleração: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$; força $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$
  - Campo Tensorial:
    - tensão: $\sigma(\boldsymbol{r},t)$; gradiente de velocidade: $\nabla V(\boldsymbol{r},t)$; taxa de deformação $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$

- **Vetor Velocidade:**

$$\vec{V} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y + w\,\vec{e}_z = u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2 + u_3\,\vec{e}_3 = \sum_i u_i\,\vec{e}_i = u_i\,\vec{e}_i$$

- **Produto escalar entre vetores:**

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \mathbf{cos}\,\alpha$$



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i\,\vec{e}_i \bullet B_j\,\vec{e}_j = A_i\,B_j\,\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = A_i\,B_j\,\delta_{ij} = A_i\,B_i$$

produto escalar entre dois vetores unitários:

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \begin{cases} \delta_{ij} = 0 \;\; se \;\; i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \;\; se \;\; i = j \end{cases}$$

- **Operador gradiente:**

$$\mathbf{grad}\;\phi = \nabla\,\phi = \vec{e}_1 \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_3} = \vec{e}_i \frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_i}$$

Operador Divergente:

$$\mathbf{div}\ \vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bullet \vec{e}_j\ A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

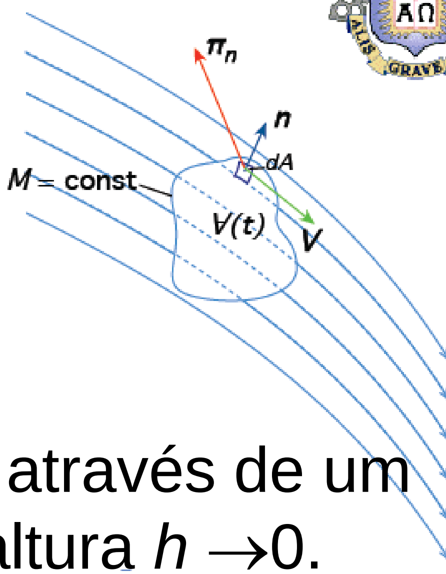
Teorema de divergência de Gauss

$$\int_S \vec{A} \bullet \vec{n}\ dS = \int_{\forall} \mathbf{div}(\vec{A})\ d\forall$$

$$\mathbf{div}\ \vec{A} = \lim_{\forall \to 0} \left[\frac{1}{\forall} \int_S \vec{A} \bullet \vec{n}\ dS \right]$$

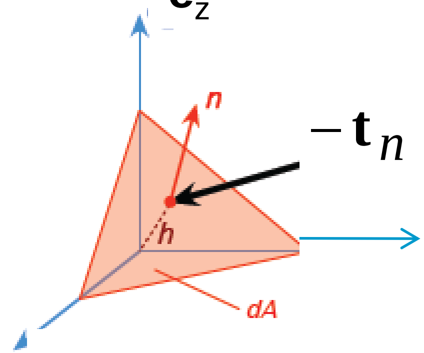
Fluxo líquido por unidade de volume

Vetor tensão



- O vetor tensão $\boldsymbol{t}_n$ é a força de contato por unidade de área que um material dentro de $\forall$(t) faz no material fora de $\forall$(t).
- Hipótese de Cauchy: $\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{t}_n\,(\boldsymbol{n})$
- A dependência de $\boldsymbol{t}_n$ em $\boldsymbol{n}$ pode ser obtida através de um balanço de forças em um tetraedro com a altura $h \rightarrow 0$.

$$\sum F = 0 \Rightarrow -\mathbf{t}_n\, dA - \mathbf{t}_{-x}\, dA(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_x) - \mathbf{t}_{-y}\, dA(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_y) - \mathbf{t}_{-z}\, dA(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_z) = 0$$



- Da 3ª. Lei de Newton

$$\mathbf{t}_{-x} = -\mathbf{t}_x \;\; ; \;\; \mathbf{t}_{-y} = -\mathbf{t}_y \;\; ; \;\; \mathbf{t}_{-z} = -\mathbf{t}_z$$

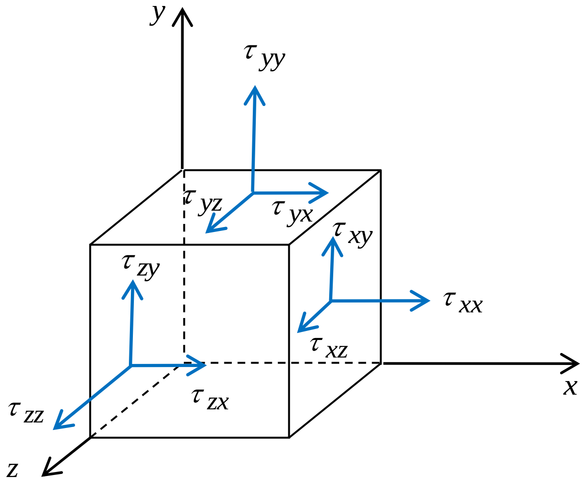
- então

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_x) + \mathbf{t}_y(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_y) + \mathbf{t}_z(\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}_z) = \mathbf{n}\bullet\left[\mathbf{t}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{t}_y\mathbf{e}_y + \mathbf{t}_z\mathbf{e}_z\right] = \mathbf{n}\bullet\boldsymbol{\sigma}$$

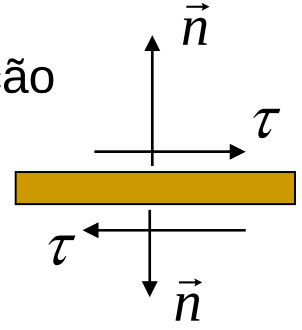
Tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\ \vec{e}_i\ \vec{e}_j$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



convenção



Descrição Euleriana

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{particula} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de variação com o} \\ \text{tempo (posição fixa)}}} + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}u + \frac{\partial\phi}{\partial y}v + \frac{\partial\phi}{\partial z}w}_{\substack{\text{taxa de variação com o} \\ \text{tempo devido ao mov. da} \\ \text{partícula (variação convectiva)}}}$$

$$\boxed{\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla\phi}$$

- <u>Derivada Material ou Total</u> de uma grandeza ϕ (pressão, temperatura, velocidade, etc) descreve como a grandeza varia segundo o movimento (= como ϕ varia com o tempo para uma determinada partícula

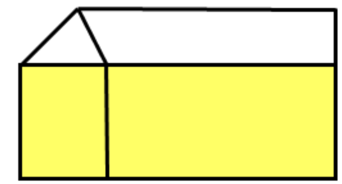
Derivada Material

Derivada Material

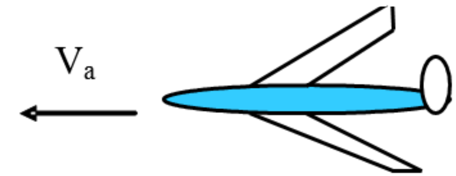
$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla \phi$$

Deseja-se medir variação da pressão com o tempo, em três situações diferentes:

1 - Estação Metereológica p=p(t) $\Rightarrow$ $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$

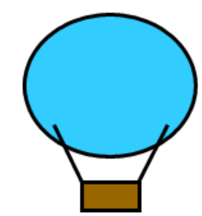


2 - Avião com velocidade $\vec{V}_a = u_a\,\vec{i} + v_a\,\vec{j} + w_a\,\vec{k}$ $\Rightarrow$



$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}u_a + \frac{\partial p}{\partial y}v_a + \frac{\partial p}{\partial z}w_a$$

3 - Balão sem propulsão, se deslocando com a velocidade do ar, do fluido,
com velocidade $\vec{V} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$



$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}u + \frac{\partial p}{\partial y}v + \frac{\partial p}{\partial z}w = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla p = \frac{Dp}{Dt}$$

Aceleração:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad + \quad \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, \vec{V}}$$

aceleração local temporal **aceleração convectiva**

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

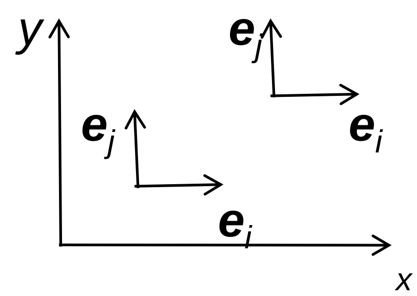
Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad , \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$



16

Aceleração:

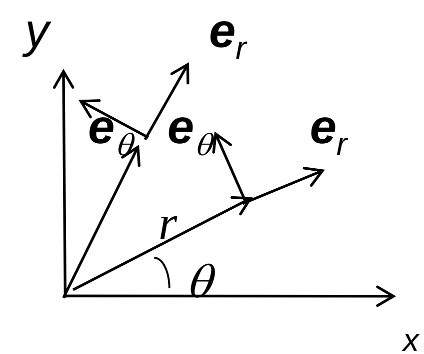
$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\,\vec{V}$$

aceleração local temporal — aceleração convectiva

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$$



centrífuga

$$a_r = \frac{Du_r}{Dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$$

coriolis

$$a_\theta = \frac{Du_\theta}{Dt} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{Du_z}{Dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Variação da massa com o tempo por unidade de volume

Fluxo líquido de massa por unidade de volume

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$$

derivada material, ou total ou substantiva

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \rho$$

variação local temporal

variação convectiva

Equação de Conservação de Massa ou Continuidade

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\ (\rho\,\vec{V}) = 0}$$

ou

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathbf{div}\ (\,\vec{V}\,) = 0}$$

- Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w)\right] = 0$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{r\ \partial r}(r\rho\ u_r) + \frac{\partial}{r\ \partial \theta}(\rho\ u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\ u_z)\right] = 0$$

Casos Particulares

1. Regime Permanente: $\mathbf{div}\ (\rho\,\vec{V}) = 0$

2. Incompressível: $\mathbf{div}\ (\,\vec{V}\,) = 0$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2a Lei de Newton)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum d\forall \, \vec{f}_{ext} = \rho \, d\forall \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_S + \vec{f}_c = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

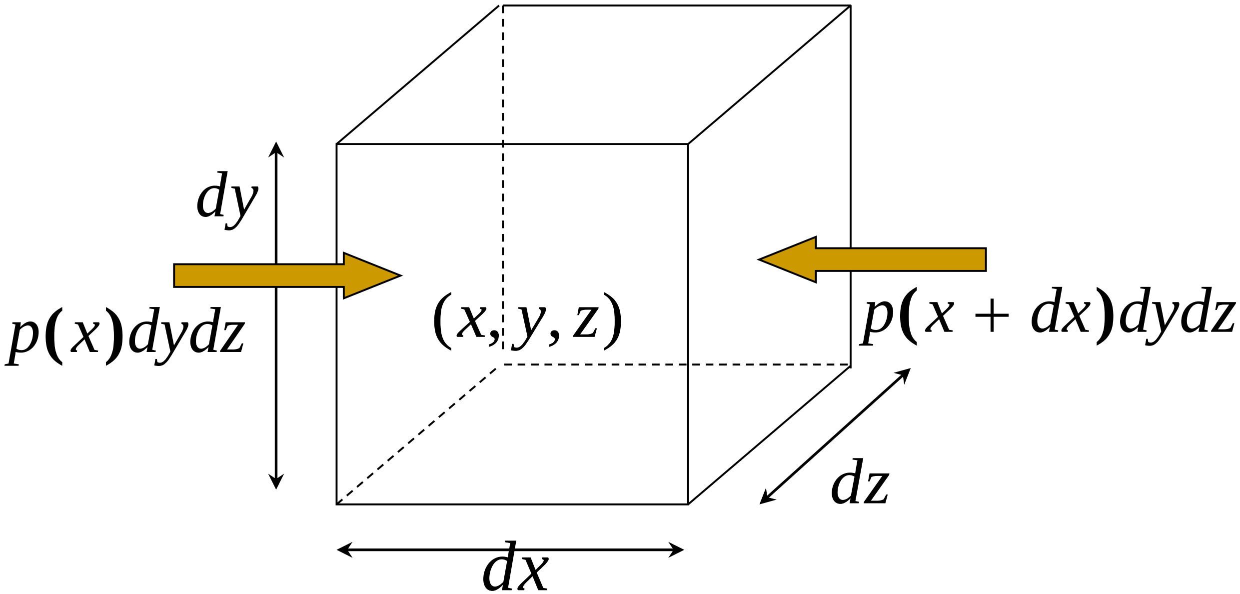
aceleração: $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \vec{V}$

força de corpo: $\vec{f}_C$

força volumétrica: ex: força gravitacional $\boxed{\vec{f}_g = \rho \, \vec{g}}$

força de superfície: $\vec{f}_S = \vec{f}_p + \vec{f}_\mu$

$\vec{f}_p$ - força de pressão: força normal compressiva



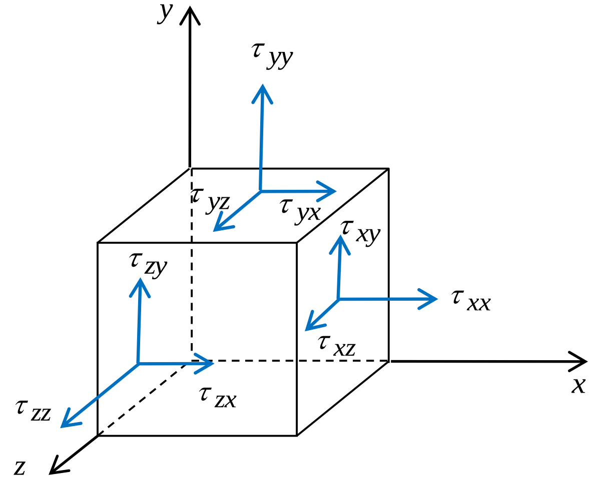
$$dF_{p,x} = p\, dy\, dz - (p\, dy\, dz + \partial p/\partial x\, dx\, dy\, dz) = -\partial p/\partial x\, d\forall$$

$\Rightarrow f_{p,x} = -\partial p/\partial x$ logo $f_{p,y} = -\partial p/\partial y$ e $f_{p,z} = -\partial p/\partial z$

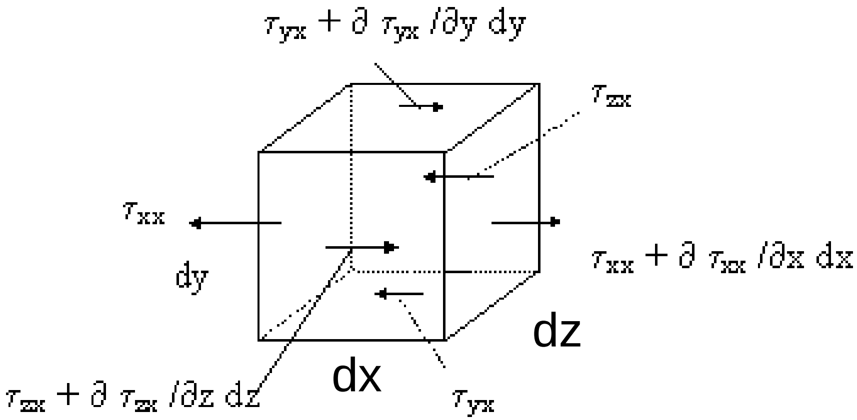
$$\vec{f}_p = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_p = -\vec{\nabla} p}$$

$\vec{f}_\mu$ **força viscosa**: força definida por um tensor, em cada face possui 3 componentes, dois tangenciais e um normal

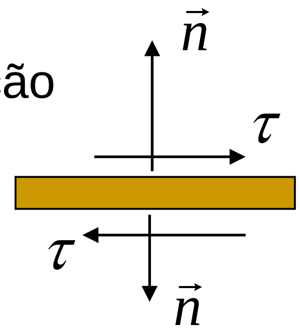
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



- Força de superfície viscosa resultante na direção x



convenção



$$F_{\mu,x} = -\tau_{xx}\,\Delta y\Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right)\Delta y\Delta z \;-\tau_{yx}\,\Delta x\Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\Delta x\Delta z \;-\tau_{zx}\,\Delta x\Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\Delta x\Delta y$$

$$F_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \quad \Rightarrow \quad f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

- Procedendo de forma análoga para as outras direções

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_\mu = \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}}$$

$$f_{\mu,z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\vec{f}_\mu = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\bar{f}_\mu = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Pode-se demonstrar através da equação de conservação de quantidade de movimento angular que o tensor viscoso é simétrico

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

Na forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,\vec{g} - \nabla p + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}$$

Na forma indicial

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho\, g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$$

Equação diferencial de quantidade de movimento

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}$$

coordenadas cartesianas

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

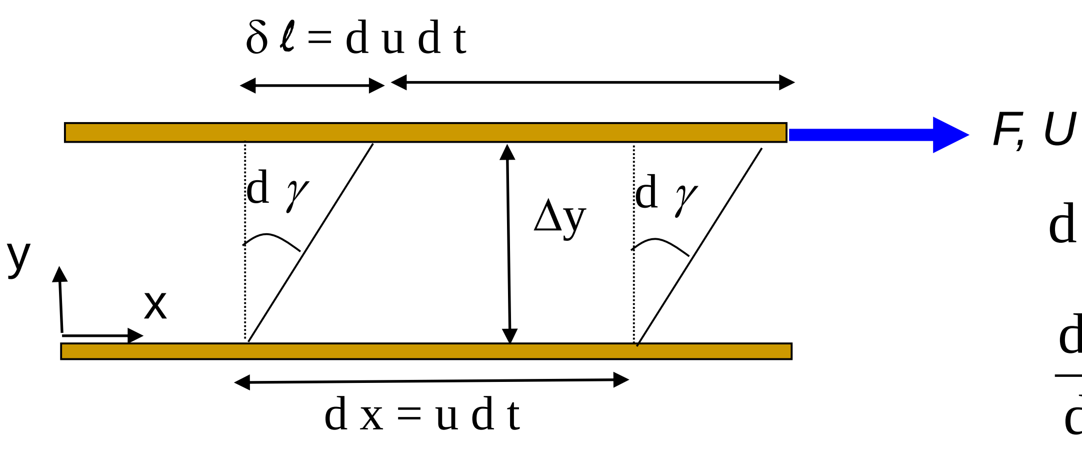
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Equações Constitutivas

Descrevem o comportamento do material ⇒ qual a resposta desta material (taxa deformação) para um determinado esforço

Fluidos Newtonianos: tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação

Considere o escoamento entre 2 placas



Taxa de deformação

$$d\gamma \cong \tan(d\gamma) = \frac{\sin(d\gamma)}{\cos(d\gamma)} = \frac{du\,dt}{dy}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy}$$

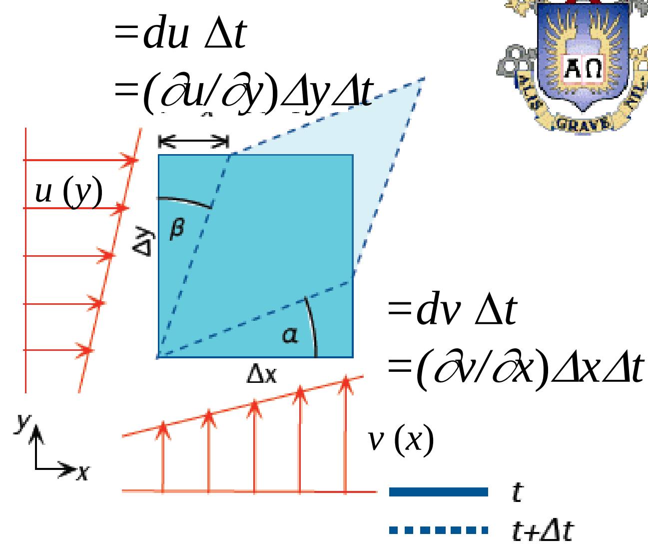
Lei da viscosidade de Newton:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A_y} = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{U}{\Delta y}$$

μ = viscosidade absoluta (propriedade do fluido): dimensão: M/Lt (Pa s)

υ = viscosidade cinemática: μ / ρ

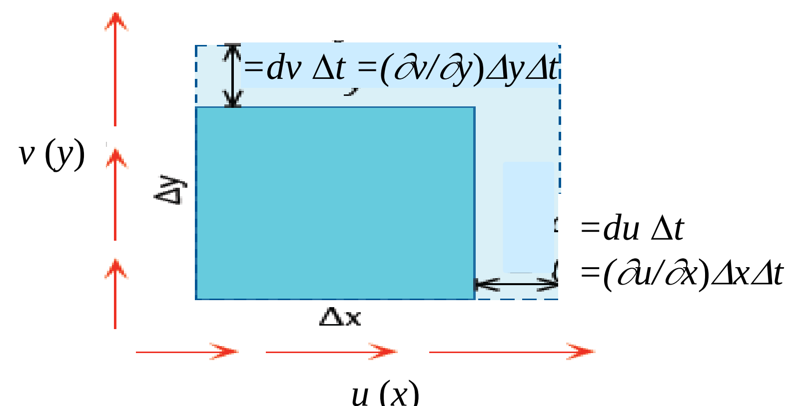
Taxa de deformação angular:



$$\Delta\gamma_{yx} = \alpha + \beta \approx \tan\alpha + \tan\beta = \frac{dv\ \Delta t}{\Delta x} + \frac{du\ \Delta t}{\Delta y}$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma_{yx}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\, D_{yx}$$

Taxa de deformação linear:

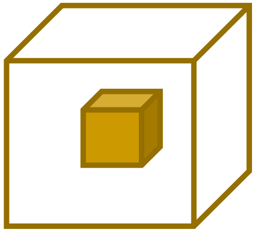


$$\Delta\gamma_{xx} = \frac{du\ \Delta t}{\Delta x}$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma_{xx}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} = D_{xx}$$

Taxa de deformação volumétrica:

$$\dot{\forall} = \dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} = \dot{\gamma}_{zz} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla \bullet \vec{V}$$



Em notação vetorial, a taxa de deformação de um elemento de fluido, pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = [\textbf{grad}\ \vec{V} + (\textbf{grad}\ \vec{V})^T] - \frac{2}{3}\ \textbf{div}\ \vec{V}\ \underline{\underline{I}}$$

$$\textbf{grad}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (u \quad v \quad w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(\textbf{grad}\,\vec{V})^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{I}} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equação Constitutiva para fluidos Newtonianos $\underline{\underline{\tau}} = \mu \, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad , \quad \tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad , \quad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{f}_\mu = \operatorname{div}\underline{\underline{\tau}} = \operatorname{div}\mu\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \operatorname{div}\left\{\mu\ \mathbf{[}\operatorname{grad}\vec{V} + \mathbf{(}\operatorname{grad}\vec{V}\mathbf{)}^T\,\mathbf{]} - \frac{2}{3}\mu\ \operatorname{div}\vec{V}\,\underline{\underline{I}}\right\}}$$

Equação de Navier-Stokes

$$\rho \; \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \; \vec{g} - \mathbf{grad} \; p \; +$$

$$+ \; \mathrm{div}\left\{ \mu \; [\mathrm{grad}\,\vec{V} + (\mathrm{grad}\,\vec{V})^T] - \frac{2}{3}\mu \; \mathrm{div}\,\vec{V}\,\underline{\underline{I}} \right\}$$

Na forma indicial

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3}\, \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k}\, \delta_{ij}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) &= \rho\, g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3}\, \mu \frac{\partial V_k}{\partial x_k}\, \delta_{ij} \right\} \end{aligned}}$$

Equação de Navier-Stokes: **Equação de conservação de quantidade de movimento linear para fluido Newtonianos (coordenadas cartesianas)**

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Casos Particulares:

- **Equação de Euler (fluido perfeito, não viscoso)**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad}\, p$$

Pode-se demonstrar que se integrarmos a equação de Euler ao longo de uma linha de corrente obtemos a equação de Bernoulli

- **Equação da Hidrostática:** $\rho \vec{g} = \mathbf{grad}\ p$

Casos Particulares: Fluido Newtoniano

•**com viscosidade constante**

- A viscosidade da maioria dos gases é aproximadamente constante

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right\} + \underbrace{\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right\}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right\}} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right\}$$

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right\} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right\}$$

$$\boxed{\vec{f}_\mu = \mu\,\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{V}\,\underline{\underline{I}}}$$

$$\boxed{\rho\,\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,\vec{g} - \nabla\,p + \mu\,\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\vec{V}\,\underline{\underline{I}}}$$

Casos Particulares: **Fluido Newtoniano**

- **com viscosidade e massa específica constantes**
  - A maioria dos líquidos pode ser considerada como fluido incompressível (maioria dos líquidos) ⇒ $\nabla \bullet \vec{V} = 0$

$$f_{\mu_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\}$$

$$\boxed{\vec{f}_\mu = \mu \, \nabla^2 \vec{V}}$$

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \, \vec{g} - \nabla \, p + \mu \, \nabla^2 \vec{V}}$$

Navier-Stokes (propriedades constantes)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

coordenadas cartesianas

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Potencial Gravitacional

- Considere Ψ como o potencial gravitacional, isto é, energia por unidade de massa associada ao campo gravitacional. Então, a força de corpo por unidade de massa é

$$\vec{g} = -\nabla \Psi$$

- Para um campo gravitacional constante, o potencial é $\Psi = g\,z$.

- A equação de quantidade de movimento linear pode ser escrita como

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_j\,\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\,\rho\;\;\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\, p}{\partial\, x_i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\, x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\, V_i}{\partial\;\, x_j}+\frac{\partial\, V_j}{\partial\;\, x_i}\right)-\frac{2}{3}\,\mu\,\frac{\partial\, V_k}{\partial\;\, x_k}\,\delta_{ij}\right]$$

- Considerando agora, um fluido incompressível ($\nabla\bullet\vec{V}=0$), e definindo a pressão modificada P como $P=p+\rho\,\psi$

  a equação simplifica para

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_j\,\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\,\frac{\partial\, P}{\partial\, x_i}+\frac{\partial}{\partial\, x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\, V_i}{\partial\;\, x_j}+\frac{\partial\, V_j}{\partial\;\, x_i}\right)\right]$$

- adicionalmente, considerando viscosidade constante, temos

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_j\,\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\,\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\,\frac{\partial^2\,V_i}{\partial\,x_j^2}$$

ou

$$\frac{D\vec{V}}{D\,t}=-\frac{1}{\rho}\nabla\,P+\upsilon\,\nabla^2\vec{V}$$

onde $\upsilon=\mu/\rho$ é a viscosidade cinemática.

Equação de Poisson da Pressão

Aplicando o divergente na equação de Navier-Stokes, temos

$$\nabla \bullet \left(\frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = -\nabla \bullet \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \upsilon \nabla \bullet \left(\nabla^2 \vec{V} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} e_k \bullet \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) e_i = -\frac{\partial}{\partial x_k} e_k \bullet \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} e_i + \frac{\partial}{\partial x_k} e_k \bullet \upsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} e_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \upsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)-\upsilon\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}-\frac{\partial\ u_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Definindo $\Delta=\nabla\bullet\vec{V}$

$$\left[\frac{D}{Dt}-\upsilon\ \nabla^2\right]\Delta=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}-\left(\frac{\partial\ u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Logo, como para um escoamento de fluido incompressível $\Rightarrow \boldsymbol{\Delta = 0}$

$$\nabla^2 P=-\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

A equação de Poisson é uma condição necessária e suficiente para que um escoamento incompressível permaneça incompressível

- Para obter a condição de contorno para a equação de Poisson da pressão, pode-se aplicar a equação de Navier Stokes a uma superfície sólida estacionária , logo,

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \mu \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2}$$

- onde n é a coordenada normal à parede e u_n é o componente de velocidade normal à parede.

- Dada a condição de Neumann na forma acima, o campo de pressão fica determinado (a menos de uma constante) pelo campo de velocidade, independente da história do escoamento.

Equação de conservação de escalares passivos

$$\frac{D\phi}{Dt} = \Gamma \nabla^2 \phi$$

- onde Γ é a difusividade e é constante.

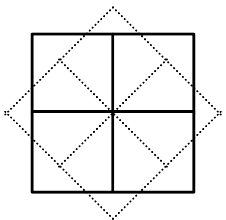
- O escalar Φ é conservado, pois não há fontes ou sorvedouros.
- Uma propriedade importante das variáveis conservadas é que as mesmas são limitadas pelos valores iniciais e de fronteira.

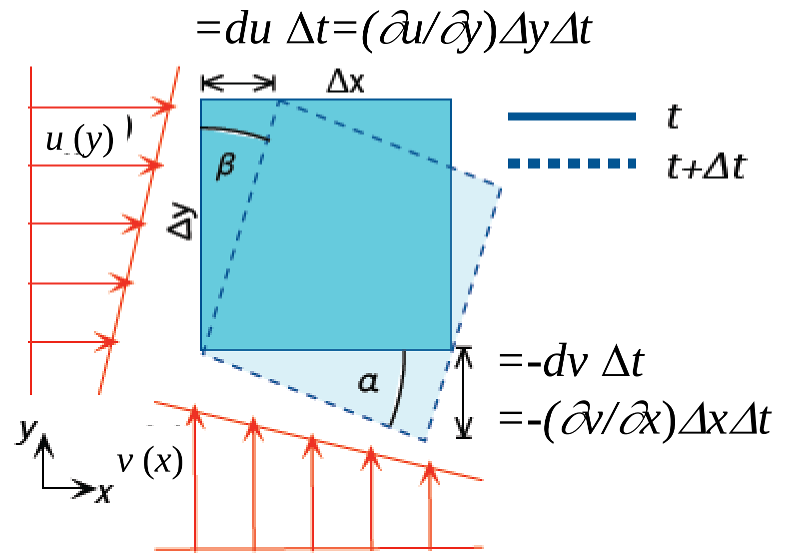
$$\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$$

Rotação:

A rotação $\vec{\omega}$ de uma partícula de fluido é definida como a velocidade angular média de quaisquer duas linhas mutuamente perpendiculares, que se cruzam no centro da partícula..

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$





$$\Delta\theta_{yx} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx \frac{1}{2}(\mathbf{tan}\,\alpha + \mathbf{tan}\,\beta) = \frac{1}{2}\left(-\frac{dv\,\Delta t}{\Delta x} + \frac{du\,\Delta t}{\Delta y}\right)$$

$$\dot{\theta}_{yx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta_{yx}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\omega_z$$

$$\text{logo} \quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \text{e} \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \mathbf{det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \quad , \quad \text{rotacional } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

vorticidade: $\vec{\xi} = 2\,\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$

Equação da Vorticidade

- Uma característica essencial do escoamento turbulento é que estes devem ser rotacionais, isto é a vorticidade é não nula. A vorticidade é definida pelo rotacional do vetor velocidade

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V}$$

- sendo igual a duas vezes a rotação do elemento de fluido.

- Em notação indicial $$\xi_k e_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) \times \left(V_j e_j \right) = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} e_k$$

- onde $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$ sendo $$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & se \quad (i, j, k) \quad \text{são cíclicos} \\ -1 & se \quad (i, j, k) \quad \text{são anti} - \text{cíclicos} \\ 0 & se \quad (i, j, k) \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

símbolo de permutação (símbolo Levi-Civita)

- A equação para a vorticidade pode ser derivada, aplicando o rotacional na equação de Navier-Stokes

$$\nabla \times \left(\frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \upsilon \nabla \times \left(\nabla^2 \vec{V} \right)$$

- resultando em $$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = \upsilon \nabla^2 \vec{\xi} + \vec{\xi} \bullet \nabla \vec{V}$$
- A equação para a evolução de um elemento de linha material infinitesimal é $$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \bullet \nabla \vec{V}$$
- Comparando as duas últimas equações, observa-se que para um escoamento não viscoso, o vetor vorticidade se comporta da mesma forma que um elemento de linha material infinitesimal (teorema de Helmholtz)

Teorema de Helmholtz

(fluido não viscoso, barotrópico ($\rho = \rho(P)$), força de corpo conservativa (não produz torque))

1 - *A intensidade de um filamento de vórtice é constante ao longo de seu comprimento*

2 - *Um filamento de vórtice não pode terminar em um fluido, deve extender até a fronteira do fluido ou formar um caminho fechado*

3 - *A ausência de forces externas rotacionais, um fluido inicialmente irrotacional, permanece irrotacional*

- Se a taxa de deformação produzida pelo gradiente de velocidade atua para esticar um elemento de linha material alinhada com $\vec{\xi}$, então a magnitude de $\vec{\xi}$ cresce de acordo. Este é o fenômeno chamado de *vortex stretching*, que é um processo importante nos escoamentos turbulentos e o termo $\vec{\xi} \bullet \nabla \vec{V}$ é referido ao termo de *vortex stretching*.

- Para escoamentos bi-dimensionais, o termo de *vortex stretching* se anula, e o componente não nulo da vorticidade se comporta como um escalar conservado. Devido a ausência do *vortex stretching*, a turbulência bi-dimensional é qualitativamente diferente da turbulência tri-dimensional.

- **Enstrofia:** vorticidade ao quadrado $\Rightarrow$ $\xi^2 = \vec{\xi} \bullet \vec{\xi}$

Taxa de Deformação e Rotação

- O tensor gradiente de velocidade pode ser decomposto em uma parcela isotrópica, uma simétrica deviatórica s_{ij} e uma anti-simétrica deviatórica Ω_{ij}

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \Delta \, \delta_{ij} + s_{ij} + \Omega_{ij}$$

- onde $\Delta = \nabla \bullet \vec{V}$ é a dilatação, sendo nula para escoamento de fluido incompressível

- Tensor simétrico tem os mesmos componentes em qualquer sistema de coordenadas

- Tensor deviatórico possui traço nulo (τ_{ii} = traço $\boldsymbol{\tau} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$)

- A parcela deviatórica simétrica é $s_{ij} = \frac{1}{3} \Delta \, \delta_{ij} + S_{ij}$

- A parte simétrica é a taxa de deformação $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

- A parte anti-simétrica é o tensor taxa de rotação $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

- Pode-se mostrar que a lei de Newton/Stokes para a tensão viscosa para fluido incompressível pode ser rescrita como

$$\tau_{ij} = 2\mu\, S_{ij}$$

- mostrando que a tensão viscosa depende linearmente da taxa de deformação, sendo independente da rotação.

- A vorticidade é relacionada com a taxa de rotação por

$$\xi_i = -\varepsilon_{ijk}\,\Omega_{jk} \;; \qquad \Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\xi_k$$

ambos contém a mesma informação.

Equação de Conservação de Energia

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(i + \frac{V^2}{2}\right) = -\,\mathbf{div}\,\vec{q} + w_s + w_c + \rho\,\dot{q} + S_r$$

onde

- $i \Rightarrow$ energia interna, $h = i + p/\rho$ onde h é a entalpia
- $V \Rightarrow$ módulo do vetor velocidade, $V^2 = u_i^2$
- $V^2 / 2$ é a energia cinética
- $\vec{q} \Rightarrow$ fluxo de calor por condução. Lei de Fourier $\Rightarrow$ $\vec{q} = -\,k\ \mathbf{grad}\ \mathrm{T}$
- $\dot{q} \Rightarrow$ geração de calor por unidade de volume
- $S_r \Rightarrow$ fluxo líquido de calor devido a radiação por unidade de volume
- $w_s \Rightarrow$ trabalho devido as forças de superfície $\Rightarrow$ $w_s = \mathbf{div}\,[\,\vec{V} \bullet \underline{\underline{T}})]$
- $\underline{\underline{T}} \Rightarrow$ tensor da tensões (tensão normal de pressão e tensão viscosa)
- $\underline{\underline{T}} = (-\,p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}\,)$
- $\underline{\underline{\tau}} \Rightarrow$ tensão viscosa $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\tau}} = \mu\ \mathbf{grad}\,\vec{V} + \mu(\ \mathbf{grad}\,\vec{V})^T - \frac{2}{3}\,\mu\ \mathbf{div}\ \vec{V}\ \underline{\underline{I}}$
- $w_c \Rightarrow$ trabalho devido as forças de corpo (gravitacional) $\Rightarrow w_c = \vec{V} \bullet \rho\ \vec{g}$

Vamos desenvolver alguns termos da equação acima

- termo de energia cinética $$\rho \frac{D}{D\,t}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \rho\, \vec{V} \bullet \frac{D\,\vec{V}}{D\,t}$$

usando a equação de quantidade de movimento

$$\rho \frac{D}{D\,t}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \vec{V} \bullet \left[\rho\ \vec{g} + \mathbf{div}(-p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}})\right]$$

- Desenvolvendo o trabalho de superfície

$$w_S = \mathbf{div}\ [\ \vec{V} \bullet \ \underline{\underline{T}})] = \vec{V} \bullet \mathbf{div}\ \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}\ \mathbf{:}\ \mathbf{grad}\ \vec{V} \quad \Rightarrow \quad w_S = \vec{V} \bullet \mathbf{div}\ \underline{\underline{T}} + \boldsymbol{\Psi}$$

$$w_S = \vec{V} \bullet \mathbf{div}\left(-\ p\ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}\ \right) + \boldsymbol{\Psi} \qquad \boldsymbol{\Psi} = \underline{\underline{T}}\ \mathbf{:}\ \mathbf{grad}\ \vec{V}$$

Substituindo e rearrumando a equação da energia

$$\rho \frac{D\,i}{D\,t} + \vec{V} \bullet \left[\rho\,\vec{g} + \mathbf{div}(-p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}})\right] = \mathbf{div}\left[k\ \mathbf{grad}\,\mathrm{T}\right] +$$

$$+ \quad \vec{\mathrm{V}} \bullet \mathbf{div}(-p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}) + \boldsymbol{\Psi} + \vec{V} \bullet \rho\,\vec{g} + \rho\,\dot{q} + S_r$$

cancelando os termos iguais

$$\rho\ \frac{D\ i}{D\ t} = \mathbf{div}\left[k\ \ \mathbf{grad}\,T\right] + \quad \boldsymbol{\Psi} + \rho\ \dot{q} + S_r$$

trabalhando o termo $\Psi = \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad}\ \vec{V}$

O tensor $\mathbf{grad}\ \vec{V}$ pode se decomposto em uma parte simétrica e uma outra anti-simétrica

$$\mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}} + \left(\mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}}\right)^T\right]}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}} - \left(\mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}}\right)^T\right]}_{\underline{\underline{\Omega}}}$$

tensor deformação

tensor rotação

$$\Psi = \underline{\underline{T}} : \mathbf{grad}\ \vec{\mathrm{V}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} + \underbrace{\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\Omega}}}_{zero}$$

$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\Omega}} = 0$ pois $\underline{\underline{T}}$ é simétrico e $\underline{\underline{\Omega}}$ é anti-simétrico

$$\Psi = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} = -p\ \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} = -p\ \mathbf{div}\ \vec{\mathrm{V}} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}}$$

usando a conservação da massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ \mathbf{div}\ \vec{V} = 0 \Rightarrow \mathbf{div}\ \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

finalmente

$$\boldsymbol{\Psi} = -\, \mathrm{p}\ \rho\ \frac{\mathrm{D}(1/\rho)}{\mathrm{D\,t}} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}}$$

$$-\ p\ \rho\ \frac{D(1/\rho)}{D\,t} \Rightarrow$$ trabalho de compressão por unidade de tempo por unidade de volume (trabalho reversível do tipo *p dv*)

$$\boldsymbol{\Phi} = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} \Rightarrow$$ trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa (i.e., conversão de energia mecânica para energia interna)

$$\rho \, \frac{D\, i}{D\, t} = \mathbf{div}\left[k \;\; \mathbf{grad}\, T\right] - \; p \;\; \rho \; \frac{D(1/\rho)}{D\, t} + \mathbf{\Phi} + \rho \;\; \dot{q} + S_r$$

ou

$$\boxed{\rho \, \frac{D\, i}{D\, t} = \mathbf{div}\left[k \;\; \mathbf{grad}\, T\right] - \; p \;\; \mathbf{div} \;\; \vec{V} + \mathbf{\Phi} + \rho \;\; \dot{q} + S_r}$$

Trabalhando agora o termo referente a taxa de variação da energia interna por unidade de volume

$h = i + p/\rho$

$$\frac{D\,i}{D\,t} = \frac{D\,h}{D\,t} - \frac{D\left(p\,/\,\rho\right)}{D\,t} = \frac{D\,h}{D\,t} - \frac{1}{\rho}\,\frac{D\,p}{D\,t} - p\,\frac{D\left(1\,/\,\rho\right)}{D\,t}$$

substituindo na equação da energia temos

$$\boxed{\rho\,\frac{D\,h}{D\,t} = \mathbf{div}\left[k\;\mathbf{grad}\,T\right] + \frac{D\,p}{D\,t} + \mathbf{\Phi} + \rho\,\dot{q} + S_r}$$

Normalmente escrevemos a equação da energia em termos de temperatura

$$h = h(T, p)$$

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T d\,p + \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p d\,T = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T d\,p + c_p\,d\,T$$

$$\frac{D\,h}{D\,t} = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \frac{D\,p}{D\,t} + c_p\,\frac{D\,T}{D\,t}$$

$$\rho\,c_p\,\frac{D\,T}{D\,t} = \mathbf{div}\left[k\ \mathbf{grad}\,T\right] + \frac{D\,p}{D\,t}\left[1 - \rho\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T\right] + \mathbf{\Phi} + \rho\,\dot{q} + S_r$$

trabalhando o termo entre chaves $\left[1 - \rho \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \right]$

utilizando a equação de Gibbs $T\,ds = d\,i + p\,d\,v$

$i = h - p/\rho = h - p\,v \;\Rightarrow\; d\,i = dh - v\,dp - pdv$

$\Rightarrow \quad T\,ds = d\,h - v\,d\,p \qquad \Rightarrow \; d\,h = T\,ds + v\,d\,p$

diferenciando com relação a p mantendo a temperatura

constante $\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = T \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T + v$

das relações de Maxwell: $\left. \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \beta^* \, v$

onde $\beta^* = \frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ coeficiente de expansão

volumétrica

então $\left.\dfrac{\partial h}{\partial p}\right)_T = T \beta^* v + v$ substituindo na

equação de conservação

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathbf{div}\left[k\ \mathbf{grad}\, T\right] + \beta^* T \frac{Dp}{Dt} + \mathbf{\Phi} + \rho \dot{q} + S_r}$$

Coeficiente de Joule-Thompson $\mu_{JT} = \left.\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \dfrac{v}{c_p}\left(\beta^* T - 1\right)$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathbf{div}[k\, \mathbf{grad}\, T] + \left(\rho c_p \mu_{JT} + 1\right)\frac{Dp}{Dt} + \mathbf{\Phi} + \rho \dot{q} + S_r$$

Em muitas aplicações práticas, a equação da energia pode ser simplificada com as seguintes hipóteses:

1) fluido incompressível, $\beta^* = 0$

2) propriedades constantes, c_p , k

3) A dissipação viscosa só é importante para escoamentos muito viscosos ou a altas velocidades, podendo ser desprezada em muitas aplicações práticas.

4) Fluxos de calor radiativos somente são importantes quando os escoamentos envolvem altas temperaturas.

5) Adicionalmente na ausência de geração de calor, a equação da energia pode ser escrita como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\upsilon}{\mathbf{Pr}} \nabla^2 T$$

onde $\mathbf{Pr} = \dfrac{\mu \; c_p}{k}$; $\upsilon = \dfrac{\mu}{\rho}$

Neste caso, a temperatura se comporta como um escalar passivo