
Estrutura da Turbulência em Escoamentos Junto à Superfícies Sólidas

- Os níveis de tensões de Reynolds em escoamentos turbulentos junto à superfície sólida são muito menores do que aqueles encontrados em escoamentos livres, devido à ação inibidora da parede.
- Por outro lado, devido à inibição do movimento do fluido na direção normal à parede, a anisotropia das flutuações de velocidade junto à parede é bem maior do que no caso de escoamento livre.

- A figura abaixo, ilustra dados experimentais para a distribuição de tensões de Reynolds ($\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$; $\overline{u'v'}$) e velocidade média (\overline{u}) junto a uma parede sólida, onde U_∞ é a velocidade do escoamento longe da parede. Como pode ser observado, as maiores intensidades das flutuações de velocidade ocorrem na região adjacente à parede, onde os gradientes de velocidades são muito elevados e, como conseqüência a geração da turbulência P_k também é elevada

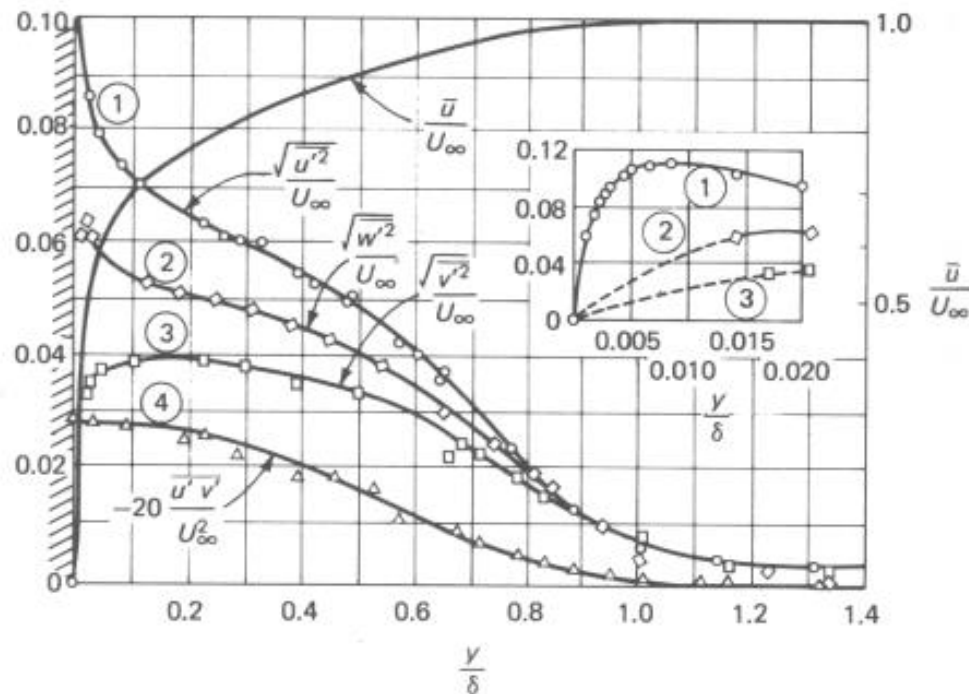
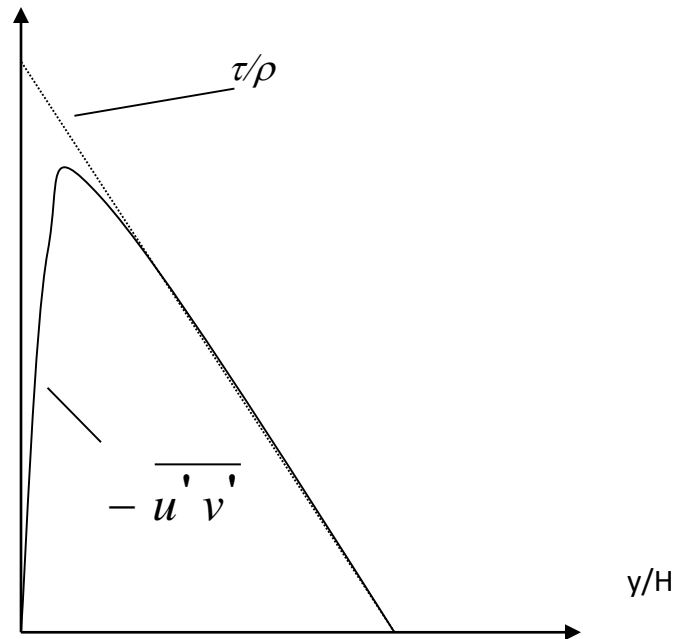


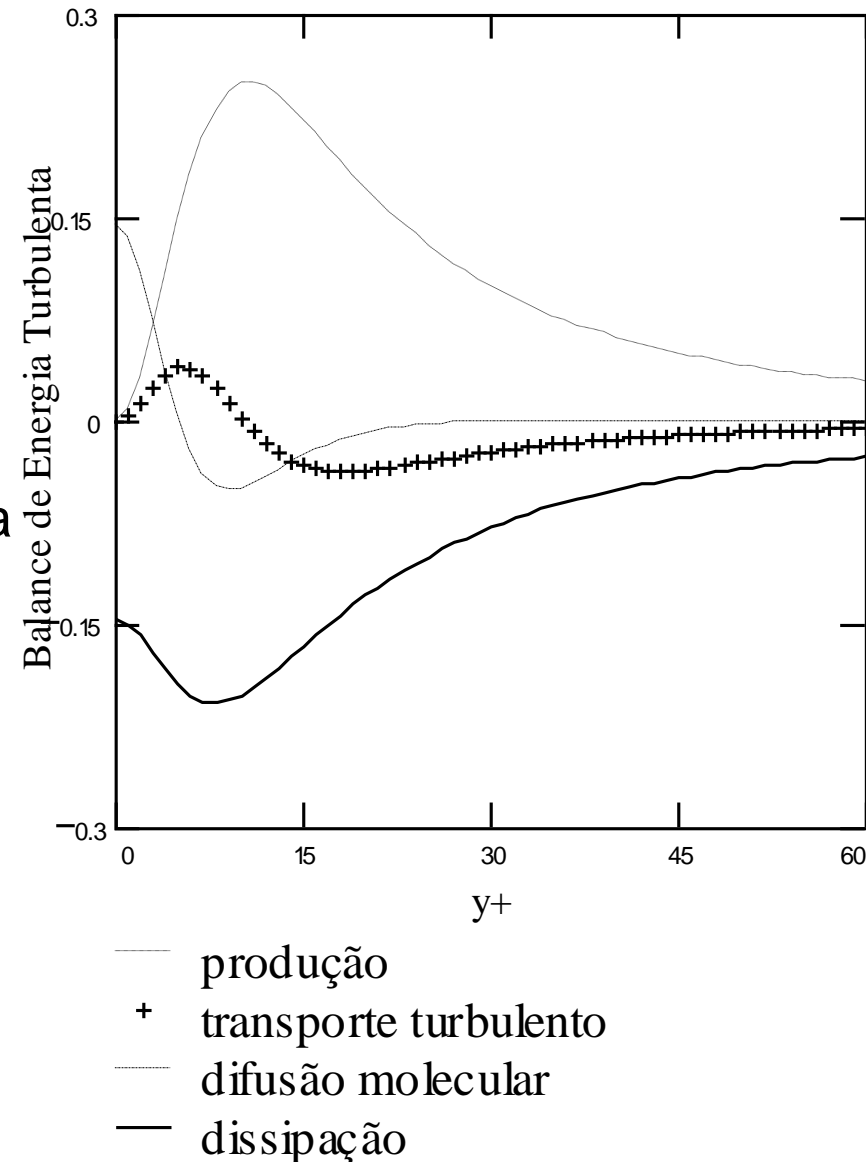
FIGURE 5-36

Flat-plate measurements of the fluctuating velocities u' (streamwise), v' (normal), and w' (lateral) and the turbulent shear $u'v'$. [After Klebanoff (1955).]

- A figura seguinte ilustra a distribuição de tensão total e turbulenta para um escoamento turbulento em um canal formado por placas paralelas, distantes entre si de H . Note que na maior parte do escoamento as tensões se devem exclusivamente aos termos turbulentos. Apenas junto à parede, onde as flutuações devem ir a zero, as tensões laminares dominam.



- Uma visão da contribuição de cada um dos mecanismos de transporte no balanço de energia cinética turbulenta k é apresentado ao lado.
- Existe uma região junto à parede onde a produção é elevada e praticamente se iguala a dissipação. Esta região é comumente dita estar na *condição de equilíbrio local*, numa referência ao fato de que os mecanismos de suprimento e remoção de energia da turbulência estão em equilíbrio. Note, no entanto, que bem próximo a parede, na região da sub-camada laminar, a produção se anula e a destruição de k se iguala ao termo de difusão molecular de k .



Estrutura Assintótica na Região da Parede

- Conhecidas as características do escoamento turbulento, o perfil de velocidade médio pode ser determinado a partir das condições na parede, expressas pela tensão de cisalhamento τ_s , pela rugosidade e , pela distância à parede y e pelas propriedades físicas do fluido, ou seja

$$\bar{u} = \bar{u}(\tau_s, e, y, \rho, \mu)$$

- Da análise dimensional, concluímos que
$$\frac{\bar{u}}{u^*} = f\left(\frac{\rho u^* y}{\mu}, \frac{\rho u^* e}{\mu}\right)$$

- onde u^* é chamado de velocidade de atrito, sendo definido como

$$u^* = \sqrt{\tau_s / \rho}$$

- Para uma superfície lisa, $e=0$, e portanto
$$\frac{\bar{u}}{u^*} = f\left(\frac{\rho u^* y}{\mu}\right)$$

- As relações funcionais entre a velocidade média e a distância a parede são chamadas de **Lei da parede**.

- Vamos definir velocidade e distância adimensionais como

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \qquad y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$$

- Para deduzirmos a estrutura assintótica do escoamento é necessário estimar a ordem de grandeza das flutuações turbulentas. Isto é feito através da análise de dados experimentais. A tensão turbulenta medida próximo à parede é comparável em ordem de grandeza à tensão local na parede τ_s . Isto sugere ser razoável assumir que

$$\mathcal{O}(u') = \mathcal{O}(v') = \mathcal{O}(u^*)$$

- onde o símbolo \mathcal{O} indica ordem de grandeza.

- Podemos agora proceder a uma análise de ordem relativa dos termos da equação de conservação de massa e de quantidade de movimento.

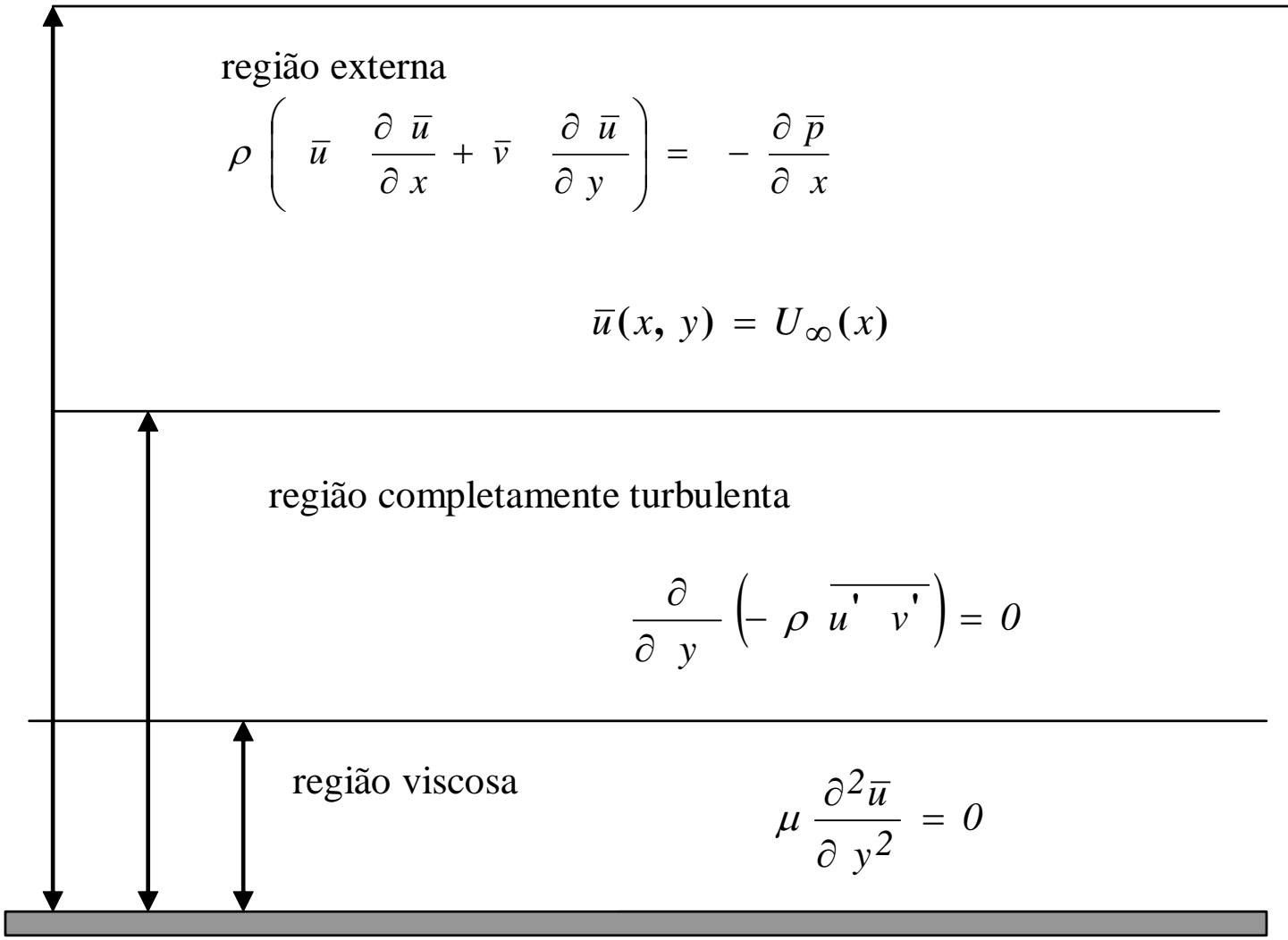
$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$

- Para facilitar a análise, vamos considerar o escoamento sobre uma superfície plana infinita, em regime permanente. Isto é, vamos simplificar a equação acima, utilizando as hipóteses de camada limite. O vetor velocidade média é definido como $\vec{u} = \bar{u} \vec{i} + \bar{v} \vec{j}$

- As equações de conservação se reduzem a

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u' v'} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$



- Vamos agora fazer uma análise com argumentos de escala. Vamos considerar que

$$\mathcal{G}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = \mathcal{G}\left(-\rho \overline{u'v'}\right)$$

- Como na camada limite turbulenta a mistura na direção transversal é muito intensa, a variação do perfil de velocidade com y não pode ser de ordem unitária, como acontece na camada limite laminar, esta deve ser bem menor. Observa-se que próximo à parede

$$\mathcal{G}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = \mathcal{G}\left(\frac{u^*}{\hat{\delta}}\right)$$

- Se agora definirmos $\hat{\delta}$ como a espessura da camada onde a relação acima é satisfeita, logo

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \approx \left(\frac{\tau_s}{\mu}\right) = \left(\frac{\rho \tau_s / \rho}{\mu}\right) = \left(\frac{\rho u^{*2}}{\mu}\right)$$

- substituindo

$$\mathcal{G}\left(\frac{\rho u^{*2}}{\mu}\right) = \mathcal{G}\left(\frac{u^*}{\hat{\delta}}\right)$$

- temos que a espessura da camada viscosa laminar é dada por

$$\hat{\delta} = \mathcal{G}\left(\frac{\mu}{\rho u^*}\right)$$

- Acima da região viscosa laminar, encontramos uma região onde as tensões turbulentas dominam completamente o escoamento. Na região completamente turbulenta consideramos como a região onde os termos de tensão turbulenta e os termos de inércia possuem a mesma ordem de grandeza, isto é, consideramos a região onde

$$\mathcal{G}\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) = \mathcal{G}\left(-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}\right)$$

- Para avaliarmos a ordem de grandeza dos termos acima consideraremos que na região interna do escoamento as quantidades de referência ainda são u^* e $\mu/(\rho u^*)$. Para a região externa, entretanto tomaremos como quantidades de referência \bar{U}_∞ e δ , onde δ denota a espessura da camada limite baseada em \bar{u} ($y = \delta$) = $0,99 \bar{U}_\infty$.
- De fato, na região externa do escoamento as equações do escoamento para uma primeira ordem de aproximação são as equações do escoamento de um fluido não viscoso. Os termos turbulentos conferem a essas equações uma correção de primeira ordem. Portanto, numa primeira aproximação, a solução para a camada limite turbulenta na região externa é simplesmente, $\bar{u} = \bar{U}_\infty(x)$. A correção de ordem superior a esta solução, provocada pelo termo turbulento, resulta em um "defeito" na solução não viscosa. Daí o termo camada defeituosa.
- Chamando a espessura da camada completamente turbulenta $\tilde{\delta}$.
- Da equação anterior, vem $\frac{U_\infty^2}{L} = \varrho \left(\frac{u^{*2}}{\tilde{\delta}} \right)$ isto é, $\tilde{\delta} = \varrho \left(\frac{u^{*2}}{U_\infty^2} L \right)$

- Vamos agora estimar o perfil de velocidade em cada uma dessas regiões. Considerando que próximo a parede o gradiente de pressão é desprezível $\partial \bar{p} / \partial x \approx 0$, e que $\bar{v} \approx 0$; $\partial \bar{u} / \partial x \approx 0$, a equação de quantidade de movimento linear se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \approx 0$$

logo $\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \approx cte = \tau_s$

- Numa vizinhança imediatamente adjacente à parede, **na sub-camada laminar**, existe uma região onde os termos viscosos dominam,

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_s$$

- integrando a equação, obtemos $\bar{u} = \frac{\tau_s y}{\mu}$

- esta equação pode ser reescrita como $\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{\rho u^* y}{\mu}$ ou ainda $u^+ = y^+$

- A conclusão é que o perfil de velocidade de um escoamento turbulento possui forma linear na região muito próxima à parede. Podemos concluir ainda que u^+ e y^+ e são variáveis de similaridade para esta região. Dados experimentais mostram que esta relação é válida para $y^+ < 5$.
- Imediatamente acima da região laminar viscosa deve existir uma região onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuem a mesma importância. É a **camada amortecedora**. Esta região é mais difícil de ser modelada.
- A região seguinte, chamada de **Região turbulenta**, a tensão turbulenta domina, então

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u' v'} \approx cte = \tau_s$$

$$- \rho \overline{u' v'} = \tau_s$$

- Infelizmente, não podemos integrar a equação acima, sem a introdução de uma relação constitutiva que permita modelar o termo turbulento. Assumindo que próximo a parede a aproximação do comprimento de mistura se aplica, podemos reescrever a tensão turbulenta como

$$-\rho \overline{u'v'} \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left(\rho u^* \ell \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left(\rho u^* k y \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

- igualando a tensão turbulenta com a tensão cisalhante na parede temos

$$\left(\rho u^* k y \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_s \Rightarrow \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{k y^+}$$

- o coeficiente k é conhecido como a constante de von Kármán, e de acordo com dados experimentais é aproximadamente igual a 0,4.

- Integrando a equação acima, obtemos

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + cte$$

- Para paredes lisas o valor da constante de integração é determinado empiricamente como sendo igual a 5.

- **Região amortecedora.** Vimos que o comprimento de mistura varia para cada tipo de escoamento e que próximo às paredes, pode ser definido como

$$\ell_m = k y \quad \text{para} \quad y \leq (\lambda / k) \delta$$

$$\ell_m = \lambda \delta \quad \text{para} \quad y \geq (\lambda / k) \delta$$

onde $k = 0,41$ e $\lambda = 0,09$ e δ é a espessura da camada limite local.

A figura ao lado ilustra alguns dados experimentais típicos para em cinco posições diferentes ao longo de uma superfície (δ_{99} é a espessura da camada limite, no ponto onde $u/U_\infty=0,99$).

Na região próxima à parede, o dados se ajustam ao perfil linear, sendo a constante de proporcionalidade $k \approx 0,41$, sendo usualmente chamada de constante de von Kàrmàn.

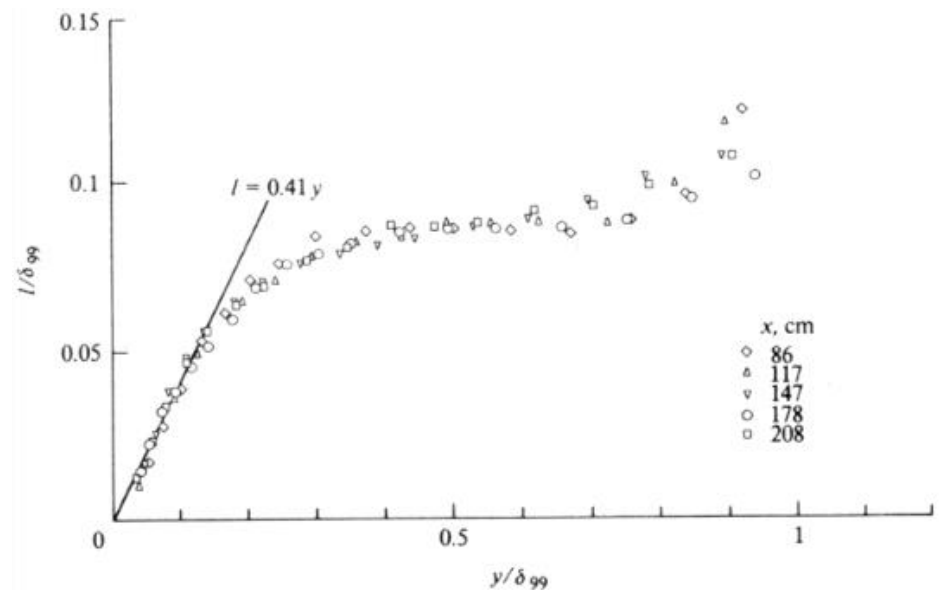


Figure 10-2 Mixing-length measurements of Anderson et al.¹³ for an equilibrium weak adverse pressure gradient boundary layer.

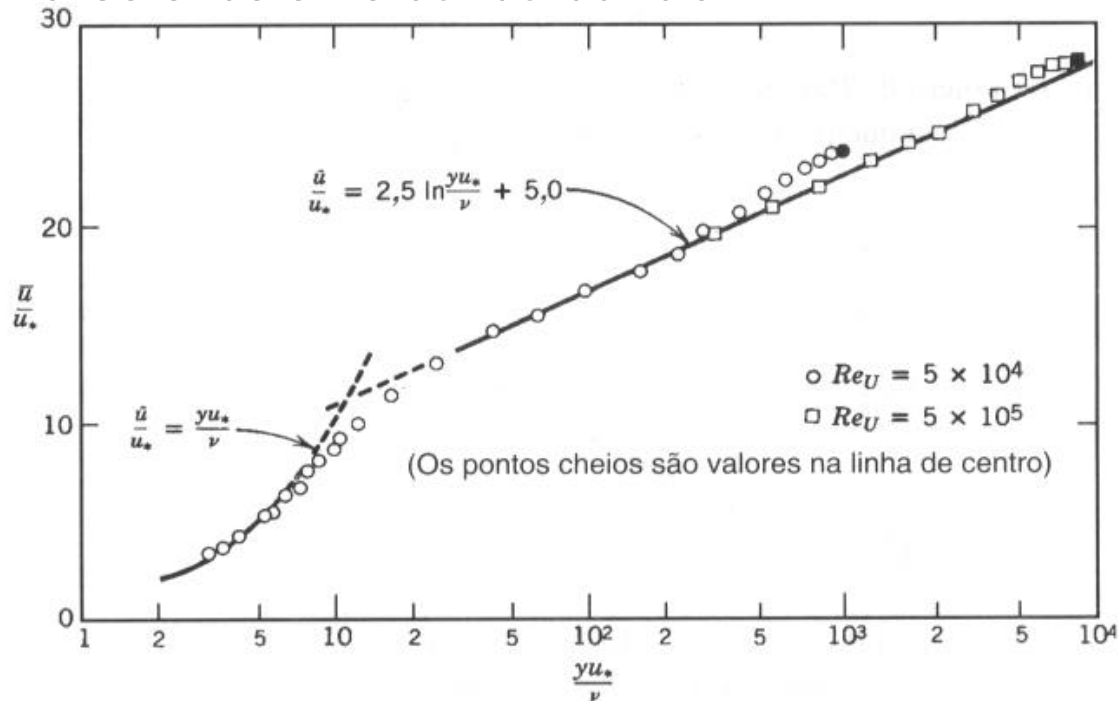
- O mesmo comportamento é observado com gradiente de pressão adverso/favorável, com sucção/injeção, e as constantes aparentemente são pouco afetadas pelas condições de contorno. Estas observações são válidas para uma camada limite em *equilíbrio*.
- Na região bem próxima a parede (a qual não é visível na figura apresentada), observa-se grande discrepância entre os valores medidos e previstos. Deissler (1955) e van Driest (1956) apresentaram, respectivamente, as seguintes relações para avaliar a viscosidade turbulenta

$$\mu_t = \underbrace{\rho n^2 \bar{u} y}_{\substack{\text{ideia} \\ \text{molecular}}} \underbrace{[1 - \exp(-n^2 \frac{\rho \bar{u} y}{\mu})]}_{\substack{\text{decaimento exponencial} \\ \text{amortecimento da parede}}} \overbrace{\left(\frac{\rho \bar{u} y}{\mu} \right)}^{\substack{\text{no. Reynolds} \\ \text{adimensional}}} \quad ; \quad n = 0,124$$

$$\mu_t = \underbrace{\rho k^2 y^2}_{\substack{\text{ideia} \\ \text{molecular}}} \underbrace{\left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]^2}_{\substack{\text{decaimento exponencial} \\ \text{amortecimento da parede}}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad k = 0,4 \quad e \quad A = \frac{26 \mu}{\rho v^*}$$

- A relação de Deissler apresenta a vantagem de não envolver nenhum gradiente, sendo mais fácil de ser tratada.

- A figura a seguir ilustra uma comparação entre os perfis para a região da sub-camada laminar e região turbulenta e dados experimentais, onde observa-se excelente concordância



- É importante notar que a *Lei da Parede* apresentada não pode ser aplicada em diversas situações de interesse prático, como por exemplo escoamentos envolvendo transferência de massa, regiões de separação, regiões com gradientes elevados de pressão ou de massa específica, a presença de força de corpo, etc.

- A estrutura esquemática da camada limite pode ser vista na figura abaixo. A camada limite turbulenta apresenta uma estrutura bem diferente da camada limite laminar. Esta possui junto à parede uma camada bastante fina, de espessura $\hat{\delta}$, onde os termos viscosos prevalecem. Acima desta camada e até a espessura δ , a predominância é dos termos turbulentos.

Finalmente, na região mais externa, de espessura δ , o domínio é dos termos de inércia. Nesta região, os termos de tensão aparente de Reynolds possuem uma contribuição de ordem superior.

