

# Escoamentos Turbulento Interno



- A distribuição de tensão ao longo da seção transversal de um escoamento interno, hidrodinamicamente desenvolvida no regime turbulento é igual a do regime laminar, pois como existe equilíbrio de forças, temos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \tau = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{r}{2}$$

- Para determinar o perfil de velocidade hidrodinamicamente desenvolvido em uma tubulação, devemos resolver a equação

$$\tau = \mu_{ef} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

- Este problema é análogo ao problema de Couette considerado anteriormente para avaliar a região próxima a parede sólida, pois próximo a parede, quando  $r \approx r_o$  ,  $\tau = \tau_o$ . O perfil de velocidade na região fora da subcamada viscosa difere muito pouco da lei da parede.



- Na maior parte do escoamento, os dados experimentais são bem representados por

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5$$

- Esta equação não é válida na linha de centro, nem próxima a mesma, uma vez que o gradiente de velocidade deve ser zero na linha de centro, devido a simetria.
- Na linha de simetria, o perfil acima resulta em  $\mu_t/\mu=0$ , o que não é razoável. Reichard propôs o seguinte perfil para a viscosidade turbulenta para toda a região fora da sub-camada viscosa

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{k y^+}{6} \left(1 + \frac{r}{r_o}\right) \left[1 + 2 \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]$$



- Com esta expressão para a viscosidade turbulenta, desprezando a viscosidade molecular, considerando o perfil linear de tensão, e a mesma sub-camada viscosa considerada anteriormente, obtém-se

$$u^+ = 2,5 \left[ y^+ \frac{1,5 (1 + r/r_o)}{1 + 2 (r/r_o)^2} \right] + 5,5$$

- Esta expressão apresenta excelente concordância com dados experimentais até a linha de centro, e tende a lei logarítmica da parede na região próxima à parede.
- Na região central, a hipótese de comprimento de mistura constante, como é considerado para escoamentos externos, não é adequada. A equação de Reichardt pode ser utilizada.



- Uma alternativa mais simples e adequada consiste em considerar o valor dado pela equação de Reichardt em  $r=0$  para toda a região interna, começando no ponto onde tem-se o mesmo valor  $\mu_t/\mu=0$  que o calculado usando

$$\ell = ky \left[ 1 - \exp(-y^+ / A^+) \right]$$

- Pode-se obter um perfil relativamente simples, baseado em lei de potências, simplificando-se a equação logarítmica apresentada acima. Para número de Reynolds moderados, um bom ajuste é

$$u^+ = 8,6 y^{+1/7}$$

Neste caso, a velocidade na linha de centro é  $u_c^+ = 8,6 y_c^{+1/7}$

$$\frac{u}{u_c} = \left( \frac{y}{r_c} \right)^{1/7}$$



Lembrando que a velocidade média é  $u_m = \frac{1}{A} \int_A u \, dA$

$$\frac{u_m}{u_c} = 0,817$$

O fator de atrito na faixa de  $3 \times 10^4 < \text{Re} < 10^6$  é  $\frac{c_f}{2} = 0,023 \text{Re}^{-0,2}$

Outra equação válida para  $10^4 < \text{Re} < 5 \times 10^6$  é  $\frac{c_f}{2} = (2,236 \ln \text{Re} - 4,639)^{-2}$

Para determinar o perfil de temperatura para fluxo de calor constante é necessário resolver

$$\rho c_p \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_r]$$



vimos que para escoamento térmicamente desenvolvido

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = (1 - \theta) \frac{d T_m}{d x} + \frac{d T_s}{d x}$$

Para fluxo de calor constante  $\frac{d T_m}{d x} = \frac{d T_s}{d x} \Rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{d T_m}{d x}$

$$\rho c_p \left( \bar{u} \frac{d T_m}{d x} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r q_r]$$

Introduzindo-se a mudança de variáveis  $y = r_o - r$ , tem-se

$$\rho c_p \left( \bar{u} \frac{d T_m}{d x} \right) = - \frac{1}{r_o - y} \frac{\partial}{\partial y} [(r_o - y) q_r]$$

Condições de contorno

1)  $y = r_o$

$$\bar{T} = T_s$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = - \frac{q_s}{k}$$

2)  $y = 0$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0$$



## Integrando tem-se

$$[(r_o - y) q_r] = -\rho c_p \frac{dT_m}{dx} \int_0^y \bar{u} (r_o - y) dy + C_1$$

A constante de integração é avaliada com a condição em  $y = r_o$  resultando em

$$[(r_o - y) q_r] = -\rho c_p \frac{dT_m}{dx} \int_y^{r_o} \bar{u} (r_o - y) dy$$

De acordo com o balanço global de energia temos que  $\rho c_p \frac{dT_m}{dx} = -\frac{2 q_s}{r_o u_m}$

lembrando que 
$$q_r = -c_p \left( \frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = c_p \left( \frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

tem-se

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{2 q_s}{\mu c_p r_o} \frac{\int_y^{r_o} \frac{\bar{u}}{u_m} (r_o - y) dy}{\left( (\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t + 1 / \mathbf{Pr} \right) (r_o - y)}$$



Integrando novamente.

$$\bar{T} - T_s = \frac{2 q_s}{\mu c_p} \int_0^y \left[ \frac{\int_0^{r_o} \bar{u} / u_m (1 - y / r_o) dy}{y ((\mu_t / \mu) / \text{Pr}_t + 1 / \text{Pr}) (r_o - y)} \right] d y$$

adimensionalizando com

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad T^+ = \frac{(\bar{T} - T_s) u_\tau}{q_s / (\rho c_p)}$$

obtem-se

$$T^+ = 2 \int_0^{y^+} \left[ \frac{\int_0^1 \bar{u} / u_m (1 - y / r_o) dy / r_o}{y / r_o ((\mu_t / \mu) / \text{Pr}_t + 1 / \text{Pr}) (1 - y / r_o)} \right] d y^+$$





Esta integração pode ser simplificada, se considerarmos que

$$\bar{u} / u_m \approx 1$$

resultando em

$$T^+ = 2 \int_0^{y^+} \left[ \frac{(1 - y/r_o) - (1 - (y/r_o)^2)/2}{((\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t + 1 / \mathbf{Pr}) (1 - y/r_o)} \right] d y^+ = \int_0^{y^+} \left[ \frac{(1 - y/r_o)}{((\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t + 1 / \mathbf{Pr})} \right] d y^+$$

$$T^+ = \int_0^{y^+} \left[ \frac{(1 - y^+ / r_o^+)}{((\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t + 1 / \mathbf{Pr})} \right] d y^+$$

A distribuição de temperatura pode ser obtida integrando a equação acima, considerando que na região da sub-camada viscosa a viscosidade turbulenta é desprezível e no núcleo a viscosidade molecular é desprezível

$$T^+ = \int_0^{13,2^+} \underbrace{\mathbf{Pr} (1 - y^+ / r_o^+)}_{\approx 0} d y^+ + \int_{13,2}^{y^+} \left[ \frac{(1 - y^+ / r_o^+)}{((\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t)} \right] d y^+$$



Na sub-camada viscosa,  $y/r_o \approx 0$  e usando no núcleo turbulento a relação de Reichardt para avaliar a viscosidade turbulenta, obtêm-se

$$T^+ = 13,2 \mathbf{Pr} + \frac{\mathbf{Pr}_t}{k} \ln \left[ y^+ \frac{1,5 (1 + r/r_o)}{1 + 2(r/r_o)^2} \right] - 5,8$$

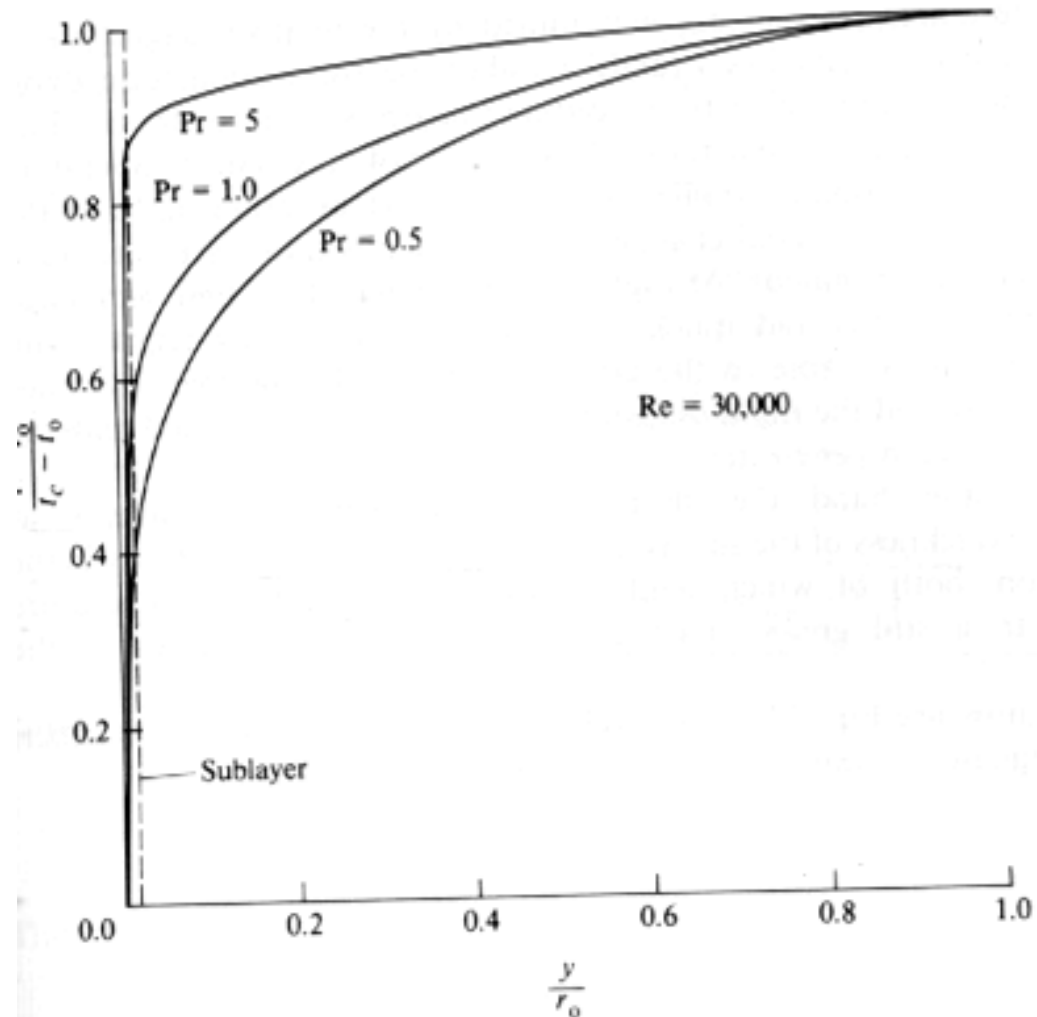
Considerando  $\mathbf{Pr}_t = 0,9$  e  $k=0,4$ , obtêm-se

$$T^+ = 13,2 \mathbf{Pr} + 2,25 \ln \left[ y^+ \frac{1,5 (1 + r/r_o)}{1 + 2(r/r_o)^2} \right] - 5,8$$



Este resultado é apresentado na figura a seguir, para um único valor de Reynolds e três valores de Prandtl.

- Note que o aumento de  $Pr$  resulta em um perfil mais “quadrado”, enquanto que baixo  $Pr$  resulta em um perfil mais arredondado.
- Observe a região de maior resistência térmica.
- Para altos números de Prandtl, a resistência é praticamente na subcamada, enquanto que para baixo Prandtl a resistência térmica é distribuída sobre toda a seção transversal.





Vamos agora determinar o número de Nusselt

Seja  $T_c^+$  a temperatura na linha de centro, então

$$T_c^+ = 13,2 \text{Pr} + 2,25 \ln[1,5 r_0^+] - 5,8$$

mas 
$$T_c^+ = \frac{(\bar{T}_c - T_s) u_\tau}{q_s / (\rho c_p)} = \frac{(\bar{T}_c - T_s) \sqrt{\tau_s / \rho}}{q_s / (\rho c_p)} \quad \sqrt{\tau_s / \rho} = u_m \sqrt{C_f}$$
$$q_s = h (T_s - T_m)$$

Definindo o número de Reynolds baseado no diâmetro e na velocidade média, e o número de Nusselt baseado no diâmetro, tem-se

$$r_0^+ = \frac{\rho r_0 \overbrace{\sqrt{\tau_s / \rho}}^u}{\mu} = \frac{\text{Re}}{2} \sqrt{C_f / 2} \quad Nu = \frac{h 2 r_0}{k}$$

## Rearrumando



$$Nu = \frac{q_s 2 r_o}{(T_s - T_m)k} = \frac{q_s 2}{(T_s - T_m)k} \frac{\mu r_o^+}{\rho \sqrt{\tau_s} / \rho} = \frac{q_s 2}{(T_s - T_m)k} \frac{\mu r_o^+}{\rho \sqrt{\tau_s} / \rho} \frac{(\bar{T}_c - T_s)}{(\bar{T}_c - T_s)} \frac{c_p}{c_p} = 2 \frac{\mathbf{Pr} r_o^+}{T_c^+} \frac{(\bar{T}_c - T_s)}{(T_s - T_m)}$$

$$\mathbf{Nu} = \frac{(\bar{T}_c - T_s) \mathbf{Re} \mathbf{Pr} \sqrt{C_f / 2}}{(T_m - T_s) \left[ 2,25 \ln(0,75 \mathbf{Re} \sqrt{C_f / 2}) + 13,2 \mathbf{Pr} - 5,8 \right]}$$

É preciso agora determinar a temperatura de mistura e velocidade média com

$$T_m = \frac{2}{u_m r_o^2} \int_0^{r_o} u T r dr$$

$$u_m = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} u r dr$$



Os perfil de velocidade e temperatura obtidos devem ser utilizados para avaliar as integrais.

No entanto, uma solução bem mais simples e bastante acurada pode ser obtida ao utilizarmos a lei de potências mencionada anteriormente, para valores moderados de Prandtl.

Para  $Pr \approx 1$ , a lei da potência 1/7 também pode ser utilizada para a temperatura

$$\frac{u}{u_c} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{1/7} \quad \frac{\bar{T} - T_s}{T_c - T_s} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{1/7}$$

Avaliando as integrais, obtêm-se

$$\frac{u_m}{u_c} = 0,817 \quad \frac{\bar{T}_m - T_s}{T_c - T_s} = 0,833$$

Então, usando a expressão apresentada para o fator de atrito

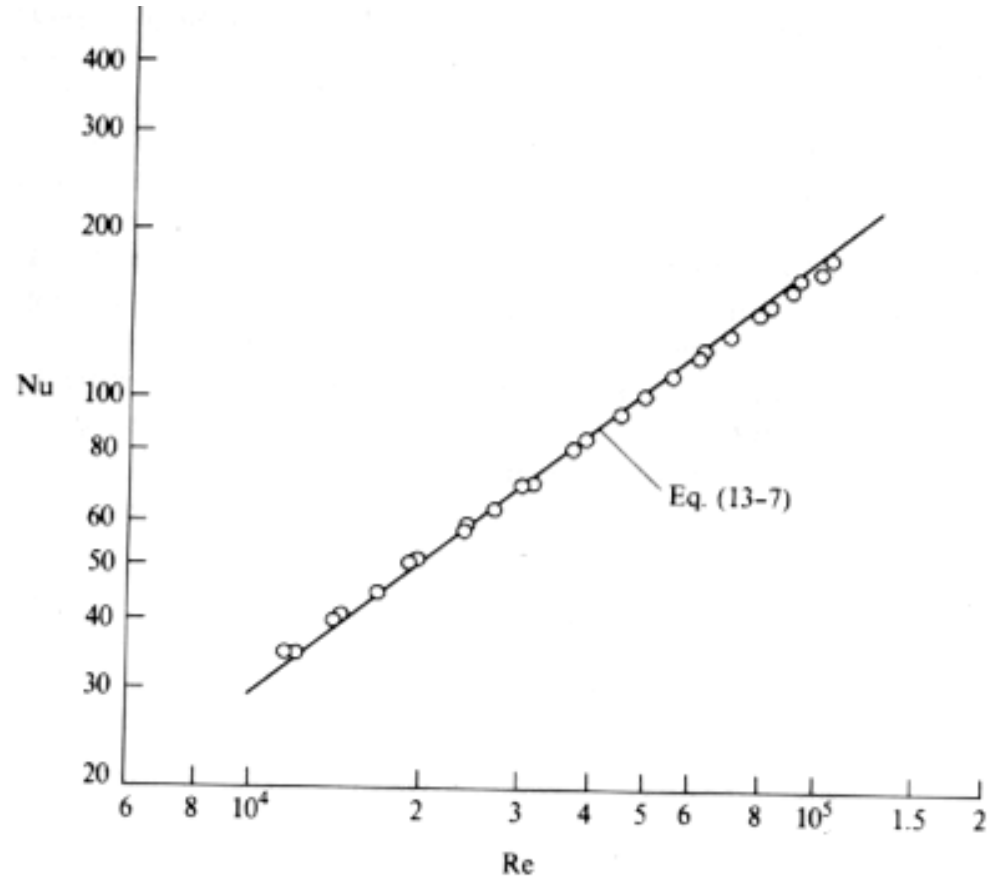
$$\frac{c_f}{2} = (2,236 \ln Re - 4,639)^{-2}$$

$$Nu = \frac{0,152 Re Pr}{0,833 \left[ 2,25 \ln(0,114 Re^{0,9}) + 13,2 Pr - 5,8 \right]}$$



$$Nu = \frac{0,152 Re Pr}{0,833 \left[ 2,25 \ln(0,114 Re^{0,9}) + 13,2 Pr - 5,8 \right]}$$

A figura compara dados experimentais com a equação anterior



Como a equação é de difícil uso, para número de Prandtl de 0,5 a 1,0 , a seguinte equação apresenta uma boa aproximação

$$Nu = 0,022 Pr^{0,5} Re^{0,8} \quad Re < 10^5$$



- Vimos que o número de Nusselt para escoamento desenvolvido, laminar é constante, mas para regime turbulento, o número de Nusselt varia com o número de Prandtl e Reynolds.
- A razão para esta dependência é o efeito da velocidade do escoamento na difusividade turbulenta e na espessura relativa da sub-camada.
- Para altos números de Prandtl, Sleicher e Rouse sugerem a seguinte expressão

$$Nu = 5 + 0,015 \mathbf{Re}^a \mathbf{Pr}^b \quad 0,1 < \mathbf{Pr} < 10^4 \quad , \quad 10^4 < \mathbf{Re} < 10^6$$

$$a = 0,88 - 0,24 / (4 + \mathbf{Pr}) \quad b = 0,333 + 0,5 \exp(-0,6 \mathbf{Pr})$$



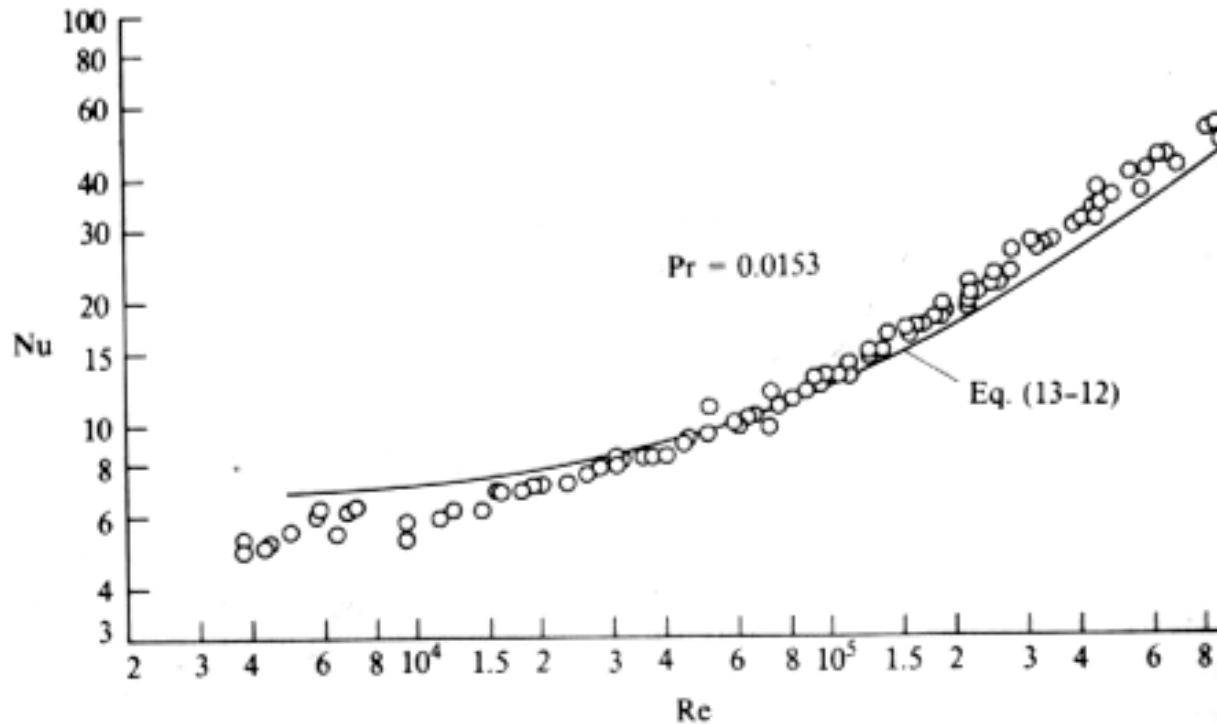


- Baixos número de Prandtl, são todos os metais líquido que apresentam o número de Prandtl na faixa de 0,1 a 0,001.
- A alta condutividade térmica desses fluidos é a causadora do baixo Prandtl, uma vez que a viscosidade e calor específico não são muito diferentes de outros fluidos.
- A alta condutividade térmica é a responsável pelas características não usuais dos metais líquido.
- A difusividade molecular é o mecanismo dominante, mesmo na região totalmente turbulenta. Isto significa que os metais líquido apresentam as mesmas características de transferência de calor que o escoamento em regime laminar, enquanto que as características de quantidade de movimento são análogas de qualquer outro fluido.
- 
- Sleicher e Rouse sugerem a seguinte expressão

$$Nu = 6,3 + 0,0167 \mathbf{Re}^{0,85} \mathbf{Pr}^{0,93}$$



A figura apresenta uma boa concordância da equação dada com dados experimentais.

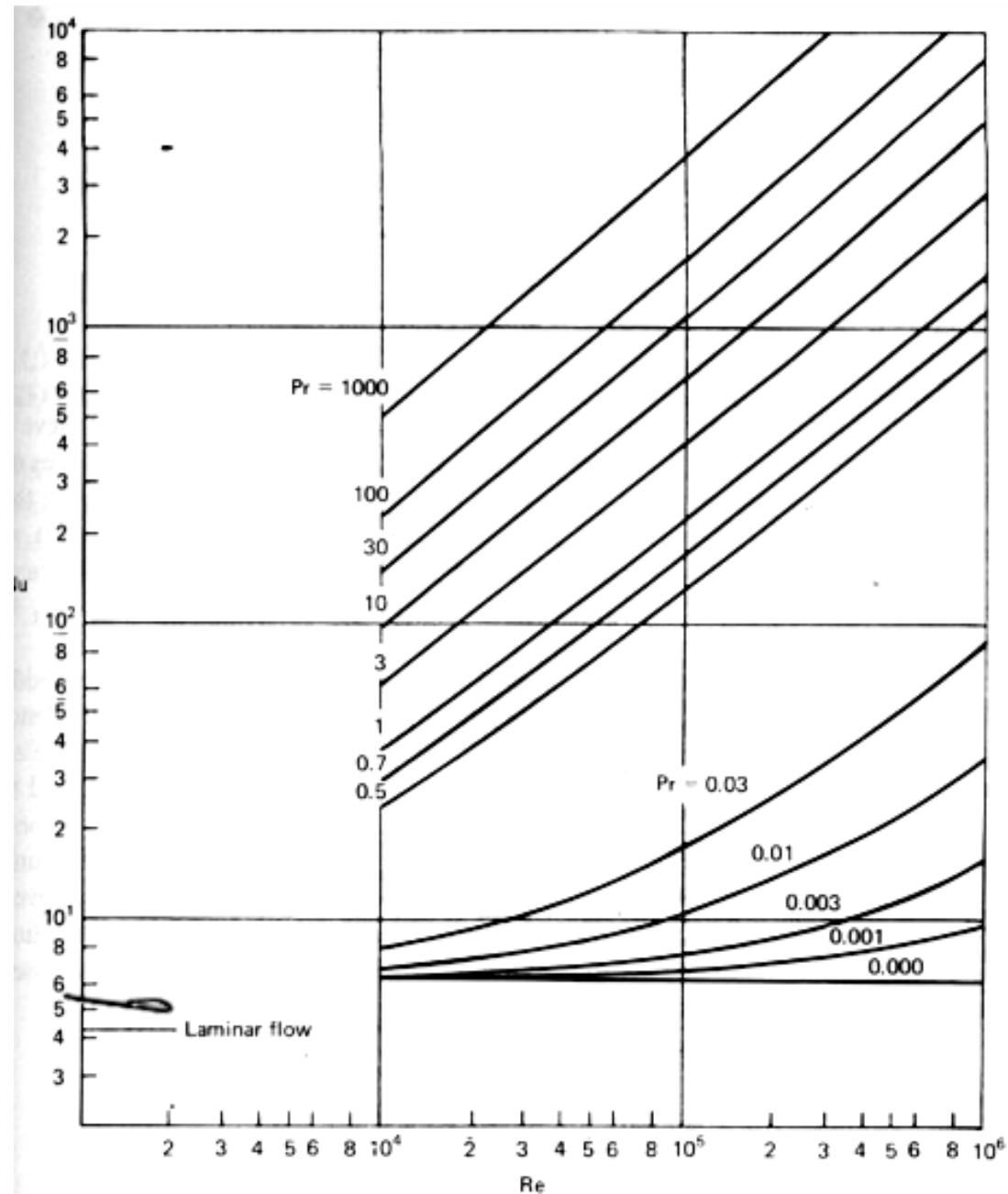




- A tabela e figura a seguir, apresentam valores para o número de Nusselt para escoamentos desenvolvido turbulento, em duto circular com fluxo de calor constante, para altos e baixo número de Prandtl .
- Note que a medida que o número de Prandtl diminui, o número de Nusselt tende a um valor constante.
- Baixos número de Reynolds apresentam o mesmo efeito. Em ambos os casos, observa-se a influência da condutância molecular

Pr	Re					
	Laminar	$10^4$	$3 \times 10^4$	$10^5$	$3 \times 10^5$	$10^6$
0.0	4.364	6.30	6.30	6.30	6.30	6.30
0.001		6.37	6.47	6.78	7.53	9.71
0.003		6.49	6.78	7.64	9.70	15.8
0.01		6.88	7.77	10.4	16.7	35.3
0.03		7.91	10.4	17.7	35.3	86.9
0.5		23.7	51.3	130	316	845
0.7		29.5	65.9	170	416	1120
1.0		36.9	84.6	222	546	1478
3.0		62.2	150	406	1020	2815
10		96.6	241	673	1728	4874
30		149	382	1083	2818	8052
100		230	596	1705	4465	12,836
1000		499	1305	3754	9860	28,427

Número de Nusselt  
para escoamento  
desenvolvido  
turbulento térmico e  
hidrodinâmico em  
tubo circular com  
fluxo de calor  
constante





- A compreensão do comportamento da difusividade térmica e de quantidade de movimento é útil para analisar diferentes situações.
- Uma vez que ambas as difusividades são pouco afetadas pelas condições de contorno térmicas, os valores das mesmas referentes a situação de fluxo de calor constante podem ser utilizadas para outros tipos de condições de contorno, como por exemplo para uma variação angular do fluxo de calor, como pode ocorrer em um coletor solar.
- Reynolds, obteve a solução para uma variação senoidal do fluxo de calor, dada por  $q_s(\phi) = q_{s,o} (1 + b \cos\phi)$

$$\frac{Nu_D(\phi)}{Nu_D} = \frac{1 + b \cos\phi}{1 + (S_1 b Nu_D / 2) \cos\phi}$$



o parâmetro  $S_1$  é dado como função de Reynolds e Prandtl na tabela a seguir, e  $Nu_D$  é o número de Nusselt para uma temperatura uniforme na periferia, apresentada na figura anterior e tabela abaixo

Função  $S_1$  de Fluxo de Calor Circunferencial para Escoamento Turbulento Desenvolvido em Duto Circular com Fluxo de Calor Constante

Pr	Re					
	Laminar	$10^4$	$3 \times 10^4$	$10^5$	$3 \times 10^5$	$10^6$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.001		1.000	1.000	0.999	0.974	0.901
0.003		0.999	0.994	0.957	0.831	0.473
0.01		0.991	0.952	0.733	0.409	0.161
0.03		0.923	0.699	0.348	0.145	0.0535
0.7		0.121	0.0490	0.0180	0.00721	0.00275
3		0.0448	0.0178	0.00629	0.00246	0.000902
10		0.0239	0.00931	0.00322	0.00123	0.000438
30		0.0151	0.00582	0.00199	0.000751	0.000166
100		0.00994	0.00383	0.00130	0.000486	0.000166
1000		0.00513	0.00198	0.000667	0.000248	0.0000841

# Número de Nusselt para escoamento Turbulento Desenvolvido com Fluxo de Calor na Parede Prescrito para Placa Plana e Anulos



- Kays and Leung obtiveram o número de Nusselt para escoamento turbulento desenvolvido em tubo longo em seção transversal anular.
- A concordância com dados experimentais para ar ( $Pr \approx 1$ ) é muito boa.
- Os resultados também podem ser utilizados para altos e baixos número de Prandtl com concordância razoável.
- O caso limite  $r_i/r_e=1$  consiste em placas paralelas e os resultados são apresentados na tabela a seguir. Os resultados podem ser utilizados para espaços anular com razão de  $r_i/r_e > 0,5$ .



Pr	Re					
	Laminar	$10^4$	$3 \times 10^4$	$10^5$	$3 \times 10^5$	$10^6$
0.0	5.385	5.70	5.78	5.80	5.80	5.80
0.001		5.70	5.78	5.80	5.88	6.23
0.003		5.70	5.80	5.90	6.32	8.62
0.01		5.80	5.92	6.70	9.80	21.5
0.03		6.10	6.90	11.0	23.0	61.2
0.5		22.5	47.8	120	290	780
0.7		27.8	61.2	155	378	1030
1.0		35.0	76.8	197	486	1340
3.0		60.8	142	380	966	2700
10.0		101	214	680	1760	5080
30.0		147	367	1030	2720	8000
100.0		210	514	1520	4030	12000
1000.0		390	997	2880	7650	23000

Tabela 11.3 Número de Nusselt para escoamento Turbulento Desenvolvido entre Placas Paralelas, com Fluxo de Calor Constante. Um Lado Aquecido e o Outro Isolado.





Se ambas as placas (ou dutos) forem aquecidas, podemos definir os coeficientes de transferência de calor interno e externo como

$$q_i = h_i(T_i - T_m) \qquad q_o = h_o(T_o - T_m)$$

Os números de Nusselt externo e interno são  $Nu_o = \frac{h_o D_h}{k}$   $Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}$

onde  $D_h$  é o diâmetro hidráulico.

$Nu_{ii}$  e  $Nu_{oo}$  são os números de Nusselt interno e externo, quando somente uma superfície é aquecida.

Os números de Nusselt interno e externo podem ser determinados para qualquer razão de fluxo de calor por

$$Nu_i = \frac{Nu_{ii}}{1 - q_o / q_i \theta_i^*} \qquad Nu_o = \frac{Nu_{oo}}{1 - q_i / q_o \theta_o^*}$$

$\theta_i^*$   $\theta_o^*$  são os coeficientes de influência

Table 13-3 Nusselt numbers and influence coefficients for  $r^* = 0.20$ ; fully developed turbulent flow in a circular-tube annulus; constant heat rate

Re	Laminar		$10^4$		$3 \times 10^4$		$10^5$		$3 \times 10^5$		$10^6$	
	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$	$Nu_{i0}$	$\theta_i^*$
Inner wall heated												
0.0	8.50	0.905	8.40	1.01	8.30	1.05	8.30	1.02	8.30	1.04	8.50	1.02
0.001			8.40	1.01	8.40	1.04	8.30	1.02	8.40	1.01	8.90	0.978
0.003			8.40	1.01	8.40	1.03	8.50	1.03	9.05	0.980	12.5	0.833
0.01			8.50	1.00	8.60	1.02	9.70	0.944	14.0	0.796	33.6	0.747
0.03			9.00	1.01	10.1	0.943	15.8	0.771	31.7	0.600	81.0	0.375
0.5			31.2	0.520	64.0	0.397	157	0.333	570	0.295	980	0.262
0.7			38.6	0.412	79.8	0.338	196	0.256	473	0.260	1,270	0.235
1.0			46.8	0.339	99.0	0.284	247	0.248	600	0.228	1,640	0.209
3.0			77.4	0.172	175	0.151	465	0.143	1,150	0.137	3,250	0.136
10.0			120	0.077	290	0.074	800	0.072	2,050	0.073	6,000	0.077
30.0			172	0.036	428	0.035	1,210	0.035	3,150	0.036	9,300	0.038
100.0			243	0.014	617	0.014	1,760	0.015	4,830	0.016	13,800	0.016
1,000.0			448	0.004	1,340	0.002	3,260	0.002	8,800	0.004	26,000	0.003
Outer wall heated												
0.0	4.88	0.104	5.83	0.140	5.92	0.146	6.10	0.151	6.16	0.152	6.35	0.157
0.001			5.83	0.140	5.92	0.144	6.10	0.151	6.30	0.154	6.92	0.153
0.003			5.83	0.140	6.00	0.146	6.22	0.150	6.90	0.150	10.2	0.135
0.01			5.95	0.141	6.20	0.146	7.40	0.144	11.4	0.131	24.6	0.089
0.03			6.22	0.140	7.55	0.140	12.7	0.125	26.3	0.098	80.0	0.086
0.5			22.5	0.071	51.5	0.064	130	0.055	310	0.048	823	0.044
0.7			29.4	0.063	64.3	0.055	165	0.049	397	0.044	1,070	0.040
1.0			35.5	0.051	80.0	0.046	206	0.042	504	0.039	1,390	0.035
3.0			60.0	0.026	145	0.026	390	0.024	980	0.024	2,760	0.023
10.0			98.0	0.013	243	0.013	680	0.012	1,750	0.012	4,980	0.012
30.0			142	0.006	360	0.006	1,030	0.006	2,700	0.006	7,850	0.006
100.0			205	0.003	520	0.003	1,500	0.003	4,000	0.003	12,000	0.003
1,000.0			380	0.001	980	0.001	2,830	0.001	7,500	0.001	22,500	0.001

Table 13-4 Nusselt numbers and influence coefficients for  $r^* = 0.50$ ; fully developed turbulent flow in a circular-tube annulus; constant heat rate

Pr	Laminar		$10^2$		$3 \times 10^2$		$10^3$		$3 \times 10^3$		$10^4$	
	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$	$Nu_{\phi}$	$\phi^*$
Inner wall heated												
0.0	6.18	0.528	6.28	0.622	6.30	0.633	6.30	0.652	6.30	0.659	6.30	0.653
0.001			6.28	0.622	6.30	0.633	6.30	0.652	6.40	0.659	6.75	0.643
0.003			6.28	0.622	6.30	0.633	6.40	0.657	6.85	0.638	9.40	0.585
0.01			6.37	0.623	6.45	0.637	7.30	0.623	10.8	0.540	23.2	0.427
0.03			6.75	0.627	7.53	0.598	12.0	0.533	24.9	0.432	65.5	0.333
0.5			24.6	0.343	52.0	0.293	130	0.253	310	0.229	835	0.208
0.7			30.9	0.300	66.0	0.258	166	0.225	400	0.206	1,080	0.185
1.0			38.2	0.247	83.5	0.218	212	0.208	520	0.182	1,420	0.170
3.0			96.8	0.129	152	0.121	402	0.115	1,010	0.114	2,870	0.111
30.0			106	0.059	260	0.059	715	0.059	1,850	0.059	5,400	0.061
30.0			153	0.028	386	0.028	1,080	0.028	2,850	0.031	8,400	0.032
100.0			220	0.006	558	0.006	1,600	0.006	4,250	0.007	12,600	0.007
1,000.0			408	0.002	1,040	0.002	3,000	0.002	8,000	0.002	24,000	0.002
Outer wall heated												
0.0	5.04	0.216	5.66	0.281	5.78	0.294	5.80	0.297	5.83	0.303	5.95	0.310
0.001			5.66	0.281	5.78	0.294	5.80	0.297	5.92	0.303	6.40	0.304
0.003			5.66	0.281	5.78	0.294	5.85	0.294	6.45	0.301	9.00	0.278
0.01			5.73	0.281	5.88	0.289	6.80	0.289	10.3	0.264	22.6	0.217
0.03			6.03	0.279	7.05	0.284	11.6	0.258	24.4	0.214	64.0	0.163
0.5			22.6	0.162	49.8	0.142	125	0.123	298	0.111	795	0.098
0.7			28.3	0.137	62.0	0.119	158	0.107	380	0.097	1,040	0.090
1.0			34.8	0.111	78.0	0.101	200	0.092	490	0.085	1,340	0.078
3.0			60.5	0.059	144	0.058	384	0.055	960	0.054	2,730	0.052
30.0			100	0.028	246	0.028	680	0.028	1,750	0.028	5,030	0.028
30.0			143	0.013	365	0.013	1,080	0.014	2,700	0.014	8,000	0.015
100.0			207	0.006	530	0.006	1,500	0.006	4,000	0.006	12,000	0.006
1,000.0			387	0.001	990	0.001	2,870	0.001	7,600	0.001	23,000	0.001



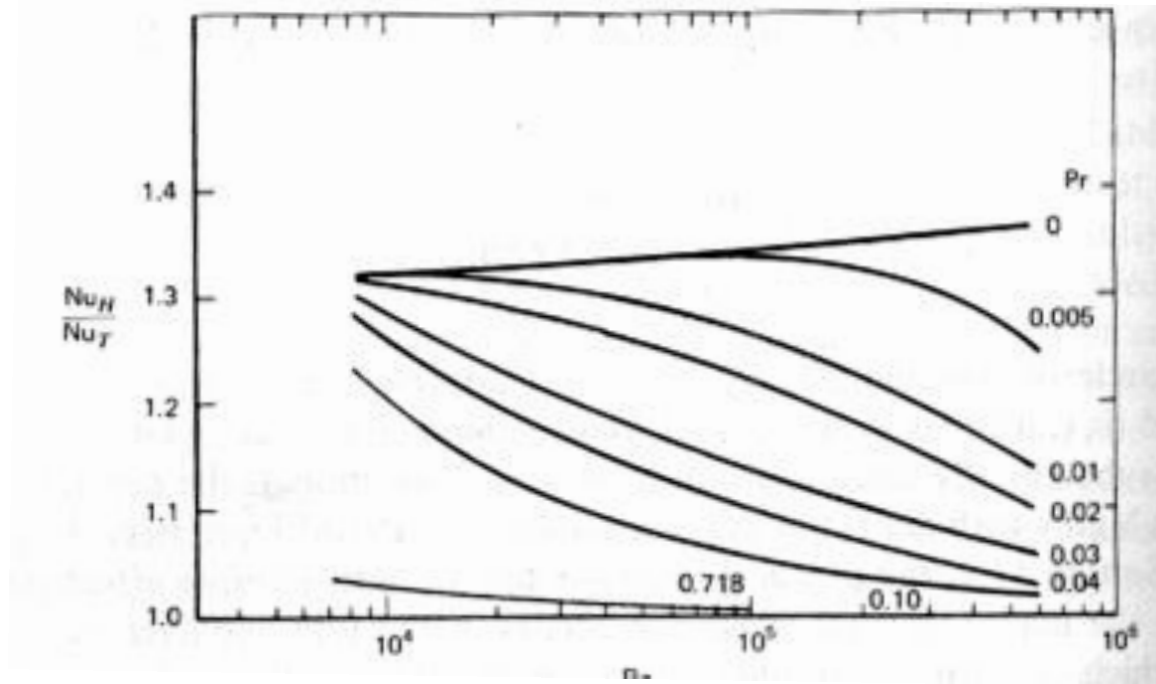
**Table 13-5 Nusselt numbers and influence coefficients for fully developed turbulent flow between parallel planes; constant heat rate; one side heated and the other side insulated**

Re \ Pr	Laminar		$10^4$		$3 \times 10^4$		$10^5$		$3 \times 10^5$		$10^6$	
	Nu	$\theta^*$	Nu	$\theta^*$	Nu	$\theta^*$	Nu	$\theta^*$	Nu	$\theta^*$	Nu	$\theta^*$
0.0	5.385	0.346	5.70	0.428	5.78	0.445	5.80	0.456	5.80	0.460	5.80	0.468
0.001			5.70	0.428	5.78	0.445	5.80	0.456	5.88	0.460	6.23	0.460
0.003			5.70	0.428	5.80	0.445	5.90	0.450	6.32	0.450	8.62	0.422
0.01			5.80	0.428	5.92	0.445	6.70	0.440	9.80	0.407	21.5	0.333
0.03			6.10	0.428	6.90	0.428	11.0	0.390	23.0	0.370	61.2	0.255
0.5			22.5	0.256	47.8	0.222	120	0.193	290	0.174	780	0.157
0.7			27.8	0.220	61.2	0.192	155	0.170	378	0.156	1,030	0.142
1.0			35.0	0.182	76.8	0.162	197	0.148	488	0.138	1,340	0.128
3.0			60.8	0.095	142	0.092	380	0.089	966	0.087	2,700	0.084
10.0			101	0.045	214	0.045	680	0.045	1,760	0.045	5,080	0.046
30.0			147	0.021	367	0.022	1,030	0.022	2,720	0.023	8,000	0.024
100.0			210	0.009	514	0.009	1,520	0.010	4,030	0.010	12,000	0.011
1,000.0			390	0.002	997	0.002	2,880	0.002	7,650	0.002	23,000	0.002

# Tubo circular, perfis totalmente desenvolvido, temperatura da parede constante



- Usando um procedimento análogo ao realizado para escoamento laminar, porém considerando a difusão turbulento, pode-se determinar a distribuição de temperatura, assim como o número de Nusselt.
- A razão entre o número de Nusselt com fluxo de calor constante e temperatura constante pode ser vista na figura a seguir. Note que para baixos números de Prandtl, há uma diferença significativa na razão, sendo desprezível para altos números de Prandtl



Para gases, pode-se utilizar a seguinte correlação

$$Nu = 0,021 Pr^{0,5} Re^{0,8}$$

$$Re < 10^5$$

Já para baixos número de Prandtl, Sleicher e Rouge sugerem

$$Nu = 4,8 + 0,0156 Pr^{0,93} Re^{0,85} \quad Pr < 0,1$$

# Região de Desenvolvimento Térmico



- Um caso comum de efeito de entrada, consiste na solução do problema onde o aquecimento da tubulação só ocorre após o desenvolvimento hidrodinâmico. Nestes casos, a mesma tendência geral observada para escoamentos laminares é esperada. O número de Nusselt é elevado no começo da região aquecida, caindo assintoticamente para um valor limite longe da região da entrada.
- O mesmo procedimento aplicado para regime laminar, pode ser aplicado para regime turbulento, onde as autofunções e auto-valores devem ser avaliados numericamente. O número de Nusselt baseado na temperatura média logaritmica pode ser determinado por

$$\overline{Nu}_D = \frac{\lambda_o^2}{2} + \frac{\mathbf{Re}_D \mathbf{Pr}}{x/D} \ln \frac{\lambda_o^2}{8 G_o}$$



<b>Pr</b>	<b>Re<sub>D</sub></b>	<b><math>\lambda_o^2</math></b>	<b>G<sub>o</sub></b>
<b>0,0</b>	<b>5 x 10<sup>4</sup></b>	<b>11,7</b>	<b>1,11</b>
	<b>10<sup>5</sup></b>	<b>13,2</b>	<b>1,3</b>
	<b>2 x 10<sup>5</sup></b>	<b>16,9</b>	<b>1,7</b>
<b>0,7</b>	<b>5 x 10<sup>4</sup></b>	<b>235</b>	<b>28,6</b>
	<b>10<sup>5</sup></b>	<b>400</b>	<b>49,0</b>





Reconhecendo que  $\lambda_o^2 = Nu_D(x=\infty)$ , obtêm-se

$$\frac{\overline{Nu_D(x)}}{\overline{Nu_D(x=\infty)}} = 1 + \frac{\mathbf{Re}_D \mathbf{Pr}}{x/D} \frac{2}{\lambda_o^2} \ln \frac{\lambda_o^2}{8 G_o}$$

Para  $\mathbf{Pr}=0,7$ , usando os dados da tabela, obtêm-se

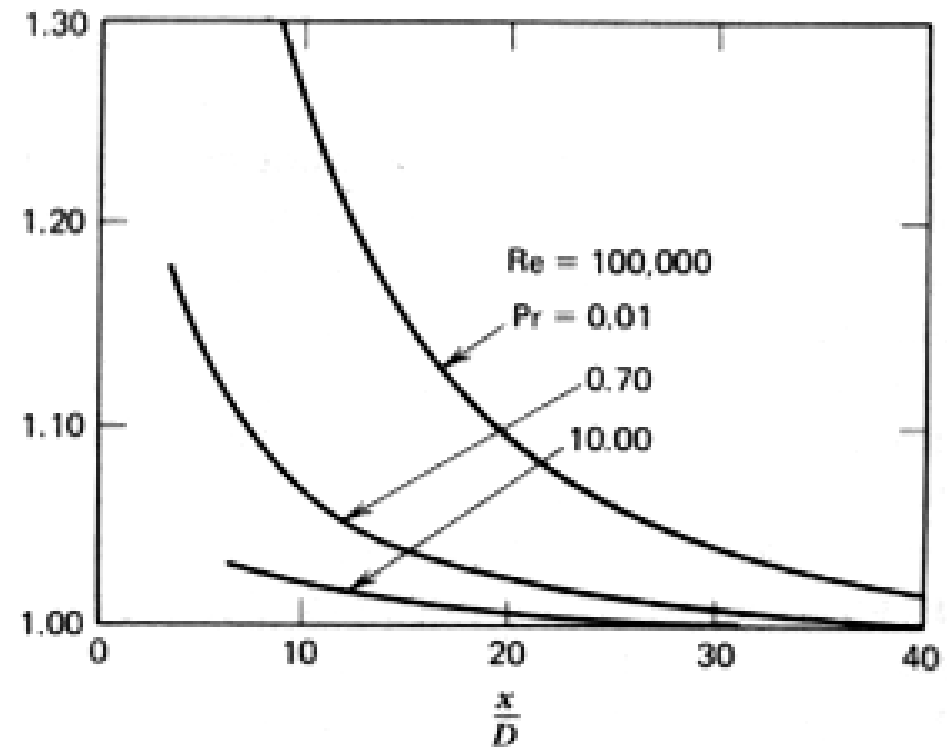
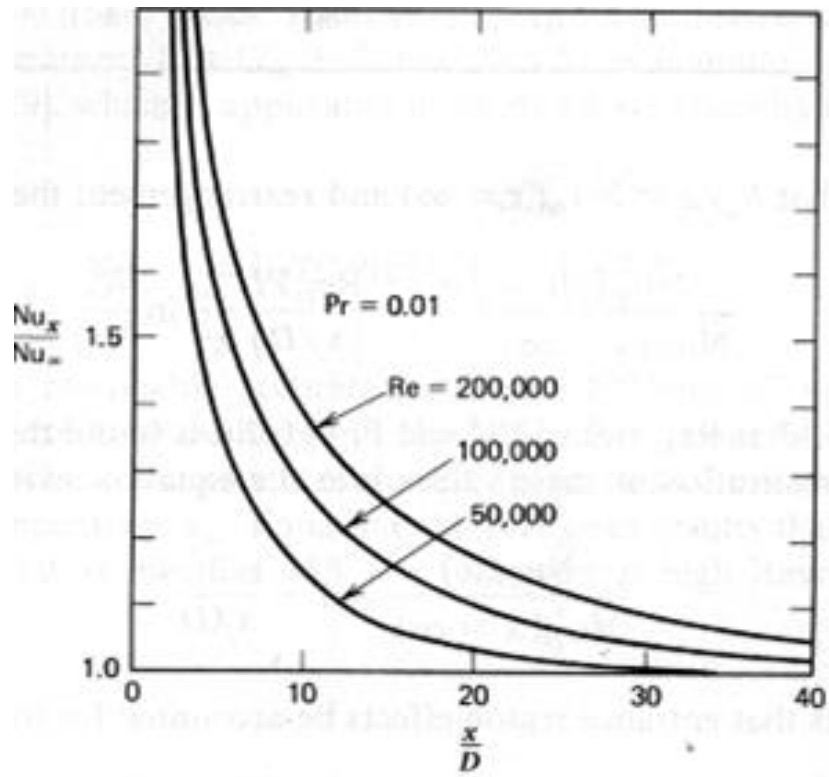
$$\frac{\overline{Nu_D(x)}}{\overline{Nu_D(x=\infty)}} = 1 + \frac{2}{x/D}$$

o que sugere que o efeito da entrada pode ser levado em consideração com um termo de correção do tipo

$$\frac{\overline{Nu_D(x)}}{\overline{Nu_D(x=\infty)}} = 1 + C_1 \left( \frac{D}{x} \right)^{C_2}$$

A tabela apresentada indica que a correção depende tanto de  $Re_D$  quando de  $\mathbf{Pr}$

O comportamento do número de Nusselt pode ser visto nas figuras a seguir



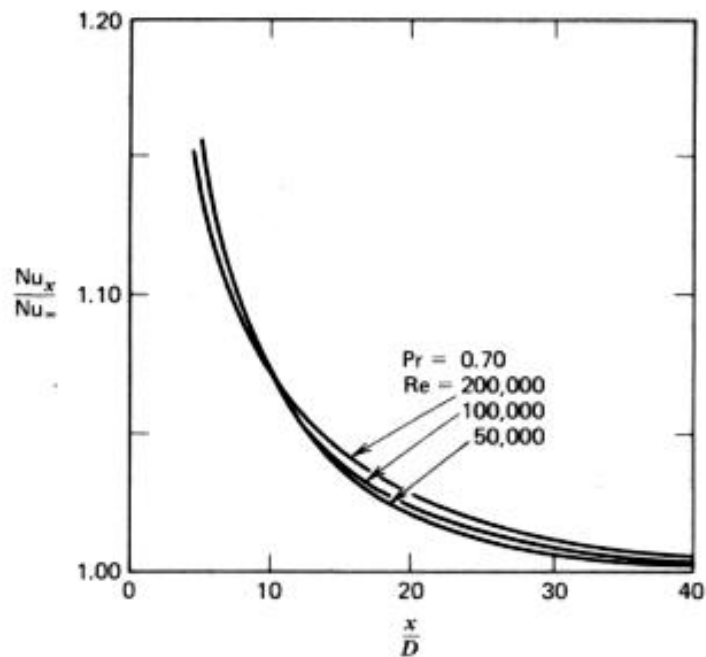


Figure 11-5 (Continued.)

Table 11-8 Nusselt Numbers for Turbulent Flow Between Parallel Planes; One Side Heated and the Other Side Insulated [15]

$x/D_p$	$Nu_{11}$		
	$Re = 7,096$	$Re = 73,612$	$Re = 494,576$
$Pr = 0.1$			
1	19.7	75.2	241
3	14.3	56.2	194
10	10.7	42.4	155
30	9.44	34.8	132
100	9.34	32.1	120
$Pr = 1.0$			
1	47.3	234	940
3	37.9	203	851
10	31.5	177	761
30	28.0	160	697
100	27.1	152	661
$Pr = 10$			
1	102	602	2925
3	88.6	575	2829
10	81.9	550	2724
30	78.6	532	2640
100	77.5	522	2590

Source: By permission from W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1980.