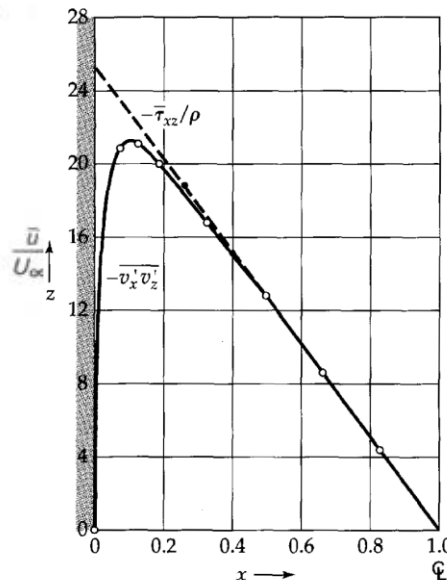
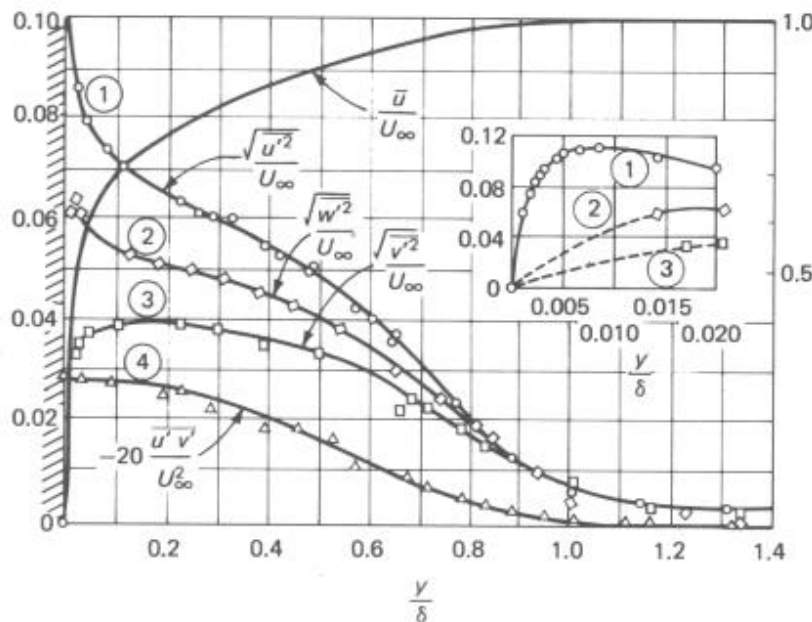


Estrutura da Turbulência em Escoamentos Junto à Superfícies Sólidas



- Os níveis de tensões de Reynolds em escoamentos turbulentos junto à superfície sólida são muito menores do que aqueles encontrados em escoamentos livres, devido à ação inibidora da parede.
- Por outro lado, devido à inibição do movimento do fluido na direção normal à parede, a anisotropia das flutuações de velocidade junto à parede é bem maior do que no caso de escoamento livre.

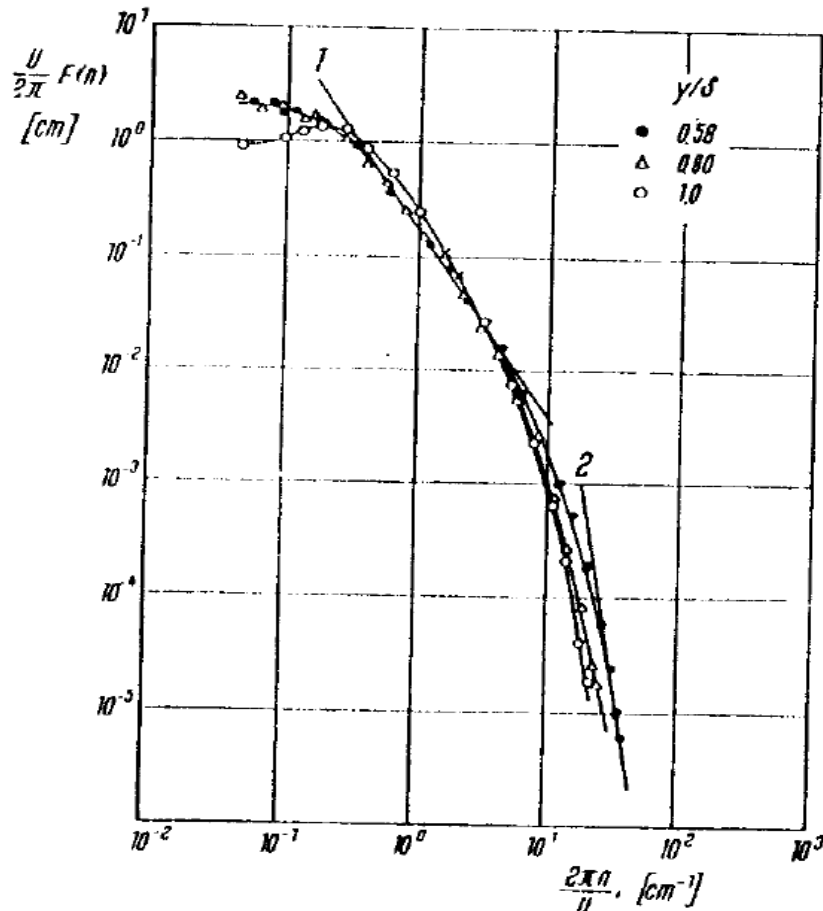


$$\tau = \tau_l + \tau_t$$

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$$



- Uma descrição alternativa da turbulência pode ser obtida com uma **análise da freqüência**.
- Distribuição de espectro de $\overline{u'^2}$ da camada limite sobre uma placa plana



Curve (1): $F \sim n^{-5/3}$

Curve (2): $F \sim n^{-7}$

- Os maiores valores de energia estão associados as menores freqüências.
- A medida que a freqüência cresce, o espectro de energia varia de acordo com a teoria de Kolmogorov, $F(n) \approx n^{-5/3}$.
- Para freqüências mais altas, o espectro de energia decai mais rapidamente devido a ação da viscosidade cinemática. De acordo com Heissenberg, $F(n) \approx n^{-7}$
- A partir da distribuição do espectro de energia, pode-se verificar que uma corrente turbulenta possui turbilhões de vários tamanhos, já que a freqüência é inversamente proporcional ao comprimento de onda.



Distribuição de Tensão Cisalhante Próximo à Parede (Camada Limite)

Para determinar o perfil de velocidade, vamos inicialmente determinar a distribuição de tensão cisalhante. Pela definição de viscosidade efetiva, como sendo a soma da viscosidade absoluta com a turbulenta, temos

$$\tau = \mu_{ef} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Introduzindo as simplificações de camada limite nas equações médias de Navier-Stokes, obtemos

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Note que esta equação acima é válida tanto para regime laminar quanto turbulento



Vamos nos concentrar na região relativamente próxima a parede tal que $\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ é muito menor que os outros termos, podendo ser desprezado.

Esta região geralmente se estende fora da sub-camada viscosa, podendo em alguns casos incluir tanto quanto um terço de toda a camada limite. Isto é chamado de aproximação de “*Escoamento de Couette*”, sendo chamada de *Região de Escoamento de Couette*.

Com a hipótese de que $\bar{u} = \bar{u}(y)$, a equação de conservação de quantidade de movimento torna-se uma equação diferencial ordinária.

Sendo que pela continuidade $\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{\approx 0} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$ $\bar{v} = cte = v_o$



Logo, a equação de quantidade de movimento torna-se

$$\rho v_o \frac{d\bar{u}}{d y} = -\frac{dP}{d x} + \frac{d \tau}{d y}$$

Integrando esta equação de $y=0$, onde $\bar{u} = 0, \tau = \tau_s$

até uma distância y arbitrária, temos

$$\frac{\tau}{\tau_s} = 1 + \frac{\rho v_o \bar{u}}{\tau_s} + \frac{dP}{d x} \frac{y}{\tau_s}$$

Vamos introduzir agora variáveis adimensionais, referenciadas freqüentemente com coordenadas de parede. Porém, primeiro vamos definir a variável *velocidade de atrito*

$$u_\tau = u^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}$$

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \frac{C_f U_\infty^2}{2} = u_\tau^2$$



Com a seguinte adimensionalização:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad v^+ = \frac{v_o}{u_\tau} \quad p^+ = \frac{\mu (dp/dx)}{\rho^2 u_\tau^3}$$

$$\frac{\tau}{\tau_s} = 1 + v_o^+ u^+ + p^+ y^+$$

A equação acima só é válida na região onde a aproximação de escoamento de Couete é válida, na fronteira externa da camada limite

$$\tau / \tau_s \rightarrow 0$$



Perfil de Velocidade na Região da Parede

- Vamos agora estimar o perfil de velocidade em cada uma das zonas na região próxima à parede, a partir das equações de conservação, considerando $v_o^+ = 0$ $p^+ = 0$

Neste caso, na região de escoamento de Couette, a equação de conservação se reduz a

$$\frac{\tau}{\tau_s} = 1$$

Para obter o perfil de velocidade precisamos integrar $\tau_s = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{d y}$

Inicialmente vamos considerar que a camada limite turbulenta consiste de duas regiões distintas:

- sub-camada viscosa, onde $\mu \gg \mu_t$
- região totalmente turbulenta onde $\mu \ll \mu_t$



Sub-camada viscosa: Nesta região, temos $\tau_s = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$

▪ integrando a equação, obtemos $\bar{u} = \frac{\tau_s}{\mu} y$

▪ esta equação pode ser reescrita como $\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{\rho u^* y}{\mu}$ $u^+ = y^+$

A conclusão é que o perfil de velocidade de um escoamento turbulento possui forma linear na região muito próxima à parede. Podemos concluir ainda que u^+ e y^+ são variáveis de similaridade para esta região.

Dados experimentais mostram que esta relação é válida para $y^+ < 5$

Para o modelo de duas camadas, amplia-se a região de validade do perfil linear até $y^+ \approx 11$



- Imediatamente acima da região laminar viscosa deve existir uma região onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuem a mesma importância. É a **camada amortecedora**. Esta região é mais difícil de ser modelada.

- A região seguinte, chamada de **Região turbulenta**, $\tau_s \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ a tensão turbulenta domina, então

- Infelizmente, não podemos integrar a equação acima, sem a introdução de uma relação constitutiva que permita modelar o termo turbulento.

- Assumindo que próximo a parede a aproximação do comprimento de mistura se aplica, podemos reescrever a tensão turbulenta como

$$\tau_s = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = (\rho u^* \ell) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = (\rho u^* k y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$



- o coeficiente k é conhecido como a constante de von Kármán, e de acordo com dados experimentais é aproximadamente igual a 0,4.
- Integrando a equação anterior, obtemos

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + cte$$

Para paredes lisas o valor da constante de integração é determinado considerando continuidade entre as duas camadas, isto é, para

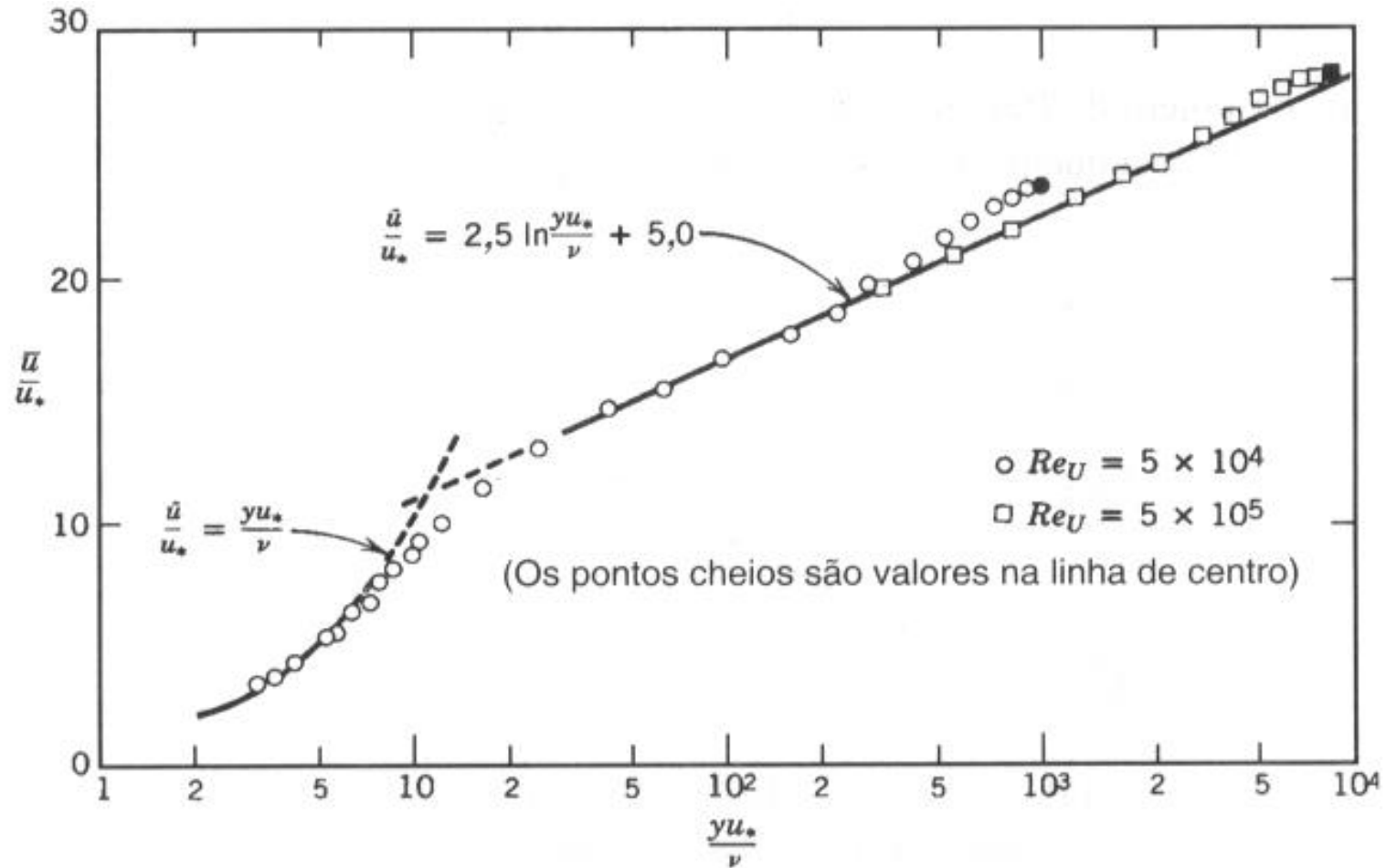
$$y^+ = 11 \quad ; \quad u^+ = 11$$

donde se conclui que a constante de integração é igual a 5,0.

Esta equação logarítmica é muitas vezes chamada de lei da parede ou perfil universal de velocidade

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5$$

- A figura abaixo ilustra uma comparação entre os perfis para a região da sub-camada laminar e região turbulenta e dados experimentais, onde observa-se excelente concordância





Como mencionado, na realidade existem três camadas na região próxima a parede, sendo que a sub- camada viscosa só é válida até $y^+ < 5$, enquanto que a região totalmente turbulenta só é válida para $y^+ > 30$.

Para avaliar o perfil de velocidade na camada amortecedora podemos utilizar o modelo de turbulência de Deisser. Neste caso

$$\tau_s = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} = \left\{ \mu + \rho n^2 \bar{u} y \left[1 - \exp\left(-n^2 \frac{\rho \bar{u} y}{\mu}\right) \right] \right\} \frac{d\bar{u}}{dy}$$
$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + n^2 u^+ y^+ \left[1 - \exp(-n^2 u^+ y^+) \right]}$$

Esta equação deve ser integrada a partir de $y^+=5$, onde $u^+=y^+$. Como é uma equação não linear deve ser integrada numericamente, resultando na seguinte expressão aproximada

$$u^+ = 5 + \int_5^{y^+} \left\{ 1 + n^2 u^+ y^+ \left[1 - \exp(-n^2 u^+ y^+) \right] \right\}^{-1} dy^+$$



$$u^+ \approx 5 + 5 \ln \frac{y^+}{5}$$

apresenta boa concordância com os dados experimentais para $5 < y^+ < 26$, como pode ser visto na figura a seguir

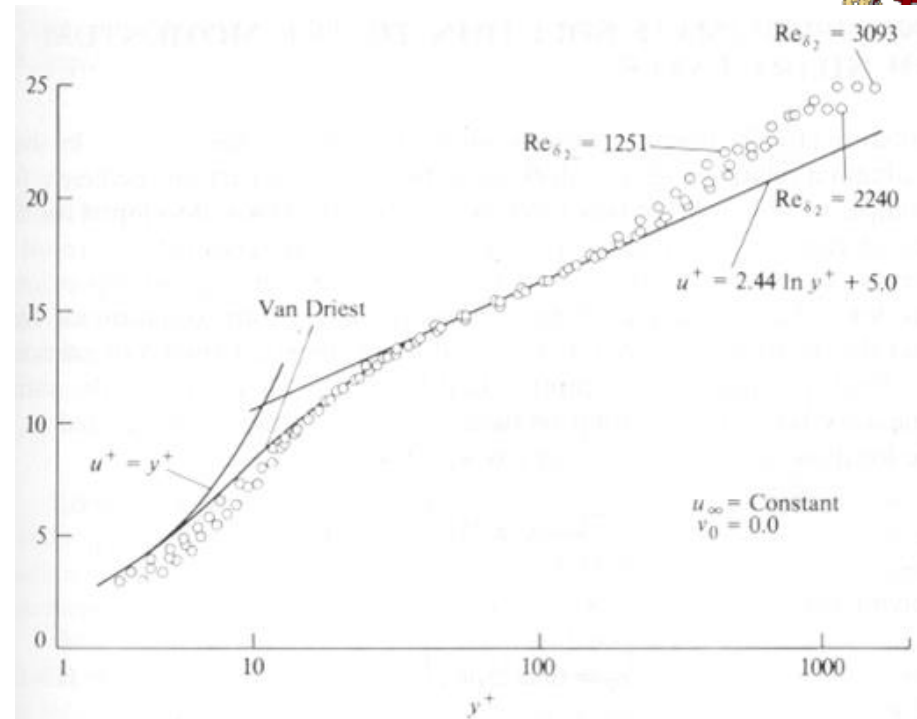


Figure 10-3 Turbulent boundary-layer profiles in wall coordinates (data of Anderson et al.¹³).

É importante notar que a *Lei da Parede* apresentada não pode ser aplicada em diversas situações de interesse prático, como por exemplo escoamentos envolvendo transferência de massa, regiões de separação, regiões com gradientes elevados de pressão ou de massa específica, a presença de força de corpo, etc. Para estas situações, nossas expressões devem ser obtidas.



Perfil de Temperatura na Região da Parede

- Simplificando a equação da energia com as hipóteses de camada limite, temos

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]$$

Procedendo de forma análoga ao feito com a equação de conservação de quantidade de movimento, vamos rescrever esta equação utilizando a definição de fluxo de calor

$$q = - (k + k_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \qquad \frac{q}{c_p} = - \left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

$$\rho c_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$



Vamos considerar a região próxima a parede onde $\partial \bar{T} / \partial x \approx 0$

Vamos considerar ainda que a temperatura da parede é constante e igual a T_s . A equação de energia se reduz a

$$v_o \frac{d \bar{T}}{d y} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{d q}{d y} = 0$$

Integrando esta equação de $y=0$, onde $\bar{T} = T_s$, $q = q_s$

até uma distância y arbitrária, temos

$$\frac{q}{q_s} = 1 + \frac{\rho c_p v_o (T_s - \bar{T})}{q_s}$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$$

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$$

$$v^+ = \frac{v_o}{u_\tau}$$

$$T^+ = \frac{(T_s - \bar{T}) u_\tau}{q_s / (\rho c_p)}$$

$$\frac{q}{q_s} = 1 + v_o^+ T^+$$



Note a similaridade com a equação de τ / τ_s
com a exceção de que não há o termo p^+

$$\frac{\tau}{\tau_s} = 1 + v_o^+ u^+ + p^+ y^+$$

De fato a analogia de comportamento entre a transferência de calor e quantidade de movimento falha na presença de um gradiente de pressão.

Considerando o caso particular sem injeção/sucção, isto é com

$$v_o = 0 \quad \frac{q}{q_s} = 1$$

Podemos agora integrar

$$\frac{q_s}{c_p} = - \left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{d \bar{T}}{d y}$$

para avaliar a temperatura



$$\int_{T_s}^{\bar{T}} d\bar{T} = -\frac{q_s}{c_p} \int_0^y \frac{d y}{\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right)}$$

Rearrmando e introduzindo y^+ , obtemos

$$\frac{(T_s - \bar{T}) u_\tau}{q_s / (\rho c_p)} = \int_0^{y^+} \frac{d y^+}{(1/\mathbf{Pr} + (\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t)}$$

$$T^+ = \int_0^{y^+} \frac{d y^+}{(1/\mathbf{Pr} + (\mu_t / \mu) / \mathbf{Pr}_t)}$$

Na região da sub-camada laminar, a difusão laminar domina, $T^+ = \mathbf{Pr} y^+$

mas como nesta região o perfil de velocidade é linear, então $T^+ = \mathbf{Pr} u^+$



Para avaliar o perfil de velocidade na *Região turbulenta*, devemos inicialmente definir o região de validade da sub-camada térmica. Vimos que o limite da sub-camada viscosa é $y^+=11$, porém, a espessura efetiva da sub-camada térmica é maior, $y^+=13,2$.

Quebrando a integral em duas partes, considerando a difusão molecular dominante na sub-camada térmica e a difusão turbulenta na região turbulenta, temos

$$T^+ = \int_0^{y_{sub}^+} \frac{d y^+}{(1/Pr)} + \int_{y_{sub}^+}^{y^+} \frac{d y^+}{((\mu_t / \mu) / Pr_t)} \quad T^+ = \int_0^{13,2} Pr d y^+ + \int_{13,2}^{y^+} \frac{Pr_t}{\mu_t / \mu} d y^+$$

Utilizando novamente o modelo de comprimento de mistura de Prandtl

$$\tau_s \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \tau_s \approx \mu_t \frac{u_\tau}{\mu l(\rho u_\tau)} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \quad \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{1}{\frac{\partial u^+}{\partial y^+}} = \frac{1}{k y^+} = k y^+$$



$$T^+ = \int_0^{13,2} \text{Pr} \, d y^+ + \int_{13,2}^{y^+} \frac{\text{Pr}_t}{\mu_t / \mu} \, d y^+ \quad \Rightarrow \quad T^+ = 13,2 \text{Pr} + \frac{\text{Pr}_t}{k} \ln \frac{y^+}{13,2}$$

O número de Prandtl turbulento deve ser determinado a partir de dados experimentais, mencionamos que o mesmo é aproximadamente igual a $\text{Pr}_t = 0,9$.

Neste caso a equação acima pode ser reescrita como

$$T^+ = 2,195 \ln y^+ + 13,2 \text{Pr} - 5,66$$

A comparação da equação acima com dados experimentais pode ser visto na figura ao lado

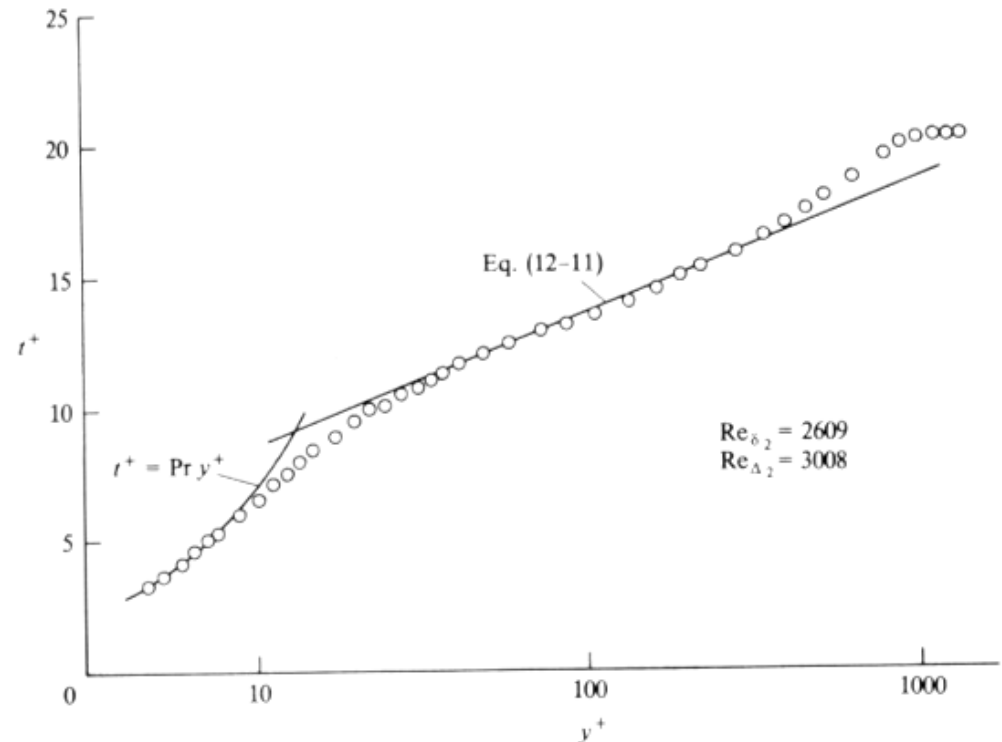


Figure 12-2 Temperature profile for flow of air ($\text{Pr} = 0.7$) along a plate with constant free-stream velocity and constant surface temperature (data of Blackwell et al.¹).



Para obter uma melhor estimativa do perfil de temperatura, podemos considerar o resultado da sub-camada viscosa até $y^+=5$. Consideraremos a camada amortecedora de entre $5 < y^+ < 30$, onde

$$u^+ \approx 5 + 5 \ln \frac{y^+}{5} \qquad T^+ = \int_0^{y^+} \frac{d y^+}{(1/\text{Pr} + (\mu_t / \mu) / \text{Pr}_t)}$$

$$T^+ = \int_0^5 \frac{d y^+}{(1/\text{Pr})} + \int_{y_{sub}^+}^{y^+} \frac{d y^+}{((1/\text{Pr}) + (\mu_t / \mu) / \text{Pr}_t)}$$

mas $\tau_s = (\mu + \mu_t) \frac{du}{dy}$ $1 + \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{1}{d u^+ / d y^+} \approx \frac{1}{5 / y^+}$

$T_{camada\ amortecedora}^+ = \int_5^{y^+} \frac{d y^+}{1/\text{Pr} + (1/\text{Pr}_t)(y^+ / 5 - 1)} = 5 \text{Pr}_t \ln \left(1 + (\text{Pr} / \text{Pr}_t)(y^+ / 5 - 1) \right)$

$T_{camada\ amortecedora}^+ = 5 \text{Pr}_t \ln \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right)$ $T^+ = 5 \text{Pr} + 5 \text{Pr}_t \ln \left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right)$

Neste caso a distribuição de temperatura no núcleo turbulento torna-se

$$T^+ = \int_0^5 \mathbf{Pr} \, d y^+ + \int_5^{30} \frac{d y^+}{1/\mathbf{Pr} + (1/\mathbf{Pr}_t)(y^+/5 - 1)} + \int_{30}^{y^+} \frac{\mathbf{Pr}_t}{k y^+} d y^+$$

$$T^+ = 5 \mathbf{Pr} + 5 \mathbf{Pr}_t \ln \left(1 + 5 \frac{\mathbf{Pr}}{\mathbf{Pr}_t} \right) + \frac{\mathbf{Pr}_t}{k} \ln \frac{y^+}{30}$$

Para avaliar a diferença de temperatura entre a corrente livre T_∞ e a parede, devemos levar em consideração três regiões

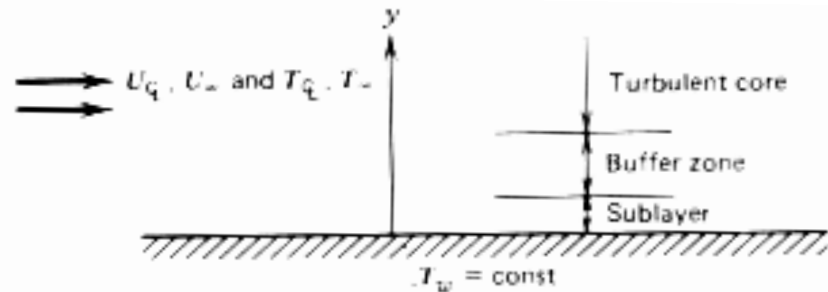


Figure 10-5 Division of a turbulent boundary layer into a laminar sublayer at the wall, an intermediate buffer zone, and an outer fully turbulent core.

$$(T_s - T_\infty) = \Delta T_{\text{subcamada}} + \Delta T_{\text{camada amortecedora}} + \Delta T_{\text{núcleo turbulento}}$$



$$\frac{(T_s - T_\infty)}{q_s / (\rho c_p u_\tau)} = \Delta T_{subcamada}^+ + \Delta T_{camada amortecedora}^+ + \Delta T_{núcleo turbulento}^+$$

$$T^+ = \underbrace{\int_0^5 \mathbf{Pr} d y^+}_{\Delta T_{subcamada}^+} + \underbrace{\int_5^{30} \frac{d y^+}{1/\mathbf{Pr} + (1/\mathbf{Pr}_t)(y^+/5 - 1)}}_{\Delta T_{camada amortecedora}^+} + \underbrace{\int_{30}^{corrente livre} \frac{\mathbf{Pr}_t}{1/(du^+ / dy^+)} d y^+}_{\Delta T_{núcleo turbulento}^+}$$

$$\Delta T_{subcamada}^+ = 5 \mathbf{Pr} \qquad \Delta T_{camada amortecedora}^+ = 5 \mathbf{Pr}_t \ln \left(5 \frac{\mathbf{Pr}}{\mathbf{Pr}_t} + 1 \right)$$

$$\Delta T_{núcleo turbulento}^+ = \int_{u^+(y^+=30)}^{corrente livre} \mathbf{Pr}_t d u^+ = \mathbf{Pr}_t \left[u_\infty^+ - u^+(y^+=30) \right] = \mathbf{Pr}_t \left[u_\infty^+ - 5(1 + \ln 6) \right]$$

para \mathbf{Pr}_t constante

logo a diferença de temperatura é

$$\frac{(T_s - T_\infty)}{q_s / (\rho c_p u_\tau)} = 5 \left[\mathbf{Pr} - \mathbf{Pr}_t + \mathbf{Pr}_t \ln \left(\frac{5 \mathbf{Pr} / \mathbf{Pr}_t + 1}{6} \right) \right] + \mathbf{Pr}_t u_\infty^+$$



O coeficiente de transferência de calor pode ser determinado a partir da equação acima, já que

$$h (T_S - T_\infty) = q_S \qquad \frac{(T_S - T_\infty)}{q_S} = \frac{1}{h}$$

$$\frac{(T_S - T_\infty)}{q_S l(\rho c_p u_\tau)} = \frac{(\rho c_p u_\tau)}{h} = \frac{1}{St} \frac{u_\tau}{U_\infty} = \frac{1}{St} \frac{1}{u_\infty^+}$$

número de Stanton $St = \frac{h}{\rho c_p U_\infty} \qquad St = \frac{\mathbf{Nu}_L}{\mathbf{Pr Re}_L}$

$$T_\infty^+ = \frac{(T_S - T_\infty)}{q_S l(\rho c_p u_\tau)} = \frac{(\rho c_p u_\tau)}{h} = \frac{k}{h L} \frac{\mu c_p}{k} \frac{\rho U_\infty L}{\mu} \frac{u_\tau}{U_\infty} \Rightarrow T_\infty^+ = \frac{\mathbf{Pr Re}_L}{\mathbf{Nu}_L} \frac{1}{u_\infty^+}$$



combinando com a diferença de temperatura obtida e rearrumando, temos

$$\frac{Nu_L}{Re_L Pr^{1/3}} = \frac{1}{u_\infty^{+2}} \frac{Pr^{2/3}}{Pr_t + 5 / u_\infty^+ \{Pr - Pr_t + Pr_t \ln[(5 Pr / Pr_t + 1) / 6]\}}$$

mas
$$u_\infty^{+2} = \frac{U_\infty^2}{u_\tau^2} = \frac{\rho U_\infty^2}{\tau_s} = \frac{2}{C_f}$$

$$\frac{Nu_L}{Re_L Pr} = \frac{C_f}{2} \frac{1}{Pr_t + 5(C_f / 2)^{1/2} \{Pr - Pr_t + Pr_t \ln[(5 Pr / Pr_t + 1) / 6]\}}$$

Próximo a parede

$$Pr_t \approx 1 \quad \frac{Nu_L}{Re_L Pr} = \frac{C_f}{2} \frac{1}{1 + 5(C_f / 2)^{1/2} \{Pr - 1 + \ln[(5 Pr + 1) / 6]\}}$$



- A analogia entre a transferência de calor e coeficiente de atrito representada pela equação anterior não é restrita a escoamento paralelo sobre uma placa plana.
- Também pode ser utilizada para calcular a transferência de calor de superfícies imersas em correntes externas na presença de gradientes de pressão não muito grandes, e até mesmo para escoamentos compressíveis.
- Também pode ser utilizada em escoamentos internos em dutos circulares.
- Contudo não pode ser aplicada para metais líquidos, que apresentam baixo número de Prandtl, já que os efeitos da condutividade térmica molecular é apreciável no núcleo turbulento.

Coeficiente de Transferência de Calor em Placa Plana



Em um escoamento paralelo de um fluido com $\text{Pr} \approx 1$ sobre uma placa plana com temperatura constante, o coeficiente de transferência de calor turbulento pode ser obtida da analogia de Reynolds como

$$\frac{Nu_L}{\text{Re}_L \text{Pr}} = \frac{C_f}{2}$$

Para determinar o coeficiente de transferência de calor, precisamos determinar a tensão cisalhante na parede (isto é, o coeficiente de atrito).

As expressões anteriores para determinação do perfil de velocidade são de difícil utilização, pode-se então utilizar um perfil mais simples, obtido empiricamente para avaliar a velocidade na região da camada limite no regime turbulento

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$



Infelizmente, este perfil não é adequado para avaliar a tensão cisalhante na parede, pois prevê

$$\partial \bar{u} / \partial y = \infty$$

na parede. Recomenda-se a utilização do seguinte perfil empírico

$$\tau_s = 0,0233 \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/4} \quad \text{para } Re_x > 5 \times 10^5$$

A espessura da camada limite pode ser estimada a partir da seguinte correlação empírica

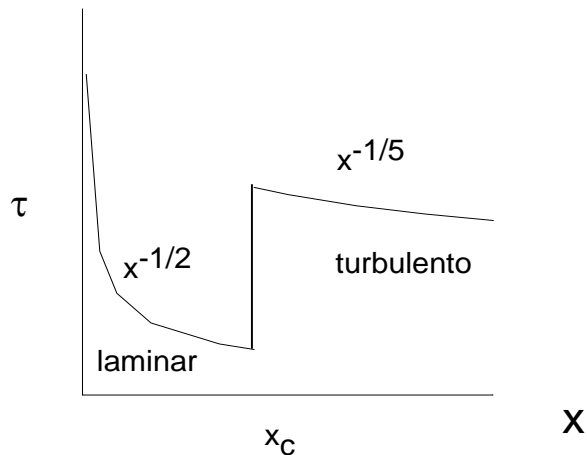
$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,381}{Re_x^{1/5}} - \frac{10\,270}{Re_x}$$

O coeficiente de atrito local pode ser obtido por

$$Cf(x) = \frac{\tau_s(x)}{\rho U_\infty^2 / 2} \quad Cf(x) = \frac{0,0592}{Re_x^{1/5}} \quad \text{para } 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$$



A variação da tensão ao longo da superfície encontra-se ilustrada na figura abaixo. Para determinar a força resultante em uma placa é preciso levar em consideração que na parte anterior da placa, $x < x_c$ o regime é laminar e a tensão cai com $x^{-1/2}$, e em x_c ocorre uma mudança de regime, a transferência de quantidade de movimento cresce, e a tensão cisalhante cresce substancialmente, passando a cair com $x^{-1/5}$



A força sobre a placa é

$$F = \overline{\tau_s} A_s = \int \tau_s(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_{A_s} C_f(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^L C_f(x) b dx =$$
$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} \left[\int_0^{x_c} C_{f_{\text{lam}}}(x) b dx + \int_{x_c}^L C_{f_{\text{turb}}}(x) b dx \right] = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \overline{C_{fL}} A_s$$



$$\overline{Cf_L} = \frac{1}{L} \left[\int_0^L Cf_{\text{turb}}(x) dx - \int_0^{x_c} [Cf_{\text{turb}}(x) - Cf_{\text{lam}}(x)] dx \right]$$

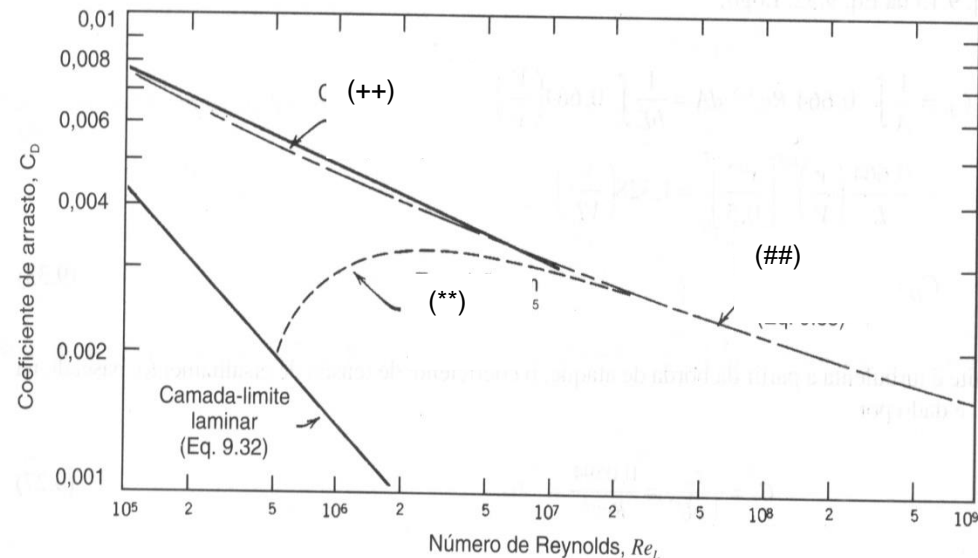
$$\overline{Cf_L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L} \quad \text{para } 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 (**)$$

$$\overline{Cf_L} = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} - \frac{1610}{Re_L} \quad \text{para } 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^9$$

Se $x_c \ll L$
a camada limite sobre a placa é praticamente toda turbulenta, pode-se então aproximar o coeficiente de atrito médio para

$$\overline{Cf_L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} \quad (++)$$

$$\overline{Cf_L} = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}} \quad (##)$$





Substituindo o coeficiente de atrito local

$$C_f(x) = \frac{0,0592}{\text{Re}_x^{1/5}}$$

na analogia de Reynolds, temos

$$\frac{Nu_x}{\text{Re}_x \text{ Pr}} = St = \frac{C_f}{2} = \frac{0,0296}{\text{Re}_x^{1/5}}$$

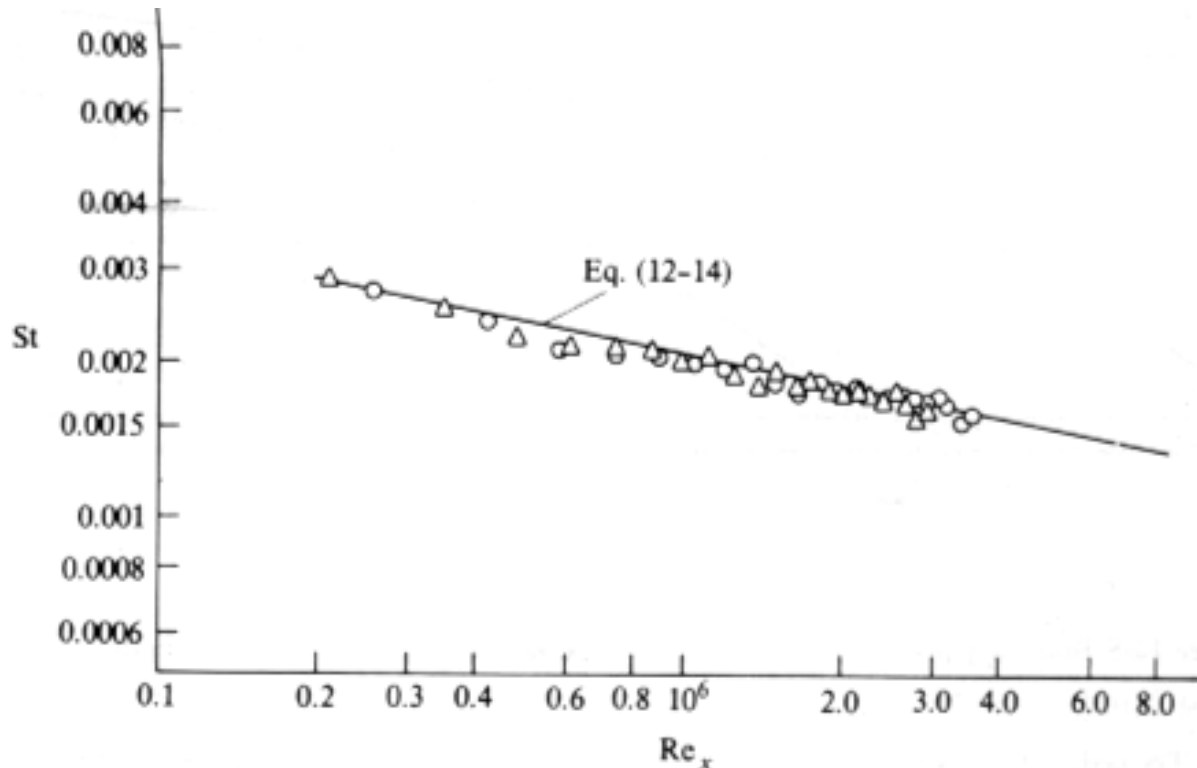


Figure 12-4 Air flow along a plate with constant free-stream velocity and surface temperature (data of Reynolds et al.²).

$$Nu_x = 0,0296 \text{ Re}_x^{0,8} \text{ Pr} \quad \text{para } 5 \times 10^5 < \text{Re}_x < 10^7 \quad \text{e } 0,5 < \text{Pr} < 1,0$$



O fluxo de calor sobre placa é

$$Q = \overline{q_s} A_s = \int q_s(x) dA_s \Rightarrow \overline{q_s} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h(x) (T_s - T_\infty) dA_s = \frac{(T_s - T_\infty)}{L} \int_0^L h(x) dx$$

o coeficiente de transferência de calor médio deve levar em consideração que no começo da placa, a camada limite é laminar

$$\frac{\overline{q_s}}{(T_s - T_\infty)} = \overline{h}_L = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_c} h_{lam}(x) dx + \int_{x_c}^L h_{turb}(x) dx \right]$$

$$\overline{h}_L = \frac{1}{L} \left[\int_0^L h_{turb}(x) dx - \int_0^{x_c} (h_{turb}(x) - h_{lam}(x)) dx \right]$$

$$Nu_{lam}(x) = \frac{h_{lam}(x) x}{k} = \frac{Cf(x)}{2} \mathbf{Re}_x \mathbf{Pr}^{1/3} = \frac{0,332}{\mathbf{Re}_x^{1/2}} \mathbf{Re}_x \mathbf{Pr}^{1/3} = 0,332 \mathbf{Re}_x^{1/2} \mathbf{Pr}^{1/3}$$

$$Nu_{turb}(x) = \frac{h_{turb}(x) x}{k} 0,0296 \mathbf{Re}_x^{0,8} \mathbf{Pr}$$



$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h} L}{k} = \left[\int_0^L \frac{Nu_{turb}(x)}{x} dx - \int_0^{x_c} \frac{[Nu_{turb}(x) - Nu_{lam}(x)]}{x} dx \right]$$

$$\overline{Nu}_L = \int_0^L \frac{0,0296 \mathbf{Re}_x^{0,8} \mathbf{Pr}}{x} dx - \int_0^{x_c} \frac{0,0296 \mathbf{Re}_x^{0,8} \mathbf{Pr} - 0,332 \mathbf{Re}_x^{0,5} \mathbf{Pr}^{1/3}}{x} dx$$

$$\overline{Nu}_L = 0,037 \mathbf{Re}_L^{0,8} \mathbf{Pr} - \left[0,037 \mathbf{Re}_c^{0,8} \mathbf{Pr} - 0,664 \mathbf{Re}_c^{0,5} \mathbf{Pr}^{1/3} \right]$$

$$\mathbf{Re}_c = 5 \times 10^5$$

Escoamento com Velocidade da Corrente Livre Constante sobre uma Placa Semi-infinita com Comprimento Inicial não Aquecido

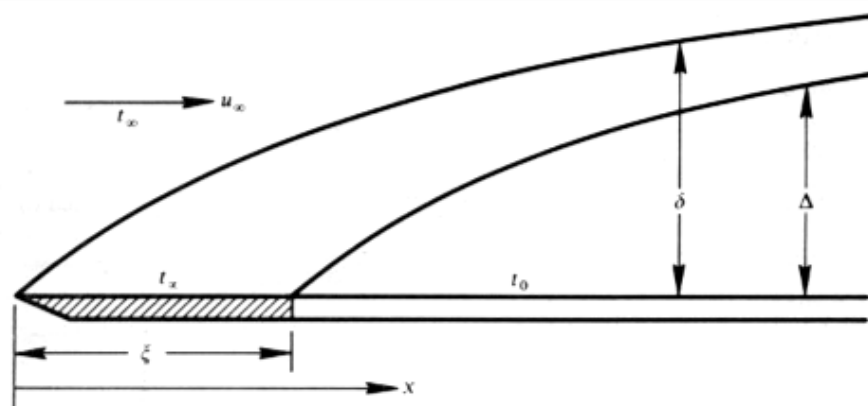


Figure 12-5 Boundary-layer development on a plate with an unheated starting length.

Na região da camada limite, o perfil de velocidade e temperatura podem ser avaliados com

$$\frac{\bar{u}}{U_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \frac{T_s - \bar{T}}{T_s - \bar{T}_{\infty}} = \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7}$$



O número de Stanton local na parede é

$$St = \frac{q_s / (\rho c_p u_\infty)}{(T_s - T_\infty)} = \frac{C_f}{2} \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^{-1/7}$$

Introduzindo o fato de que a espessura da camada limite varia com a potência 4/5, obtém-se

$$St_x = \frac{C_f}{2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \quad St_x \mathbf{Pr}^{0,4} = 0,0296 \mathbf{Re}_x^{-0,2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}$$

Uma aproximação que pode ser mais conveniente é

$$\frac{Nu_x}{\mathbf{Re}_x \mathbf{Pr}^{0,6}} = St_x \mathbf{Pr}^{0,4} = 0,0296 \mathbf{Re}_x^{-0,2} \left(1 - \frac{\xi}{x} \right)^{0,12}$$



Escoamento com Velocidade da Corrente Livre Constante sobre uma Placa Semi-infinita com Fluxo de Calor Constante Especificado

Neste caso, a distribuição do coeficiente de transferência de calor pode ser obtida de

$$\frac{Nu_x}{Re_x Pr^{0,6}} = St_x Pr^{0,4} = 0,030 Re_x^{-0,2}$$

Este resultado é 4% mais alto do que o caso com temperatura de parede constante. Note que no caso laminar esta diferença foi de 36%

A camada limite turbulenta é muito menos sensível a variações da temperatura da superfície que a camada limite laminar.

Para altos números de Prandtl, esta afirmação é mais verdadeira ainda, enquanto para baixos números de Prandtl, os grandes efeitos do tipo laminar reaparecem.

Camada Limite com Transpiração



Neste caso, define-se um parâmetro de injeção como

$$\frac{St}{St_o} = \frac{\ln(1 + B_h)}{B_h} \quad B_h = \frac{v_o / U_\infty}{St} = \frac{\dot{m}'' / G_\infty}{St}$$

Vimos que
$$\frac{Nu_x}{Re_x Pr} = St_o = \frac{C_f}{2} = \frac{0,0296}{Re_x^{1/5}}$$

Para gases, obtém-se a seguinte expressão

$$St Pr^{0,4} = \frac{0,0296}{Re_x^{1/5}} \frac{\ln(1 + B_h)}{B_h}$$

Para uma mesma coordenada x , com mesmo número de Reynolds, a equação acima apresenta excelente concordância com dados experimentais para o caso de velocidade constante da corrente livre.



Podemos apresentar o número de Stanton como função do número de Reynolds baseado na espessura da entalpia,

$$\Delta_2 = \frac{\int_0^{\infty} u (T - T_{\infty}) dy}{U_{\infty} (T_s - T_{\infty})} = \Delta \int_0^1 \frac{u}{U_{\infty}} \frac{(T - T_{\infty})}{(T_s - T_{\infty})} d\left(\frac{y}{\Delta}\right)$$

$$St_x \mathbf{Pr}^{0,5} = 0,0125 \mathbf{Re}_{\Delta_2}^{-0,25} \left[\frac{\ln(1 + B_h)}{B_h} \right]^{1,25} (1 + B_h)^{0,25}$$

definido St_o como o número de Stanton sem transpiração correspondente ao mesmo valor de Re_{Δ_2}

$$\left. \frac{St_x}{St_o} \right|_{\Delta_2} = \left[\frac{\ln(1 + B_h)}{B_h} \right]^{1,25} (1 + B_h)^{0,25}$$

- A faixa de aplicação da equação anterior é muito grande, e a mesma equação pode ser aplicada para C_f/C_{f_0} se B_h for substituído por B_f .
- O gráfico abaixo, ilustra uma comparação obtida com diferentes de operação. Observa-se uma excelente concordância entre os resultados medidos e a correlação apresentada.

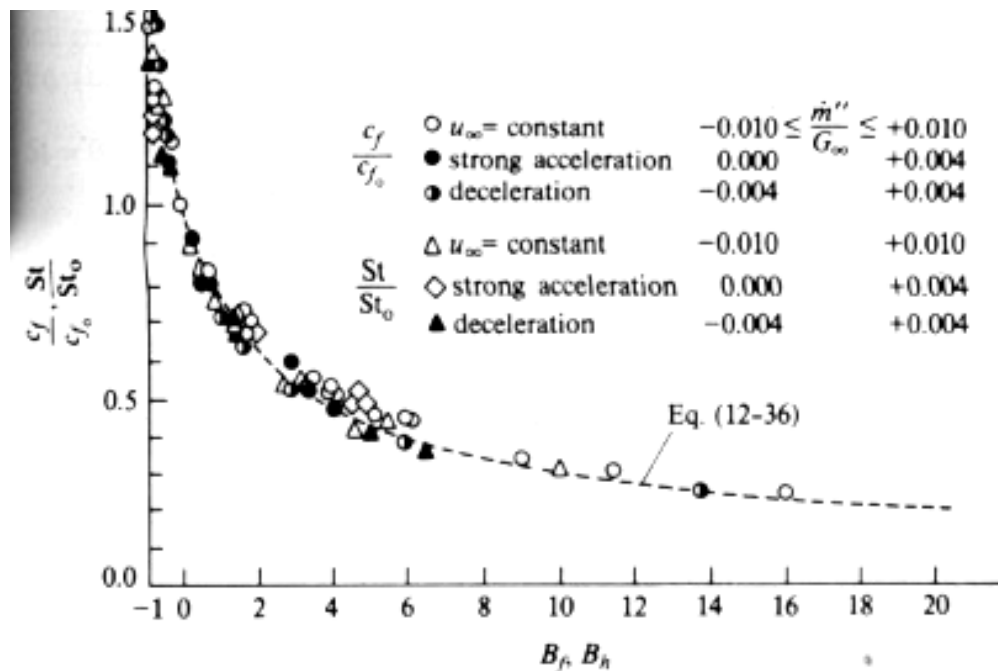


Figure 12-6 The effect of transpiration on Stanton number and friction coefficient for a wide range of flows [data of Kays and Moffat⁶ (air)].



- A figura a seguir mostra um exemplo de um degrau na injeção, seguida de uma razão constante de injeção \dot{m}'' / G_∞

- A equação $St_x \text{Pr}^{0,5} = 0,0125 \text{Re}_{\Delta_2}^{-0,25} \left[\frac{\ln(1+B_h)}{B_h} \right]^{1,25} (1+B_h)^{0,25}$

representa bem os dados experimentais, mesmo próximo ao degrau.

- Note que o efeito da transpiração na camada limite é de reduzir substancialmente o número de Stanton, e portanto reduzir o coeficiente de transferência de calor

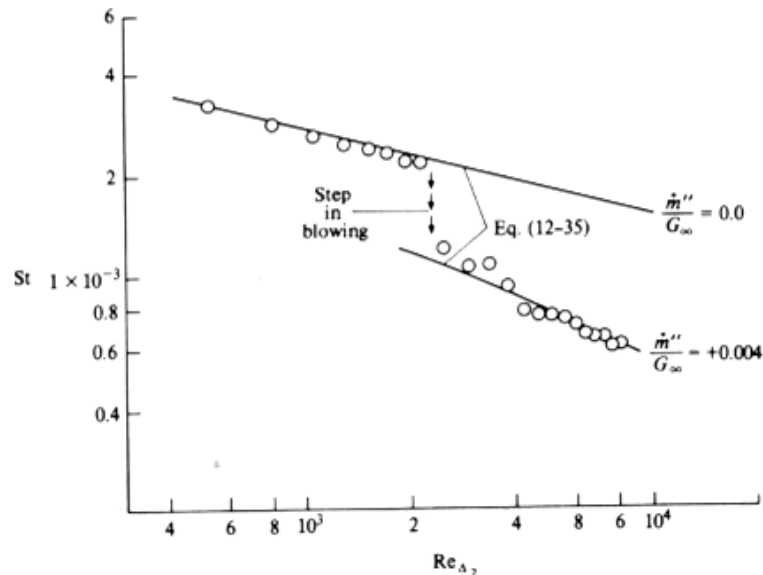


Figure 12-7 The response of Stanton number to a step increase in blowing [data of Kays and Moffat⁶ (air)].



Número de Prandtl Turbulento

Mostrou-se anteriormente que a analogia de Reynolds é equivalente a $Pr_t=1$. De acordo com evidências experimentais, pelo menos para o ar, Pr_t realmente é próximo de 1, sendo que um valor próximo a 0,9 é mais correto ao longo de quase toda a camada limite e bem acima de 1 é observado bem próximo à parede.

O número de Prandtl turbulento é difícil de medir com precisão. A figura ilustra o efeito do gradiente de pressão adverso na camada limite. Observa-se que no núcleo turbulento, a aproximação de Prandtl turbulento constante é satisfatória, porém falhando próximo à parede.

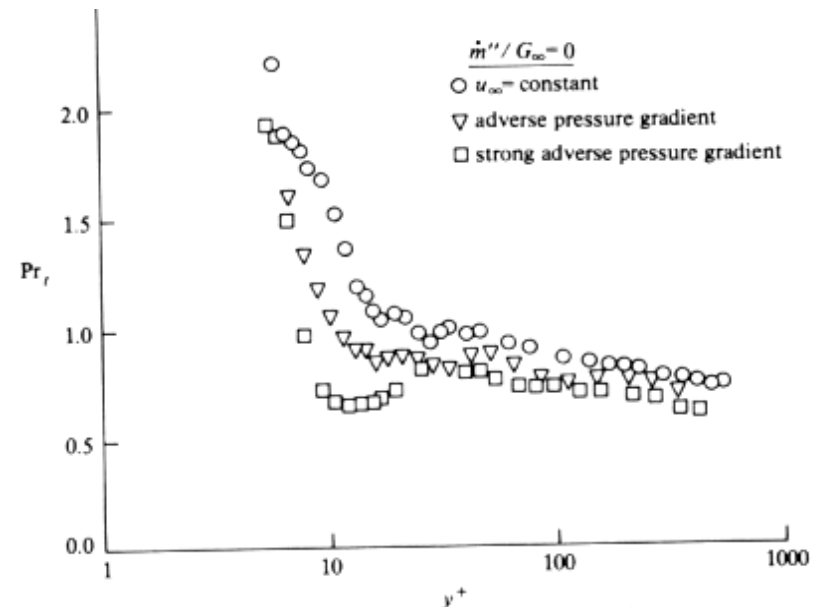


Figure 12-9 Turbulent Prandtl-number variation through the boundary layer (data of Blackwell¹ for air).



- Observa-se que realmente \mathbf{Pr}_t é aproximadamente da ordem de 1, de tal forma que a analogia de Reynolds, com sua simplicidade, é uma boa representação da realidade
- Próximo à parede \mathbf{Pr}_t apresenta valores mais altos, decaindo e ficando constante na região da lei da parede e na parte externa da camada limite.
- Observa-se um pequeno efeito do gradiente de pressão em \mathbf{Pr}_t . Já dados experimentais mostram que a transpiração praticamente não influencia \mathbf{Pr}_t .
- Note que altos valores de \mathbf{Pr}_t próximo à parede ocorrem dentro da sub-camada onde o mecanismo de transferência turbulenta é menos importante que a difusão molecular.



- Altos números de Prandtl na sub-camada indicam que na sub-camada, a transferência de quantidade de movimento é maior que a de energia por mecanismos turbulentos.
- A expressão a seguir, representa relativamente bem \mathbf{Pr}_t sobre todo o espectro de números de Prandtl, com a tendência correta próxima à parede

$$\mathbf{Pr}_t = \frac{1}{\frac{1}{2\mathbf{Pr}_{t\infty}} + C Pe_t \sqrt{\frac{1}{\mathbf{Pr}_{t\infty}} - (C Pe_t)^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{C Pe_t \sqrt{\mathbf{Pr}_{t\infty}}}\right) \right]}$$

onde $Pe_t = (\mu_t/\mu) \mathbf{Pr}$

$\mathbf{Pr}_{t,\infty}$ = constante, é o valor de \mathbf{Pr} longe da parede

C = constante empírica

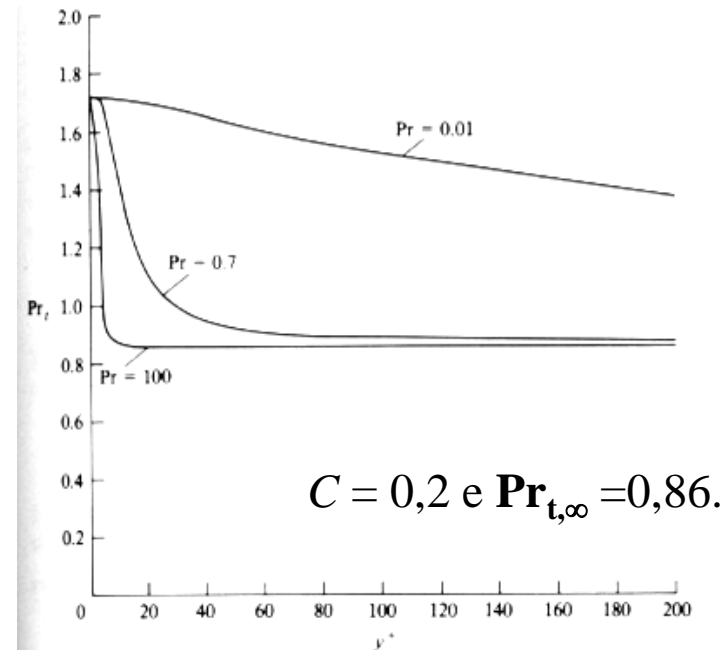


Figure 12-11 The results of Eq. (12-41) for constant free-stream velocity and no pressure gradient in the law-of-the-wall region.

Fator de Recuperação para Escoamento Turbulento



O fator de recuperação para escoamento turbulento é definido da mesma forma que para escoamento laminar, como

$$r = \frac{T_{aw} - T_{\infty}}{U_{\infty}^2 / (2 c_p)}$$

onde T_{aw} é a temperatura que seria atingida na parede adiabática.

Medidas experimentais mostram que a camada limite muda de seu estado de regime laminar próximo a borda de ataque, onde $r = \text{Pr}^{1/2}$, e r cresce para um valor máximo ($\sim 0,89$ para ar) na transição de laminar para turbulento e então atinge um valor constante dado por

Medidas experimentais mostram que a camada limite muda de seu estado de regime laminar próximo a borda de ataque, onde $r = \text{Pr}^{1/2}$, e r cresce para um valor máximo ($\sim 0,89$ para ar) na transição de laminar para turbulento e então atinge um valor constante dado por

$$r = \text{Pr}^{1/3}$$

Para número de Prandtl diferente da unidade, o fator de recuperação pode ser avaliado por

$$r = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \left(\frac{\text{Pr}}{2 - \text{Pr}} \right)^{1/2} \arctan \left(\frac{2 - \text{Pr}}{\text{Pr}} \right)^{1/2} & \text{Pr} < 2 \\ \frac{4}{\pi} & \text{Pr} = 2 \\ \frac{4}{\pi} \left(\frac{\text{Pr}}{2 - \text{Pr}} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{1 + (1 - 2/\text{Pr})^{1/2}}{1 - (1 - 2/\text{Pr})^{1/2}} \right) & \text{Pr} > 2 \end{cases}$$

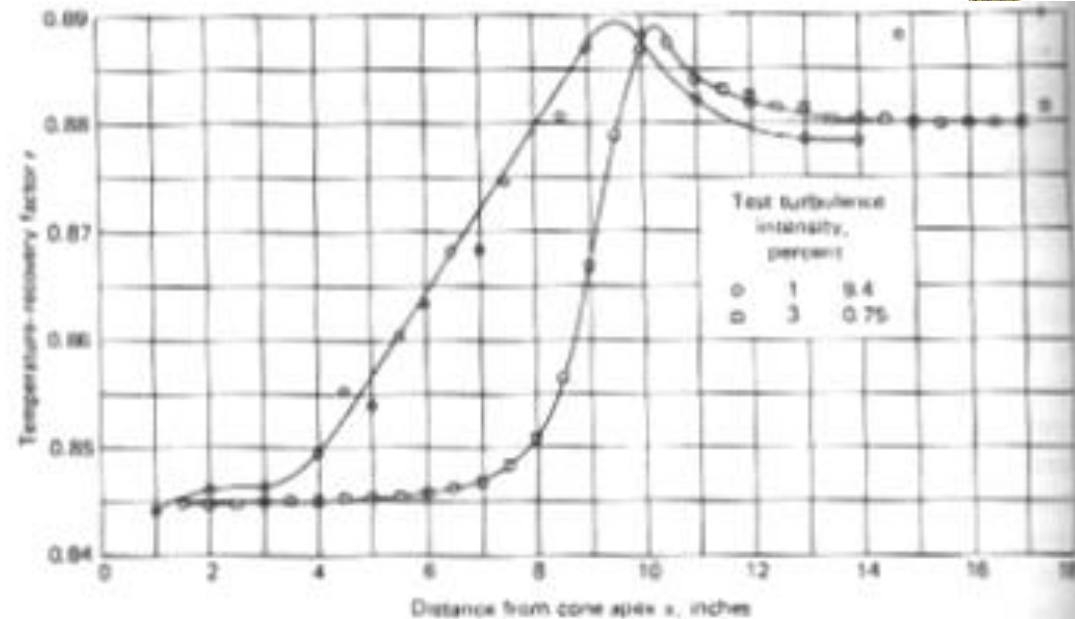


Figure 10-6 Measured recovery factor r on a cone in supersonic flow for determination of the point of laminar-to-turbulent transition. In laminar flow $r = \text{Pr}^{1/2} = 0.84$; the steep slope in the recovery factor versus distance from vertex plot indicates the location of the transition region. Curve 1 is at low turbulence intensity and curve 2, at high turbulence intensity. [By permission from J. C. Esvard, M. Tucker, and W. C. Burgess, *J. Aeronaut. Sci.* **21**, 731-738 (1954) [20].]