Soluções Integrais de Problemas de Camada Limite

- É um método simples. A solução não é exata, mas é precisa.
- O objetivo é determinar a tensão cisalhante τ_s e o fluxo de calor q_s'' sobre a superfície, de forma aproximada, sem ter que resolver as equações diferenciais governantes.

Primeiramente vamos introduzir uns **conceitos auxiliares**:

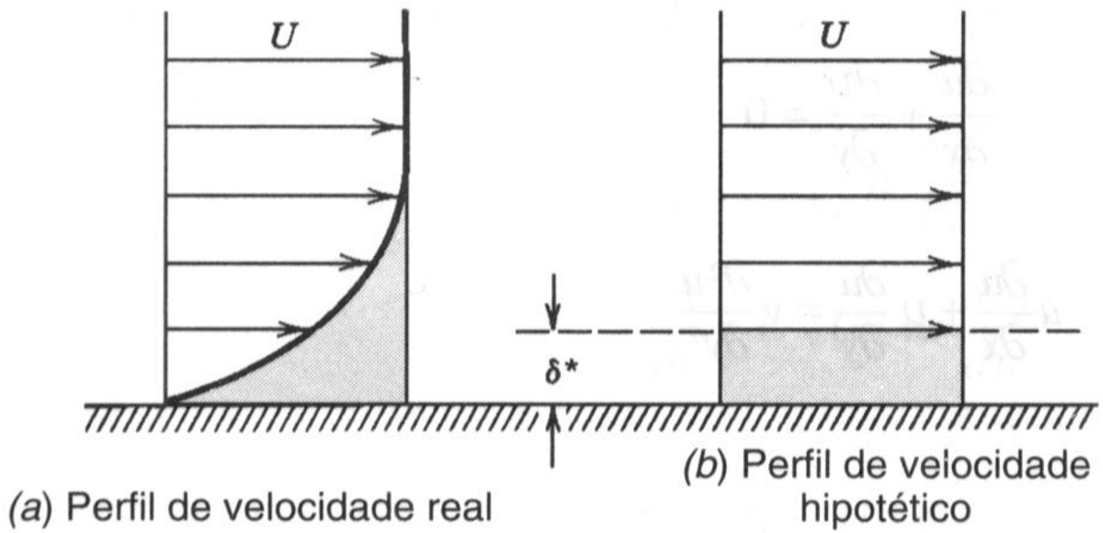
- Espessura de deslocamento: δ^*
- Espessura de quantidade de movimento: Δ^*
- Espessura térmica: Φ^*

Espessura de Deslocamento, δ^*

- A região da camada limite, é a região onde a velocidade apresenta gradientes acentuados, variando de zero a 99% de U_∞. Como a velocidade tende assintoticamente para U_∞. é difícil avaliar experimentalmente a espessura δ. Uma outra grandeza relacionada com a camada limite, mais fácil de ser avaliada experimentalmente é a espessura de deslocamento δ^*

- Sabemos que o efeito das forças viscosas na camada limite é retardar o escoamento. A vazão em massa adjacente a uma superfície sólida é inferior à aquela que passaria pela mesma região na ausência da camada limite. Se as forças viscosas estivessem ausentes, a velocidade numa seção seria U.

- A **espessura de deslocamento** δ^* é a distância da qual a fronteira sólida teria que ser deslocada num escoamento sem atrito para fornecer o mesmo déficit de vazão em massa que existe na camada limite. Deslocando a fronteira de uma distância δ^*, resultaria em uma deficiência de vazão em massa de $\rho\, U\, \delta^*\, b$, onde b é a largura da superfície



- Queremos que a vazão real seja igual a vazão na ausência da camada limite, dessa forma, conforme a figura

$$\dot{m} = \int_0^\infty \rho\, u\, b\, d\, y = \int_{\delta^*}^\infty \rho\, U\, b\, d\, y = \int_0^\infty \rho\, U\, b\, d\, y - \underbrace{\int_0^{\delta^*} \rho\, U\, b\, d\, y}_{\dot{m}_{deficit}}$$

$$\dot{m}_{deficit} = \rho\, U\, \delta^*\, b = \int_0^\infty \rho\,(U - u)\, b\, d\, y = \int_0^\delta \rho\,(U - u)\, b\, d\, y - \underbrace{\int_\delta^\infty \rho\,(U - u)\, b\, d\, y}_{zero}$$

$$\boxed{\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\, y}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\, \eta \qquad ; \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Espessura de Quantidade de Movimento, Δ^*

- De forma análoga ao déficit de vazão em massa devido ao efeito viscoso na camada limite, existe uma redução do fluxo de quantidade de movimento numa seção em comparação a um escoamento não viscoso.

- A **espessura de quantidade de movimento** Δ^* é definida com a espessura da camada de fluido com velocidade U, para a qual o fluxo de quantidade de movimento é igual ao déficit do fluxo de quantidade de movimento através da camada. Desta forma

$$\boxed{\Delta^* = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) d\,y}$$

$$\frac{\Delta^*}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) d\,\eta \qquad ; \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Espessura de Energia, Φ^*

- De forma análoga ao déficit de vazão em massa e de quantidade de movimento devido ao efeito viscoso na camada limite, existe uma redução do fluxo de energia numa seção em comparação a um escoamento não viscoso.

- A **espessura de energia Φ^*** é definida com a espessura da camada de fluido com temperatura T_∞, para a qual o fluxo de energia é igual ao déficit do fluxo de energia através da camada. Desta forma

$$\boxed{\Phi^* = \int_0^{\delta_T} \frac{u}{U_\infty} \frac{(T - T_\infty)}{(T_S - T_\infty)} dy}$$

$$\frac{\Phi^*}{\delta} = \int_0^{\delta_T/\delta} \frac{u}{U_\infty} \frac{(T - T_\infty)}{(T_s - T_\infty)} d\eta \quad ; \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

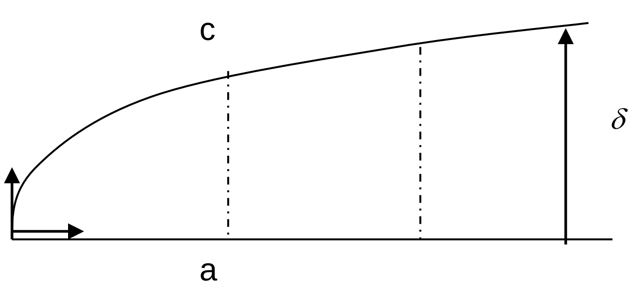
Soluções Integrais de Problemas de Camada Limite

- A solução não é exata, mas é precisa.
- O objetivo é determinar a tensão cisalhante τ_s e o fluxo de calor q_s'' sobre a superfície. De acordo com as definições

$$\tau_S = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg)_{y=0} \qquad q_S'' = k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg)_{y=0}$$

só é necessário conhecer as derivadas na parede.

Vamos integrar as equações da camada limite ao longo de sua espessura δ



Primeiramente vamos combinar a equação de conservação de quantidade de movimento linear e energia com a equação de conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{d\,U_\infty}{d\,x} + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2)$$

$$\rho\, c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \qquad (3)$$

Equação (2)+ u * Equação (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u\, v}{\partial y} = U_\infty \frac{d\,U_\infty}{d\,x} + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (4)$$

Equação (3)+ T * Equação (1) e dividindo por ρ $c_p \Rightarrow$

$$\frac{\partial\, u\, T}{\partial x} + \frac{\partial\, v\, T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\upsilon}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \qquad (5)$$

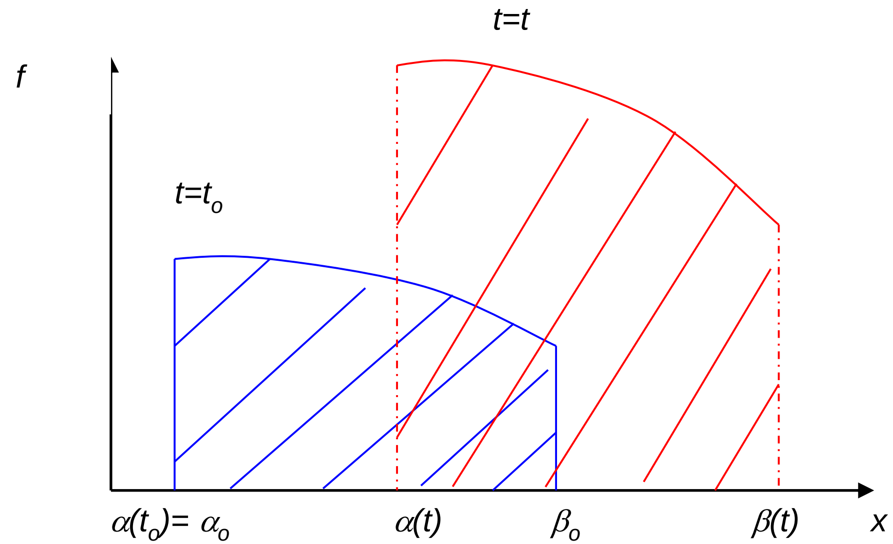
Integrando a equação (4) ao longo da espessura da camada limite, tem-se

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial u\, v}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_\infty \frac{d\, U_\infty}{d\, x} dy + \int_0^\delta \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + \underbrace{u\, v\big)_\delta}_{U_\infty\, v_\delta} - \underbrace{u\, v\big)_0}_{zero} = U_\infty \frac{d\, U_\infty}{d\, x}\, \delta + \underbrace{\upsilon \frac{\partial\, u}{\partial y}\bigg)_\delta}_{\substack{zero \\ (perfil \\ assintótico)}} - \underbrace{\upsilon \frac{\partial\, u}{\partial y}\bigg)_0}_{\frac{\tau_s}{\rho}} \qquad (6)$$

Para integrar o primeiro termo, vamos aplicar a Regra de Leibnitz

REGRA DE LEIBNITZ



Deseja-se calcular $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$ onde em $t=t_o$ $\alpha_o \le x \le \beta_o$

em $t=t$ $\alpha(t) \le x \le \alpha(t)$

Pode-se estabelecer uma relação biunívoca entre cada ponto no intervalo $[\alpha_o \ , \beta_o]$ com um correspondente em $[\alpha(t) \ , \beta(t)]$, isto é $x = x(x_o, t)$ ou $x_o = x_o(x, t)$

$$dx = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x_o}}_{J} dx_o + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\substack{zero \\ ao\,longo\, t=cte}} dt \qquad\qquad dx = J\; dx_o$$

Utilizando-se mudança de variáveis, tem-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\; dx = \frac{d}{dt}\int_{\alpha_o}^{\beta_o} f(x_o,t)\; J\; dx_o$$

Como α_o , β_o independem de t $\Rightarrow$ $$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\; dx = \int_{\alpha_o}^{\beta_o} \frac{d}{dt}\left[f(x_o,t)\; J\; \right] dx_o$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\; dx = \int_{\alpha_o}^{\beta_o}\left[J\,\frac{d\,f}{dt} + f\,\frac{d\,J}{dt}\right] dx_o = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{d\,f}{dt} + \frac{f}{J}\,\frac{d\,J}{dt}\right] \underbrace{J\; dx_o}_{dx} \qquad (7)$$

aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d\,f}{d\,t}=\frac{\partial\,f}{\partial\,t}+\frac{\partial\,f}{\partial\,x}\frac{d\,x}{d\,t}$$

adicionalmente, tem-se que

$$\frac{1}{J}\frac{d\,J}{dt}=\frac{1}{J}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,x_o}\right)=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\,x_o}\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$$

aplicando a regra da cadeia

$$\frac{1}{J}\frac{d\,J}{dt}=\frac{1}{J}\left[\underbrace{\frac{\partial\,x}{\partial\,x_o}}_{J}\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)+\underbrace{\frac{\partial\,t}{\partial\,x_o}}_{zero}\frac{\partial}{\partial\,t}\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)$$

Substituindo na equação (7) tem-se

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial\,f}{\partial\,t}+\frac{\partial\,f}{\partial\,x}\frac{d\,x}{d\,t}+f\,\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)\right]dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial\,f}{\partial\,t}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial\,x}\left(f\,\frac{d\,x}{d\,t}\right)dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial\,f}{\partial\,t}\,dx+f(\beta,t)\frac{d\,x(\beta,t)}{d\,t}-f(\alpha,t)\frac{d\,x(\alpha,t)}{d\,t}$$

Note que *dx/dt* é a derivada de *x* em relação a *t* mantendo-se x_o constante, isto é, é a taxa de variação da posição *x* que corresponde ao ponto x_o. Conseqüentemente, como a posição α corresponde a α_o e β corresponde a β_o

$$\frac{d\ x(\beta,t)}{d\ t}=\frac{d\ \beta}{d\ t} \quad ; \quad \frac{d\ x(\alpha,t)}{d\ t}=\frac{d\ \alpha}{d\ t}$$

REGRA DE LEIBNITZ

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial\ f}{\partial\ t}dx+f(\beta,t)\frac{d\ \beta}{d\ t}-f(\alpha,t)\frac{d\ \alpha}{d\ t}}$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz ao primeiro termo da equação (7), onde

$f=u^2$, tem-se

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\, dy = \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + u^2(x,\delta)\frac{d\,\delta}{d\,x} - 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\, dy - U_\infty^2 \frac{d\,\delta}{d\,x}$$

Substituindo na equação (6)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\, dy - U_\infty^2 \frac{d\,\delta}{d\,x} + U_\infty\, v_\delta = U_\infty \frac{d\,U_\infty}{d\,x}\,\delta - \frac{\tau_s}{\rho} \qquad (8)$$

Vamos agora estimar v_δ

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

Para isso, vamos integrar a equação da continuidade (1) ao longo da espessura da camada limite.

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy}_{v_\delta - v_o} = 0 \qquad (9)$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz ao primeiro termo , onde $f=u$, tem-se

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u\, dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + u(x,\delta)\frac{d\delta}{dx} - 0 \Rightarrow \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u\, dy - U_{\infty}\frac{d\delta}{dx}$$

Substituindo na equação (9)

$$v_{\delta} = v_o + U_{\infty}\frac{d\delta}{dx} - \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u\, dy$$

Voltando a equação de quantidade de movimento (eq. 8),

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u^2\, dy - \cancel{U_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx}} + U_{\infty}\left[v_o + \cancel{U_{\infty}\frac{d\delta}{dx}} - \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u\, dy\right] = \frac{dU_{\infty}}{dx}\underbrace{U_{\infty}\,\delta}_{\int_0^{\delta} U_{\infty}\, dy} - \frac{\tau_s}{\rho}$$

Vamos rearranjar o termo $$U_\infty \left[\frac{d}{d\,x} \int_0^\delta u\, dy \right]$$

$$U_\infty \left[\frac{d}{d\,x} \int_0^\delta u\, dy \right] = \frac{d}{d\,x}\left(U_\infty \int_0^\delta u\, dy \right) - \frac{dU_\infty}{d\,x}\left[\int_0^\delta u\, dy \right] = \frac{d}{d\,x}\left(\int_0^\delta U_\infty\, u\, dy \right) - \frac{dU_\infty}{d\,x} \int_0^\delta u\, dy$$

então

$$\frac{d}{d\,x} \int_0^\delta u(u - U_\infty)\, dy + U_\infty\, v_o = \frac{dU_\infty}{d\,x} \int_0^\delta (U_\infty - u)\, dy - \frac{\tau_s}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\tau_s + \rho\, U_\infty\, v_o}{\rho} = \frac{dU_\infty}{d\,x} U_\infty \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy + \frac{d}{d\,x}\left[U_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \right]} \qquad (10)$$

Utilizando os conceitos de espessura de deslocamento δ^* e de quantidade de movimento Δ^*, podemos rescrever a equação (10) como

$$\frac{\tau_s + \rho\, U_\infty\, v_o}{\rho} = \frac{dU_\infty}{d\,x} U_\infty\, \delta^* + \frac{d}{d\,x}\left[U_\infty^2\, \Delta^*\right]$$

Equação integral da camada limite
(Equação de Von Kármán e Pohlhausen)

- Para determinar a tensão cisalhante na parede, precisamos obter a espessura de deslocamento e de quantidade de movimento.
- Estas grandezas dependem do perfil de velocidade e podem ser obtidas de forma aproximada a partir de um perfil estimado para a velocidade.
- Vamos no entanto, primeiro obter a equação integral da camada limite térmica

Solução Integral da Camada Limite Térmica

Integrando na espessura da camada limite a equação (5)

$$\int_o^{\delta_T} \frac{\partial\, u\, T}{\partial x}\, dy + \underbrace{\int_0^{\delta_T} \frac{\partial\, v\, T}{\partial y}\, dy}_{\int d(vT) = T_\infty v_{\delta_T} - T_s v_o} = \int_0^{\delta_T} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\, dy + \int_0^{\delta_T} \frac{\upsilon}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

Aplicando a Regra de Leibnitz ao 1º. termo, onde *f*= *u T*

$$\frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy = \int_0^{\delta_T} \frac{\partial\, u\, T}{\partial\, x}\, dy + u_{\delta_T} \underbrace{T_{\delta_T}}_{T_\infty} \frac{d\, \delta}{d\, x} - 0 \Rightarrow \int_0^{\delta_T} \frac{\partial\, u\, T}{\partial\, x}\, dy = \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy - u_{\delta_T} T_\infty \frac{d\, \delta_T}{d\, x}$$

O 3º. termo é

$$\int_0^{\delta_T} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\, dy = \frac{k}{\rho\, c_p} [\underbrace{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\delta_T}}_{zero} - \underbrace{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_o}_{q''_s / k}] = \frac{q''}{\rho\, c_p}$$

O 4º. termo é

$$\int_0^{\delta_T} \frac{\upsilon}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\upsilon}{c_p} \underbrace{\int_0^{\delta_T / \delta} \left(\frac{\partial u / U_\infty}{\partial \eta} \right)^2 d\eta}_{\Lambda}$$

Para determinar de avaliar o 2º. termo é preciso determinar o valor de v_{δ_T} o que pode ser obtido ao integrar a continuidade zero a δ_T resulta

$$v_{\delta_T} = v_o + u_{\delta_T} \frac{d\,\delta_T}{d\,x} - \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,dy$$

Substituindo, a equação fica

$$\frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,T\,dy - \cancel{u_{\delta_T}\,T_\infty \frac{d\,\delta_T}{d\,x}} + T_\infty \left[v_o + \cancel{u_{\delta_T} \frac{d\,\delta_T}{d\,x}} - \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,dy \right] - T_s v_o =$$

$$= \frac{q''}{\rho\,c_p} + \frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\upsilon}{c_p} \Lambda$$

mas $$T_\infty \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,dy = \frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,T_\infty dy - \frac{dT_\infty}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,dy$$

$$\frac{d}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,(T - T_\infty)\,dy + \frac{dT_\infty}{d\,x} \int_0^{\delta_T} u\,dy = \frac{q'' + \rho\,c_p\,v_o (T_s - T_\infty)}{\rho\,c_p} + \frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\upsilon}{c_p} \Lambda$$

Trabalhando o 1º termo

$$\frac{d}{d\,x}\int_0^{\delta_T} u\,(T-T_\infty)\,dy=\frac{d}{d\,x}\left\{[U_\infty(T_s-T_\infty)]\int_0^{\delta_T}\frac{u}{U_\infty}\,\frac{(T-T_\infty)}{(T_s-T_\infty)}\,dy\right\}$$

Introduzindo a espessura de energia Φ*

$$\frac{d}{d\,x}\int_0^{\delta_T} u\,(T-T_\infty)\,dy=\frac{d}{d\,x}\left\{[U_\infty(T_s-T_\infty)]\Phi^*\right\}$$

A equação da energia fica igual a

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{d\,x}[U_\infty\,\Phi^*(T_s-T_\infty)]+U_\infty\,\delta\,\frac{dT_\infty}{d\,x}\int_0^{\delta_T/\delta}\frac{u}{U_\infty}\,d\eta=\\&=\frac{q''+\rho\,c_p\,v_o(T_s-T_\infty)}{\rho\,c_p}+\frac{U_\infty^2}{\delta}\,\frac{\upsilon}{c_p}\int_0^{\delta_T/\delta}\left[\frac{d}{d\,\eta}\left(\frac{u}{U_\infty}\right)\right]^2 d\eta\end{aligned}}$$

A tensão cisalhante e o fluxo de calor na parede pode ser obtidos a partir de

$$\tau_s = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \left.\frac{\partial\ u/U_\infty}{\partial\ \eta}\right|_{\eta=0} \qquad q_s'' = -k \frac{T_s - T_\infty}{\delta} \left.\frac{\partial\theta}{\partial\ \eta}\right|_{\eta=0}$$

$$\frac{\tau_s + \rho U_\infty v_o}{\rho} = \frac{dU_\infty}{d\,x} U_\infty \delta^* + \frac{d}{d\,x}\left[U_\infty^2 \Delta^*\right]$$

$$\frac{d}{d\,x}[U_\infty \Phi^* (T_s - T_\infty)] + U_\infty \delta \frac{dT_\infty}{d\,x} \int_0^{\delta_T/\delta} \frac{u}{U_\infty} d\eta =$$

$$= \frac{q'' + \rho c_p v_o (T_s - T_\infty)}{\rho c_p} + \frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\upsilon}{c_p} \int_0^{\delta_T/\delta} \left[\frac{d}{d\,\eta}\left(\frac{u}{U_\infty}\right)\right]^2 d\eta$$

- A tensão cisalhante e o fluxo de calor na parede dependem da espessura de deslocamento, de quantidade de movimento e de energia.
- Estas grandezas dependem do perfil de velocidade e temperatura

Perfil estimado de velocidade na região da camada limite

Vamos supor que para o **regime laminar** de escoamento o perfil de velocidade adimensional u/U_∞ pode ser dado por um perfil cúbico de $\eta = y/\delta$

$$\frac{u}{U_\infty} = a + b\,\frac{y}{\delta} + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Devemos determinar as constantes a, b, c e d de tal forma que o perfil acima satisfaça as seguintes condições de contorno para a velocidade u

Condições de contorno

(1) $y = 0 \rightarrow u = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ (2) $y = \delta \rightarrow u = U_\infty \quad \Rightarrow \quad 1 = b + c + d$ (*)

(3) $y = \delta \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty\left[\frac{b}{\delta} + \frac{2\,c}{\delta}\,\frac{y}{\delta} + \frac{3\,d}{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \quad \Rightarrow \quad b = -2\,c - 3\,d$ (+)

(4) $y = 0 \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty\left[\frac{2\,c}{\delta^2} + \frac{6\,d}{\delta^2}\,\frac{y}{\delta}\right] \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$$\left(\text{em}\ \ y = 0 \Rightarrow \underbrace{u\,\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{zero}} + \underbrace{v\,\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{zero}} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$b = 3/2 \quad ; \quad d = -1/2$

Perfil de velocidade aproximado

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

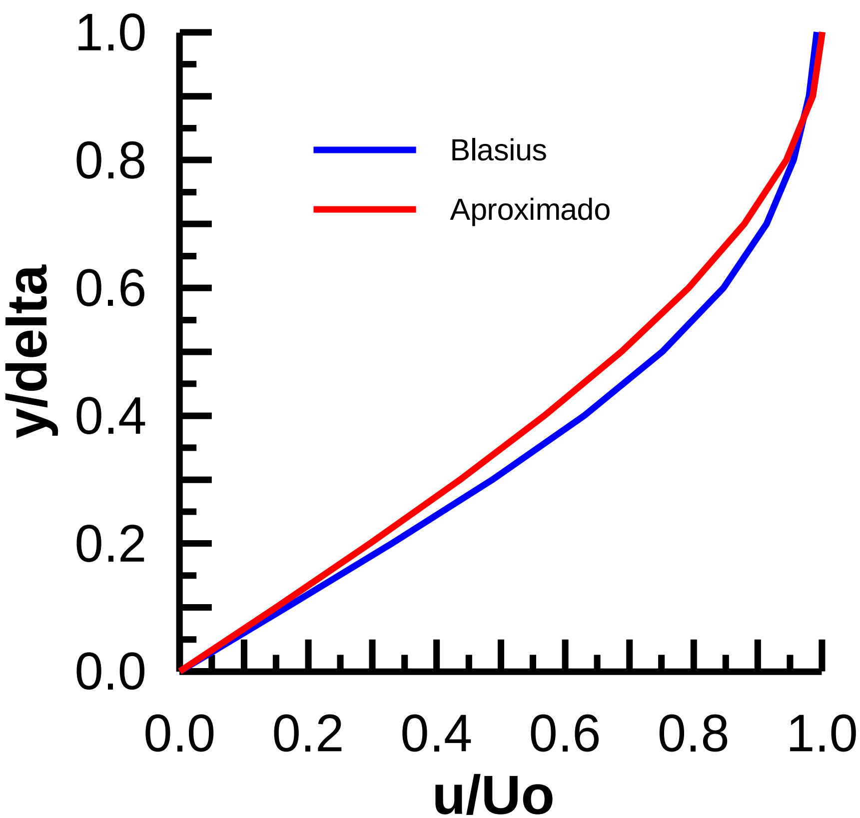
Perfil de Eckert

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

A tensão cisalhante na parede é

$$\tau_s = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \frac{\partial\, u/U_\infty}{\partial\, \eta}\bigg|_{\eta=0}$$

$$\boxed{\tau_s = \frac{3}{2}\mu \frac{U_\infty}{\delta}}$$



Perfil estimado de temperatura na região da camada limite

Vamos supor que para o **regime laminar** de escoamento o perfil de temperatura adimensional $\theta=(T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$ pode ser dado por um perfil quadrático de $\xi = y/\delta_T = \delta/\delta_T \; y/\delta = \eta/\zeta$ onde $\eta = y/\delta$ e $\zeta = \delta_T/\delta$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = a + b\,\frac{y}{\delta_T} + c\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2$$

Devemos determinar as constantes a, b e c de tal forma que o perfil acima satisfaça as seguintes condições de contorno para a temperatura *T*

Condições de contorno

(1) $y = 0 \rightarrow \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$ (2) $y = \delta \rightarrow \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + b + c$

(3) $y = \delta \rightarrow \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = (T_s - T_\infty)\left[\dfrac{b}{\delta_T} + \dfrac{2c}{\delta_T}\dfrac{y}{\delta_T}\right] \quad \Rightarrow \quad b = -2c$

$b = -2 \quad ; \quad c = 1$

Perfil de temperatura aproximado

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = 1 - 2\,\frac{y}{\delta_T} + \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2$$

$$\xi = \frac{y}{\delta_T} = \frac{y}{\delta}\,\frac{\delta}{\delta_T} = \frac{\eta}{\zeta} \qquad \eta = \frac{y}{\delta} \qquad \zeta = \frac{\delta_T}{\delta}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = 1 - \frac{2\;\eta}{\zeta} + \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2$$

Fluxo de calor na parede é

$$q_s'' = -\,k\,\frac{T_s - T_\infty}{\delta}\,\frac{\partial\theta}{\partial\,\eta}\bigg|_{\eta=0}$$

$$q_s'' = 2\,k\,\frac{T_s - T_\infty}{\delta\;\zeta}$$

Gradiente de temperatura

$$\frac{\partial\theta}{\partial\,\eta} = -\,\frac{2}{\zeta} - \frac{2\;\eta}{\zeta^2}$$

Podemos agora avaliar δ^* ; Δ^* e Φ^*

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) d\eta = \left[\eta - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\Delta^*}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2} - \frac{9}{4}\eta^2 + \frac{3}{4}\eta^4 + \frac{3}{4}\eta^4 - \frac{\eta^6}{4}\right) d\eta = \frac{39}{280}$$

$$\Phi^* = \delta \int_0^{\delta_T/\delta} \frac{u}{U_\infty} \frac{(T - T_\infty)}{(T_S - T_\infty)} d\eta = \delta \int_0^{\zeta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right)\left[1 - \frac{2\,\eta}{\zeta} + \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2\right] d\eta =$$

$$= \delta \int_0^{\zeta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 - 3\eta\,\frac{\eta}{\zeta} + \eta^3\,\frac{\eta}{\zeta} + \frac{3}{2}\eta\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^3\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2\right) d\eta =$$

$$\delta\left(\frac{3}{4}\zeta^2 - \frac{1}{8}\zeta^4 - \zeta^2 + \frac{1}{5}\zeta^4 + \frac{3}{8}\zeta^2 - \frac{1}{12}\zeta^4\right) = \frac{\delta}{8}\left(\zeta^2 - \frac{\zeta^4}{15}\right) \approx \frac{\delta}{8}\zeta^2$$

- A tensão cisalhante na parede pode ser obtida a partir de

$$\frac{\tau_s + \rho U_\infty v_o}{\rho} = \frac{dU_\infty}{d\,x} U_\infty \delta^* + \frac{d}{d\,x}\left[U_\infty^2 \Delta^*\right]$$

$$\tau_s = \frac{3}{2}\mu \frac{U_\infty}{\delta} \qquad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{8} \qquad \frac{\Delta^*}{\delta} = \frac{39}{280}$$

Perfil cúbico de Eckert

Combinando as equações anteriores, determina-se a espessura da camada limite e finalmente a tensão cisalhante na parede

$$\frac{\frac{3}{2}\mu \frac{U_\infty}{\delta} + \rho\, U_\infty\, v_o}{\rho} = \frac{3}{8}\delta\; U_\infty \frac{d\,U_\infty}{d\,x} + \frac{d}{d\,x}\left(U_\infty^2 \frac{39}{280}\delta\right)$$

Para uma placa plana com parede impermeável (v_o=0) e sem gradiente de pressão , U_∞=cte, então

$$\frac{3}{2}\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{\delta} = U_\infty^2 \frac{39}{280}\frac{d\;\delta}{d\,x} \qquad \delta\frac{d\;\delta}{d\,x} = \frac{140}{13}\frac{x}{\mathbf{Re}_x} \qquad \frac{1}{2}\frac{d\;\delta^2}{d\,x} = \frac{140}{13}\frac{x}{\mathbf{Re}_x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\,\delta^2}{d\,x}=\frac{140}{13}\frac{x}{\mathbf{Re}_x}$$

$$\delta^2=\frac{280}{13}\frac{\upsilon}{U_\infty}\underbrace{\int_0^x dx}_{x}=\frac{280}{13}\frac{\upsilon}{U_\infty x}x^2=\frac{280}{13}\frac{x^2}{\mathbf{Re}_x}$$

Resultando em

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4{,}64}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}$$

$$Cf(x)=\frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho\,U_\infty^2}=\frac{\frac{3}{2}\mu\,\frac{U_\infty}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho\,U_\infty^2}=\frac{0{,}646}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}$$

como vimos a solução “exata”de Blasius é

$$\frac{\delta}{x}=\frac{5}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}$$

$$Cf(x)=\frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho\,U_\infty^2}=\frac{0{,}664}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}$$

- O fluxo de calor na parede pode ser obtida a partir de

$$\frac{d}{dx}[U_\infty \Phi^* (T_s - T_\infty)] + U_\infty\, \delta \frac{dT_\infty}{dx} \int_0^{\delta_T/\delta} \frac{u}{U_\infty}\, d\eta =$$

$$= \frac{q'' + \rho\, c_p\, v_o (T_s - T_\infty)}{\rho\, c_p} + \frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\upsilon}{c_p} \int_0^{\delta_T/\delta} \left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{u}{U_\infty} \right) \right]^2 d\eta$$

$$q_s'' = 2\,k\, \frac{T_s - T_\infty}{\delta\ \zeta} \qquad \frac{\Phi^*}{\delta} = \frac{1}{8}\left(\zeta^2 - \frac{\zeta^4}{15} \right)$$

Perfil cúbico de Eckert + quadrático de temperatura

Neste caso, ainda é preciso avaliar duas integrais que dependem do campo de velocidade

$$\int_0^{\delta_T/\delta} \frac{u}{U_\infty}\, d\eta = \int_0^{\zeta} \frac{u}{U_\infty}\, d\eta = \int_0^{\zeta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \right) d\eta = \frac{3}{4}\zeta^2 - \frac{1}{8}\zeta^4 = \frac{\zeta^2}{8}(6 - \zeta^2)$$

Na presença da dissipação

$$\int_0^{\zeta}\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{u}{U_\infty}\right)\right]^2 d\eta=\int_0^{\zeta}\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3\right)\right]^2 d\eta=\int_0^{\zeta}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\eta^2\right)^2 d\eta=$$

$$=\frac{9}{4}\int_0^{\zeta}\left(1-2\eta^2+\eta^4\right)d\eta=\frac{9}{4}\left(\zeta-\frac{2}{3}\zeta^3+\frac{\zeta^5}{5}\right)=\frac{9\,\zeta}{4}\left(1-\frac{\zeta^2}{15}\left(10-3\zeta^2\right)\right)$$

Resultando em

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\delta}{8}U_\infty(T_s-T_\infty)\left(\zeta^2-\frac{\zeta^4}{15}\right)\right]+\delta\;U_\infty\frac{d\,T_\infty}{d\,x}\frac{\zeta^2}{8}(6-\zeta^2)$$

$$=\frac{2\,k\,\dfrac{T_s-T_\infty}{\delta\;\zeta}+\rho\;c_p\,v_o(T_s-T_\infty)}{\rho\;c_p}+\frac{U_\infty^2}{\delta}\frac{\upsilon}{c_p}\frac{9\,\zeta}{4}\left(1-\frac{\zeta^2}{15}(10-3\zeta^2)\right)$$

Analisando o caso de <u>temperatura da parede constante: T_s=cte,</u> parede é impermeável $v_o=0$; U_∞=cte ; T_∞=cte e que não há dissipação viscosa, então

$$\frac{U_\infty}{8}\,(T_s - T_\infty)\,\frac{d}{dx}\left[\delta\left(\zeta^2 - \frac{\zeta^4}{15}\right)\right] = \frac{2\,k}{\rho\;c_p}\,\frac{T_s - T_\infty}{\delta\;\zeta}$$

$$\delta\;\zeta\,\frac{d}{dx}\left[\delta\left(\zeta^2 - \frac{\zeta^4}{15}\right)\right] = \frac{16\,\alpha}{U_\infty}$$

$$\delta\;\zeta\,\frac{d}{dx}[\delta\,\zeta^2] \approx \frac{16\,\alpha}{U_\infty}$$

derivando de acordo com a regra da cadeia

$$\zeta\,\delta\,\zeta^2\,\frac{d\,\delta}{d\,x} + \zeta\,\delta^2\,2\,\zeta\,\frac{d\zeta}{dx} = 16\,\frac{\alpha}{U_\infty}$$

$$\zeta^3\;\delta\,\frac{d\,\delta}{d\,x} + 2\,\zeta^2\delta^2\,\frac{d\zeta}{dx} = 16\,\frac{\alpha}{U_\infty}$$

Mas vimos que $\delta\,\dfrac{d\,\delta}{d\,x} = \dfrac{140}{13}\,\dfrac{x}{\mathbf{Re}_x}$ e $\dfrac{\delta}{x} = \dfrac{4{,}64}{\sqrt{\mathbf{Re}_x}}$ $\Rightarrow$ $\delta^2 = \dfrac{(280/13)\,x}{U_\infty/\upsilon}$

substituindo

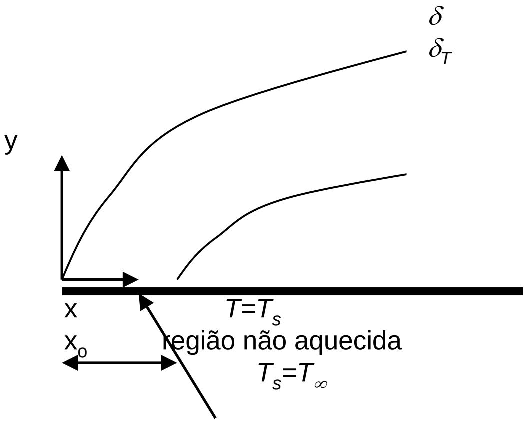
$$\zeta^3 \; \frac{140/13}{U_\infty/\upsilon} + 2\,\zeta^2 \frac{(280/13)\;x}{U_\infty/\upsilon}\frac{d\zeta}{dx} = 16\frac{\alpha}{U_\infty}$$

rearrumando e lembrando que **Pr**=υ/α

$$4\,\zeta^2 \frac{(140/13)\;x}{16}\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{\mathbf{Pr}} - \zeta^3 \; \frac{140/13}{16}$$

Separando variáveis para integrar

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{4\,x} = \int_0^{\zeta} \frac{35/52\;\;\zeta^2}{35/52\;\;\zeta^3 - 1/\mathbf{Pr}}\,d\zeta$$



O 1º termo é $$-\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{4\,x} = \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/4}$$

Para o 2º termo, vamos fazer uma mudança de variável

$$\gamma = 35/52\,\zeta^3 - 1/\mathbf{Pr} \Rightarrow d\gamma = 3\times 35/52\quad \zeta^2\,d\zeta$$

Podemos reescrever o 2º. termo

$$\Pi = \int_{-1/\mathbf{Pr}}^{\gamma} \frac{d\gamma/3}{\gamma} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\gamma}{-1/\mathbf{Pr}}\right) = \ln\left(\frac{\gamma}{-1/\mathbf{Pr}}\right)^{1/3} = \ln\left(1-\mathbf{Pr}\,35/52\,\zeta^3\right)^{1/3}$$

$$(x_0/x)^{1/4} = \left(1-\mathbf{Pr}\,\zeta^3 35/52\right)^{1/3} \qquad \left[1-(x_0/x)^{3/4}\right] = \mathbf{Pr}\,\zeta^3 35/52$$

$$\boxed{\zeta = \frac{\delta_T}{\delta} = \mathbf{Pr}^{-1/3}\left(\frac{35}{52}\right)^{-1/3}\left[1-(x_0/x)^{3/4}\right]^{1/3}} \qquad \zeta = \frac{\delta_T}{\delta} \approx 1{,}14\,\mathbf{Pr}^{-1/3}\left[1-(x_0/x)^{3/4}\right]^{1/3}$$

O fluxo de calor na parede é

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}\bigg)_{y=0} = -k(T_s - T_\infty)\frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg)_{y=0} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg)_{y=0} = -\frac{2}{\zeta\,\delta}$$

$$q'' = k(T_s - T_\infty)\frac{2}{\zeta\,\delta}$$

O número de Nusselt é

$$\mathbf{Nu}_x = \frac{h\,x}{k} = \frac{q''\,x}{k\,(T_s - T_\infty)} = \frac{2\,x}{\zeta\,\delta} = \frac{2\sqrt{\mathbf{Re}_x}}{\sqrt{280/13}}\,\mathbf{Pr}^{1/3}\left(\frac{35}{52}\right)^{1/3}\left[1-(x_0/x)^{3/4}\right]^{-1/3}$$

$$\mathbf{Nu}_x = 0{,}378\,\mathbf{Re}_x^{1/2}\,\mathbf{Pr}^{1/3}\left[1-(x_0/x)^{3/4}\right]^{-1/3}$$

Se x_o=0 $\Rightarrow$ $\mathbf{Nu}_x = 0{,}378\,\mathbf{Re}_x^{1/2}\,\mathbf{Pr}^{1/3}$

o valor exato da constante é 0,332 (erro de 13%)