

# ESCOAMENTOS EM DESENVOLVIMENTO TÉRMICO



## ■ Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano  $\mathbf{T} = \mu \dot{\gamma}$
2. Propriedades constantes:  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $k$  e  $c_p$  constantes
3. Regime permanente:  $\partial/\partial t = 0$
4. Hidrodinamicamente desenvolvido:  $\partial/\partial x = 0$
5. Bi-dimensional, simetria angular:  $u_\theta = 0$ ,  $\partial/\partial \theta = 0$
6. escoamento laminar
7. Validade da Lei de Fourier
8. Sem geração de calor

Vimos que com estas hipóteses,  $u_r=0$



# Problema térmico

## Equação de conservação de energia

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \underbrace{\dot{q}}_{\text{zero (11)}} + \mathbf{div}(k \mathbf{grad} T) + \underbrace{\beta T \frac{Dp}{Dt}}_{\text{zero (2) } (\rho=\text{cte})} + \mu \Phi$$

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right] = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} \right] + \mu \Phi$$

dissipação viscosa  $\Phi = \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} \nabla \bullet \vec{u} \right] : \nabla \vec{u}$

incompressível  $\Phi = \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] : \nabla \vec{u}$

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] + \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2 +$$

$$+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2$$



# dissipação viscosa      incompressível

$$\Phi = 2 \underbrace{\left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ u_r=0}} + 2 \underbrace{\left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ u_r=u_\theta=0}} + 2 \underbrace{\left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ (4)}} + \underbrace{\left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ u_r=u_\theta=0}} +$$

$$+ \underbrace{\left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ (4) \quad \text{zero} \\ u_\theta=0}} + \underbrace{\left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2}_{\substack{\text{zero} \\ u_r=0}} \quad \Phi = \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2$$

$$\rho c_p \left[ \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{zero (3)}} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \underbrace{u_r \frac{\partial T}{\partial r}}_{\text{zero (} u_r=0 \text{)}} + \underbrace{u_\theta \frac{\partial T}{r \partial \theta}}_{\text{zero (5)}} \right] =$$

$$= k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2}}_{\text{zero (5)}} \right] + \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2$$



$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} 1) \quad x = 0 &\Rightarrow T = T_o & 3) \quad r = R &\Rightarrow T = T_s & \text{ou} & -k \frac{\partial T}{\partial r} = q''_s \\ 2) \quad r = 0 &\Rightarrow T \text{ é finito} & 4) \quad x = x_{max} & T ? \end{aligned}$$

Para avaliar a importância dos diversos termos, vamos adimensionalizar esta equação com

$$U = \frac{u_x}{u_m} \quad \eta = \frac{r}{(D/2)} \quad \xi = \frac{x/(D/2)}{\mathbf{Re Pr}} \quad \phi = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} \quad \mathbf{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \quad \mathbf{E} = \frac{u_m^2}{c_p \Delta T_{ref}}$$



temos então

$$\frac{U}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\mathbf{Pe}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \mathbf{E Pr} \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2$$

com as seguintes condições de contorno:

$$1) \quad \xi = 0 \Rightarrow \quad \phi = \frac{T_o - T_{ref}}{\Delta T_{ref}} \quad 2) \quad \eta = 0 \Rightarrow \phi \text{ é finito}$$

$$3) \quad \eta = 1 \Rightarrow \quad \phi = \frac{T_s - T_{ref}}{\Delta T_{ref}} \quad \text{ou} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{q_s'' R}{k \Delta T_{ref}}$$

$$4) \quad \xi = \xi_{\max} \quad \phi ?$$



- ❑ Analisando a equação acima, vemos que se **Pe** for grande (**Pe** > 100) a condução axial é desprezível. Isto ocorre se **Re** for grande, ou **Pr** for grande ou ambos. Se **Pe** é pequeno, a condução axial é importante, mas nestes casos, em geral a maior parte de fonte de condução axial será através das paredes da tubulação.
  
- ❑ O número de Peclet é uma medida da importância relativa entre a convecção axial e condução axial. Do ponto de vista prático, **Pe** é pequeno somente se **Pr** é pequeno, como é o caso de metais líquidos.



□ Naturalmente que se  $\mathbf{E Pr}$  é pequeno, a dissipação viscosa pode ser desprezada. Isto pode ocorrer quando  $\mathbf{Pr}$  é pequeno,  $\mathbf{E}$  é pequeno ou ambos são pequenos. Para escoamentos com baixas velocidades, associados a escoamento laminar, em geral  $\mathbf{E}$  é pequeno, a não ser que a diferença de temperatura de referência seja inferior a  $u_m^2/c_p$

Desprezando a difusão axial e dissipação viscosa, temos

$$\frac{U}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

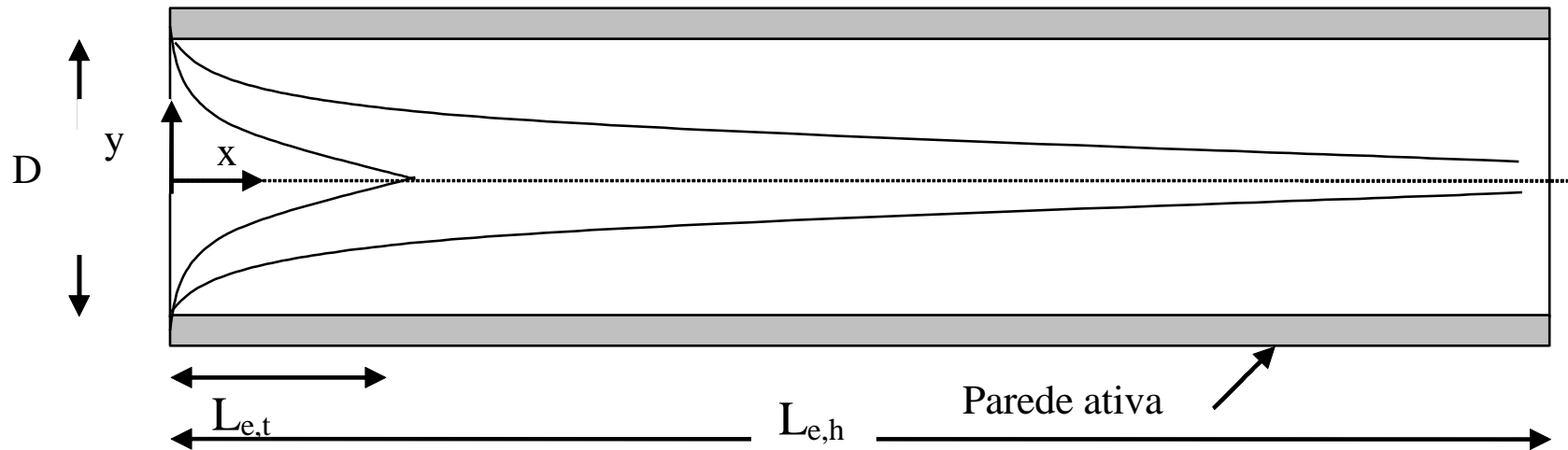


- ❑ Para resolver esta equação precisamos definir o campo de velocidade.
- ❑ Se o número de Prandtl for baixo, o desenvolvimento hidrodinâmico pode ser muito lento em relação ao térmico, e a aproximação de que o escoamento térmico se desenvolve na presença de um campo uniforme de velocidade pode ser utilizada. Por outro lado, se o Prandtl for alto, o desenvolvimento hidrodinâmico ocorre primeiro e o desenvolvimento térmico se dá na presença de um escoamento hidrodinâmico desenvolvido.





# Escoamento em desenvolvimento térmico, com perfil de velocidade uniforme



$$U = \frac{u}{u_m} = 1$$

$$\frac{U}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

Para resolver esta equação vamos utilizar separação de variáveis da seguinte forma

$$\phi(\xi, \eta) = X(\xi) R(\eta)$$



substituindo  $\frac{1}{2} R \frac{dX}{d\xi} = X \left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dR}{d\eta} \right) \right]$

e dividindo por  $X R$   $\underbrace{\frac{1}{2} \frac{X'}{X}}_{-\lambda^2} = \underbrace{\left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dR}{d\eta} \right) \right]}_{-\lambda^2} \frac{1}{R}$

$X' + 2 \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = C e^{-(2 \lambda^2 \xi)}$

$\left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dR}{d\eta} \right) \right] + \lambda^2 R = 0$  (Comparando com a forma básica da equação de Bessel )

$\left[ \frac{d}{d\eta} \left( p(\eta) \frac{dR}{d\eta} \right) \right] + [q(\eta) + w(\eta) \lambda^2] R = 0$   $p(\eta) = \eta$  (função peso)  
 $q(\eta) = 0$   $w(\eta) = \eta$

$R = C_1 J_0(\lambda \eta) + C_2 Y_0(\lambda \eta)$

onde  $J_0$  e  $Y_0$  são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo de ordem zero.



$$\phi(\xi, \eta) = X(\xi) R(\eta) = C e^{-(2\lambda^2 \xi)} [C_1 J_0(\lambda\eta) + C_2 Y_0(\lambda\eta)]$$

Para satisfazer a condição de contorno (2) de que a temperatura deve ser finita no centro da tubulação, concluímos que  $C_2 = 0$ , então

$$\phi = C e^{-(2\lambda^2 \xi)} J_0(\lambda\eta)$$

Para temperatura constante na parede, vamos

considerar que a temperatura de referência  $T_{ref} = T_s$

A diferença de temperatura de referência é  $\Delta T = (T_o - T_s)$

Neste caso, para satisfazer a condição de contorno (3),  $\eta = 1 \quad \phi = 0$

é necessário que  $J_0(\lambda) = 0$ , o que ocorre para

$\lambda = 2,4048; 5,5201; 8,6537; 11,7915; 14,9309, \dots$



Existe um número infinito de valores de  $\lambda$  que satisfazem as condições do problema, portanto cada uma delas deve ser considerada, portanto

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) e^{-(2 \lambda_n^2 \xi)} \quad \text{com} \quad J_0(\lambda_n) = 0$$

A condição de contorno (1),  
obriga que

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) = 1$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade das funções

$$\underbrace{\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) J_0(\lambda_m \eta) w(\eta) d\eta}_{\neq 0, \text{ se } m=n} = \int_0^1 J_0^2(\lambda_m \eta) w(\eta) d\eta \quad w(\eta) = \eta$$

$$C_n \int_0^1 \eta J_0^2(\lambda_n \eta) d\eta = \int_0^1 \eta J_0^2(\lambda_m \eta) d\eta \quad C_n = \frac{2 J_1(\lambda_n)}{\lambda_n [J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)]}$$

O que permite definir as constantes  $C_n$  como  $C_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$



A temperatura de mistura pode agora ser obtida

$$\phi_m = 2 \int_0^1 \phi \eta \, d\eta \quad \Rightarrow \quad \phi_m = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(-2 \lambda_n^2 \xi)}}{\lambda_n^2}$$

Para avaliar o número de Nusselt local é preciso avaliar o fluxo de calor na parede.

$$Nu_x = \frac{h_x D}{k} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2 \lambda_n^2 \xi)}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2 \lambda_n^2 \xi)} / \lambda_n^2}$$

O número de Nusselt médio da entrada até uma seção arbitrária  $\xi_L$  é

$$\overline{Nu}_{0-\xi_L} = \frac{1}{\xi_L} \int_0^{\xi_L} Nu_x \, d\xi$$

$$\xi_L = \frac{L(D/2)}{\mathbf{Re Pr}}$$

$$\overline{Nu}_{0-\xi_L} = -\frac{1}{\xi_L} \ln[\phi_m]$$



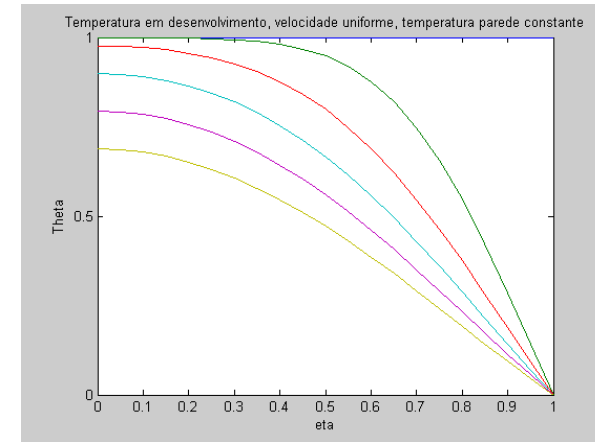
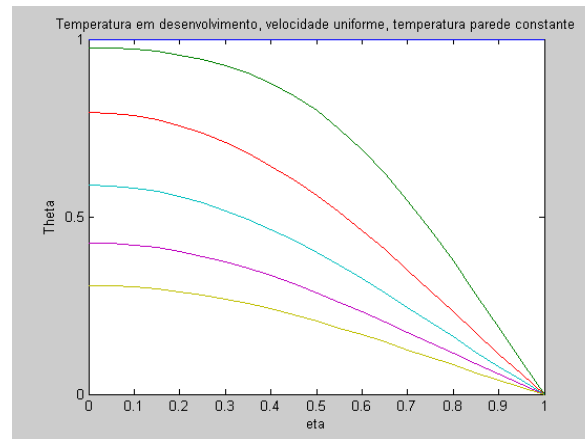
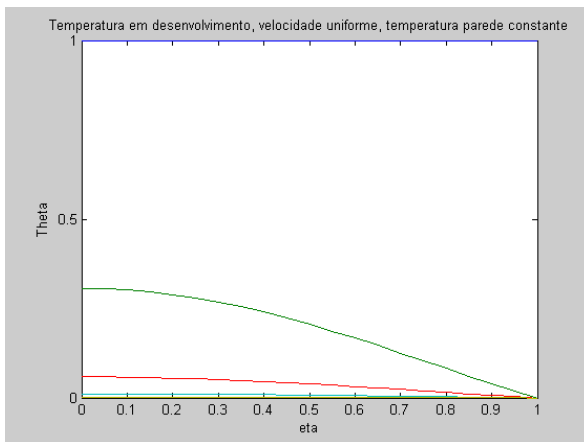
Para grandes valores de  $\xi$ , obtém-se  $Nu=5,7831$ , que é o mesmo valor que o número de Nusselt local no infinito (já obtido para escoamento desenvolvido).

$Pr = 0,7$

$Re = 100$

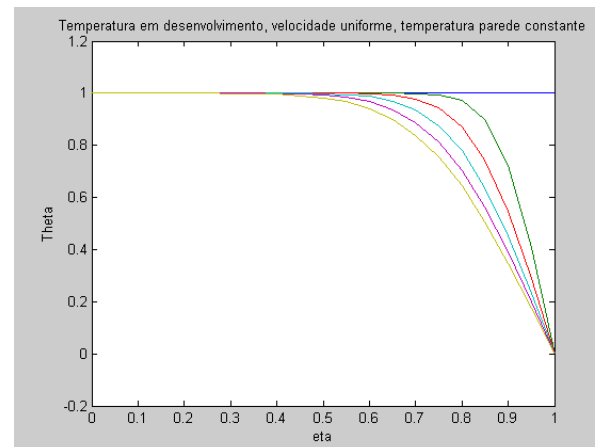
$Re=500$

$Re=1000$

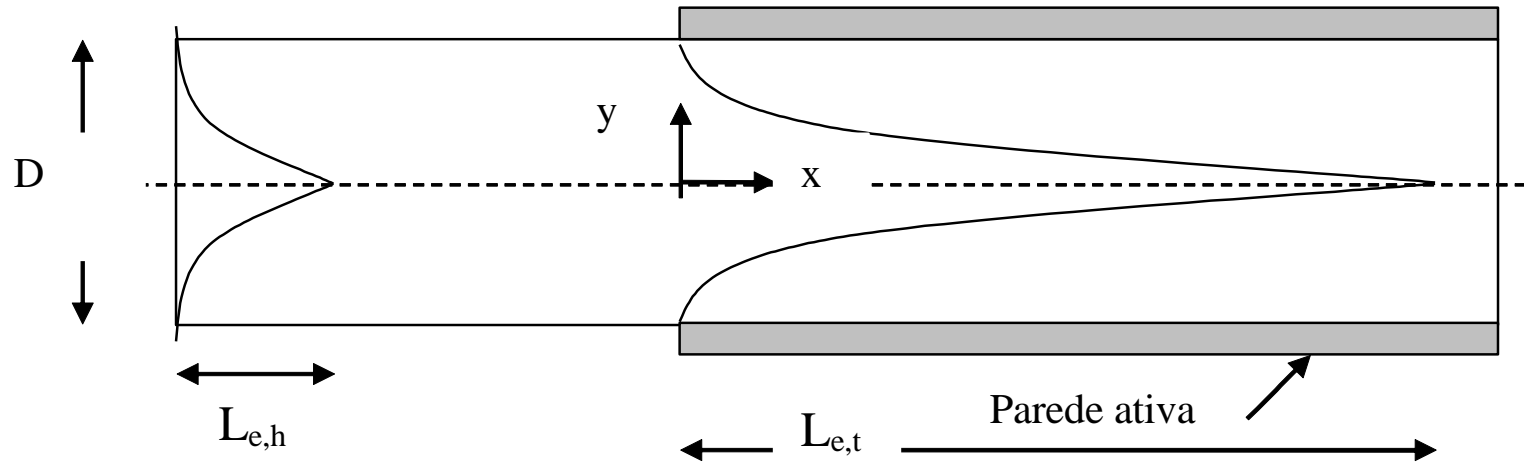


$Pr = 5$

$Re=1000$



## Escoamento em desenvolvimento térmico, com escoamento hidrodinamicamente desenvolvido



O desenvolvimento térmico na presença de escoamento desenvolvido pode ocorrer para altos números de Prandtl ou quando a parede só é aquecida após o desenvolvimento hidrodinâmico.

Vamos então analisar o desenvolvimento do escoamento térmico, na presença de um escoamento desenvolvido.



## Escoamento em desenvolvimento térmico, com escoamento hidrodinamicamente desenvolvido

Vimos que, o perfil de velocidade para escoamento hidrodinamicamente desenvolvido de um fluido Newtoniano com propriedade constantes, em regime laminar, em um duto de seção circular é

$$u_x = 2 u_m \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]$$

Para resolver esta equação vamos utilizar separação de variáveis da seguinte forma

$$\phi(\xi, \eta) = X(\xi) R(\eta)$$





substituindo e dividindo por  $X R (1-\eta^2)$

$$\underbrace{\frac{X'}{X}}_{-\lambda^2} = \underbrace{\left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dR}{\partial\eta} \right) \right]}_{-\lambda^2} \frac{1}{R(1-\eta^2)}$$

$$X' + \lambda^2 X = 0 \qquad X = C e^{-(\lambda^2 \xi)}$$

$$\left[ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dR}{\partial\eta} \right) \right] + \lambda^2 R (1-\eta^2) = 0$$

problema de Sturm Liouville

(problema de autovalores  $\lambda$ , solução por séries)



Para temperatura constante na parede, vamos

considerar que a temperatura de referência

$$T_{ref} = T_s$$

A diferença de temperatura de referência é

$$\Delta T = (T_o - T_s)$$

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(\eta) e^{-(\lambda_n^2 \xi)}$$

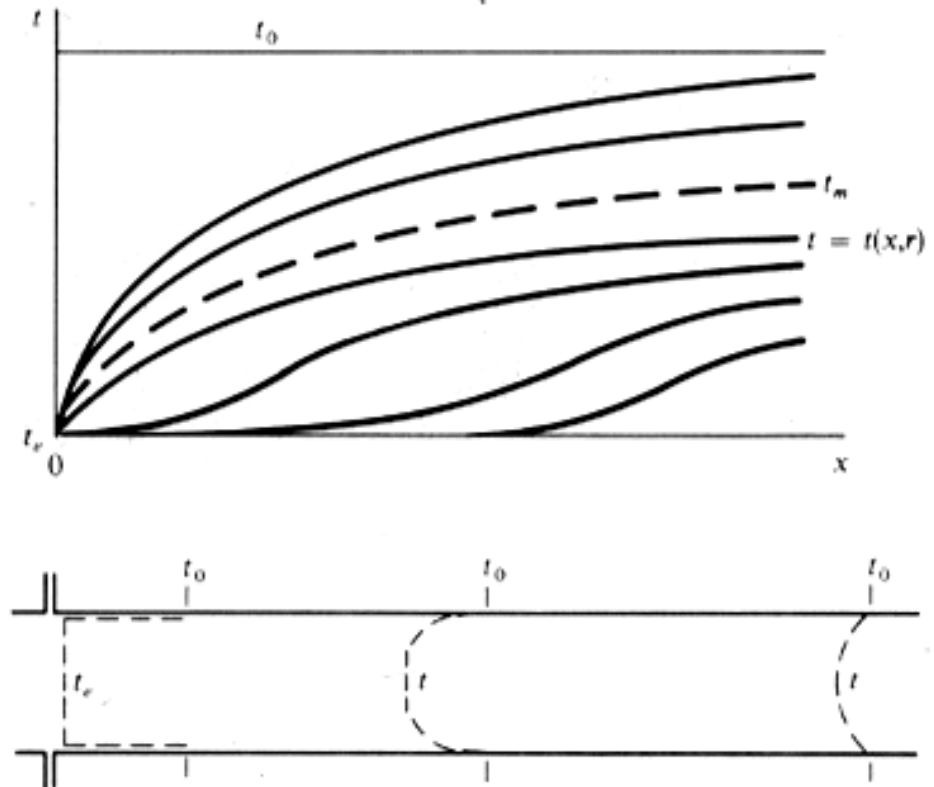
série de Gratz

onde  $\lambda_n$  são os autovalores,

$R_n(h)$  são as auto-funções e

$C_n$  são as constantes de

integração.

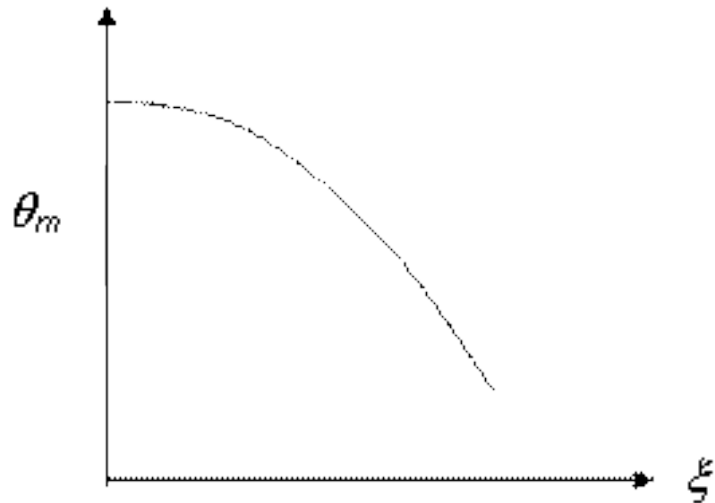




A partir da solução apresentada, pode-se determinar a temperatura de mistura

$$\theta_m = \frac{T_m - T_s}{T_o - T_s} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} e^{-(\lambda_n^2 \xi)}$$

$$G_n = -\frac{C_n}{2} R'(1)$$



**Table 8-3 Infinite-series-solution functions for the circular tube; constant surface temperature; thermal-entry length**

$n$	$\lambda_n^2$	$G_n$
0	7.312	0.749
1	44.62	0.544
2	113.8	0.463
3	215.2	0.414
4	348.5	0.382

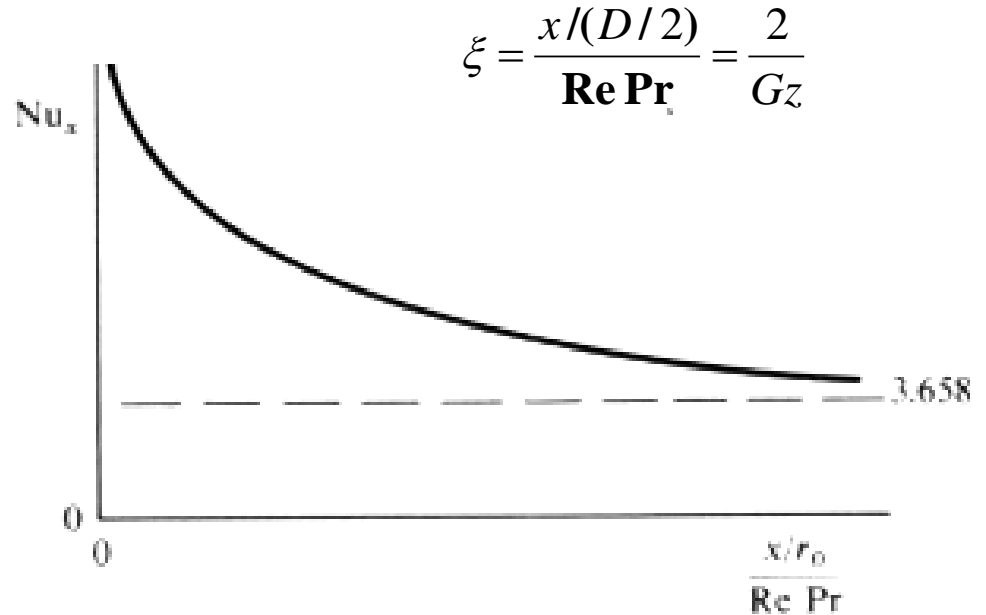
For  $n > 2$ ,  $\lambda_n = 4n + \frac{8}{3}$ ;  $G_n = 1.01276\lambda_n^{-1.3}$ .



O número de Nusselt é constante na periferia, mas varia axialmente

O número de Nusselt local é

$$Nu_x = \frac{h_x D}{k} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n e^{-(\lambda_n^2 \xi)}}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) e^{-(\lambda_n^2 \xi)}}$$



O número de Nusselt médio da entrada até uma seção arbitrária  $\xi_L$  é

$$\overline{Nu}_{0-\xi_L} = \frac{1}{\xi_L} \int_0^{\xi_L} Nu_x d\xi \qquad \overline{Nu}_{0-\xi_L} = \frac{1}{2 \xi_L} \ln \left[ \frac{1}{8 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) e^{-(\lambda_n^2 \xi_L)}} \right]$$



$$\overline{Nu}_{o-\xi_L} = \frac{1}{2 \xi_L} \ln \left[ \frac{1}{\phi_m} \right]$$

Para grandes valores de  $\xi$ , a série converge, até que para  $\xi > 0,1$  somente o primeiro termo da série do número de Nusselt local é significativa, sendo igual 3,658, o que corresponde ao número de Nusselt para perfil de temperatura térmicamente desenvolvido.

**Table 8-4 Nusselt numbers and mean temperature for the circular tube; constant surface temperature; thermal-entry length**

$x^*$	$Nu_x$	$Nu_m$	$\theta_m$
0	$\infty$	$\infty$	1.000
0.001	12.80	19.29	0.962
0.004	8.03	12.09	0.908
0.01	6.00	8.92	0.837
0.04	4.17	5.81	0.628
0.08	3.77	4.86	0.459
0.10	3.71	4.64	0.396
0.20	3.66	4.15	0.190
$\infty$	3.66	3.66	0.0



Portanto, o comprimento de desenvolvimento térmico corresponde a aproximadamente então  $x/D)_{\text{desenvolvido}} \approx 0,1 \text{ Re Pr}$

Para ar,  $\text{Pr}=0,7$  escoando com  $\text{Re} = 500 \Rightarrow x/D)_{\text{desenvolvido}} \approx 17,5$

Para óleo,  $\text{Pr} = 100$  escoando com  $\text{Re} = 500 \Rightarrow x/D)_{\text{desenvolvido}} \approx 2500$

Para metal líquido,  $\text{Pr} = 0,001$

escoando com  $\text{Re} = 500 \Rightarrow x/D)_{\text{desenvolvido}} \approx 0,025$

Para escoamento de fluidos com baixo número de Prandtl, raramente o escoamento atinge a condição de termicamente desenvolvido. Para altos números de Prandtl, o desenvolvimento térmico se dá na presença de um campo uniforme de velocidade, como vimos.



Considerando agora a condição de contorno de **fluxo de calor constante na parede**, pode-se obter a solução por um procedimento análogo ao visto para temperatura constante de parede,

sendo a temperatura de referência  $T_{ref} = T_s$

e a diferença de temperatura de referência igual a  $\Delta T = q_s D / k$

O número de Nusselt local é dado por

$$Nu_x = \frac{h_x D}{k} = \left[ \frac{1}{Nu_\infty} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\gamma_n^2 \xi)}}{A_n \gamma_n^4} \right]^{-1}$$



os autovalores e constantes são dados na tabela 8.5 e o número de Nusselt no infinito, corresponde ao número de Nusselt da região térmicamente desenvolvida igual a  $Nu_{\infty}=4,364$ .

A tabela 8.6 apresenta a variação do Nusselt local  $Nu_x$  ao longo da distância adimensional

**Table 8-5 Infinite-series-solution functions for the circular tube; constant heat rate; thermal-entry length**

$m$	$\gamma_m^2$	$A_m$
1	25.68	$7.630 \times 10^{-3}$
2	83.86	$2.058 \times 10^{-3}$
3	174.2	$0.901 \times 10^{-3}$
4	296.5	$-0.487 \times 10^{-3}$
5	450.9	$0.297 \times 10^{-3}$

For larger  $m$ ,  $\gamma_m = 4m + \frac{1}{2}$ ;  $A_m = 0.358\gamma_m^{-2.32}$ .

**Table 8-6 Nusselt numbers for the circular tube; constant heat rate; thermal-entry length**

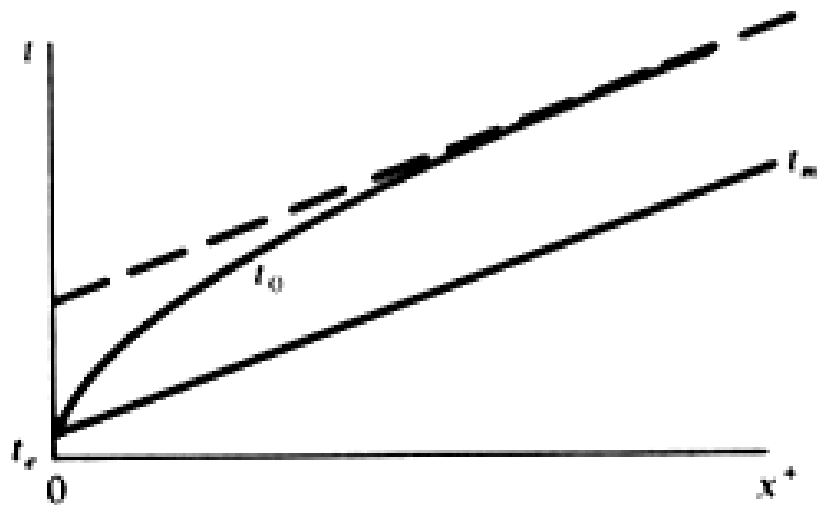
$x^*$	$Nu_x$
0	$\infty$
0.002	12.00
0.004	9.93
0.010	7.49
0.020	6.14
0.040	5.19
0.100	4.51
$\infty$	4.36





Em um problema de fluxo de calor constante, a temperatura de mistura varia linearmente ao longo da tubulação, podendo ser determinada a partir de um balanço simples de energia, como já vimos.

A solução do problema de transferência de calor, nos permite determinar como a temperatura da parede varia ao longo da tubulação, por



$$T_s - T_m = \frac{q_s''}{h_x} = \frac{q_s'' D}{Nu_x k}$$

**Figure 8-13** Temperature variations in the thermal-entry region of a tube with constant heat rate per unit of tube length.



## Desenvolvimento Térmico e Hidrodinâmico

Como já mencionado, se o número de Prandtl for baixo, o desenvolvimento hidrodinâmico pode ser muito lento em relação ao térmico, e a aproximação de que o escoamento térmico se desenvolve na presença de um campo uniforme de velocidade pode ser utilizada. No entanto é preciso que o número de Prandtl seja muito baixo. A situação mais realista é a do desenvolvimento simultâneo de velocidade e temperatura.

Para resolver o campo de velocidade é necessário resolver simultaneamente a equação da continuidade e equação de conservação de quantidade de movimento linear na direção radial e axial



- Continuidade:  $\frac{\partial r u_r}{r \partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

- quantidade de movimento linear

$$\rho \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right]$$

$$\rho \left[ u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right]$$

onde  $P = p - \rho g \text{ sen} \theta r$

Uma vez resolvido o campo de velocidade, pode-se resolver o campo de temperatura

- energia:  $\rho c_p \left[ u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \mu \Phi$

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2$$



## Adimensionalizando

$$U = \frac{u_x}{u_m}$$

$$V = \frac{u_r}{u_m}$$

$$P^* = \frac{P}{\rho u_m^2}$$

$$\phi = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$\eta = \frac{r}{(D/2)}$$

$$\xi = \frac{x/(D/2)}{\mathbf{Re Pr}}$$

$$\Phi^* = \frac{\Phi}{(u_m / D)^2}$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

$$\mathbf{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$\mathbf{Pe} = \mathbf{RePr}$$



$$\frac{\partial \eta V}{\eta \partial \eta} + \frac{1}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$$

$$\left[ V \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{U}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] = -\frac{1}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \frac{2}{\mathbf{Re}} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\mathbf{Pe}^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right]$$

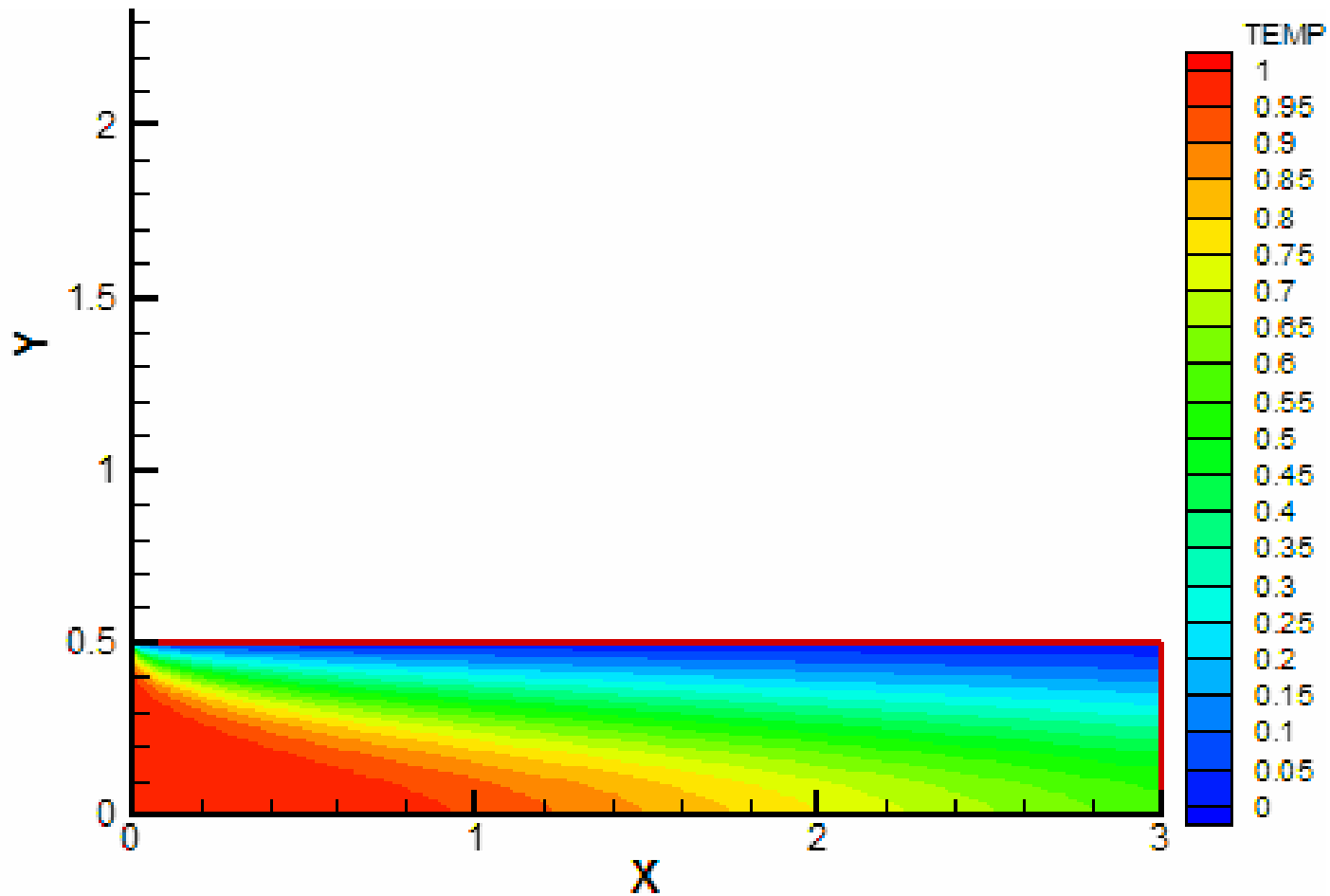
$$\left[ V \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{U}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right] = -\frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{2}{\mathbf{Re}} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) - \frac{V}{\eta^2} + \frac{1}{\mathbf{Pe}^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \right]$$

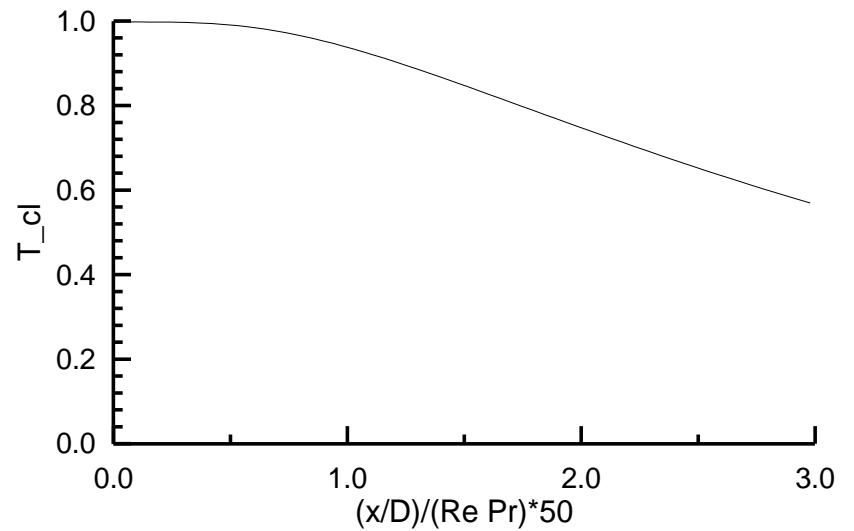
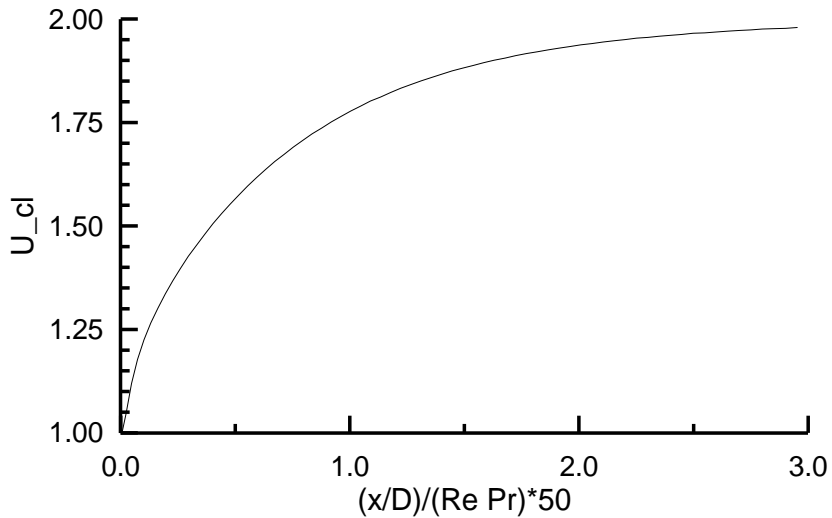
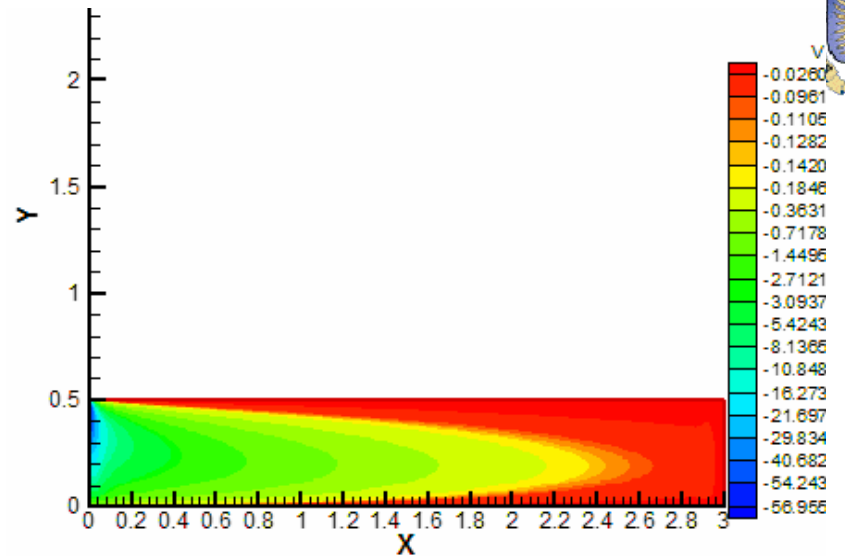
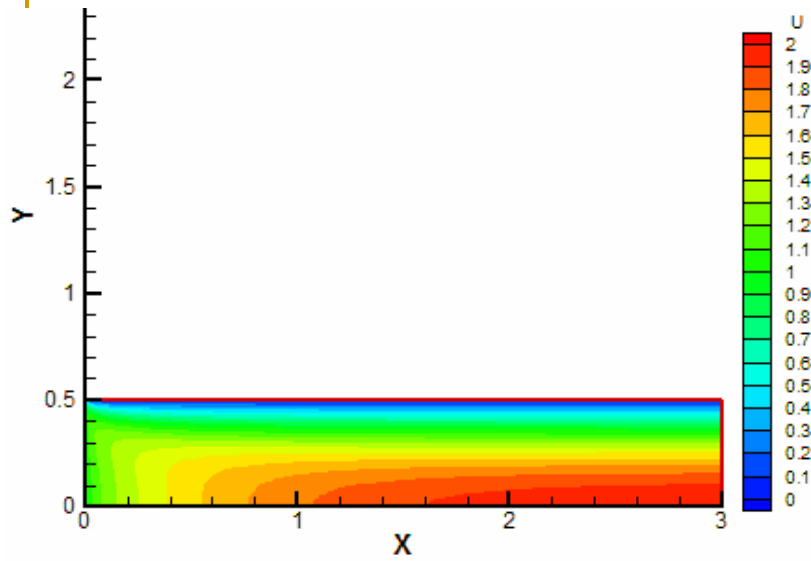
$$P = p - \rho g \text{ sen } \theta r$$

$$\frac{\mathbf{Pe}}{2} \left[ V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{U}{\mathbf{Pe}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] = \left[ \frac{1}{\mathbf{Pe}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \mathbf{Pr} \mathbf{E} \Phi^*$$



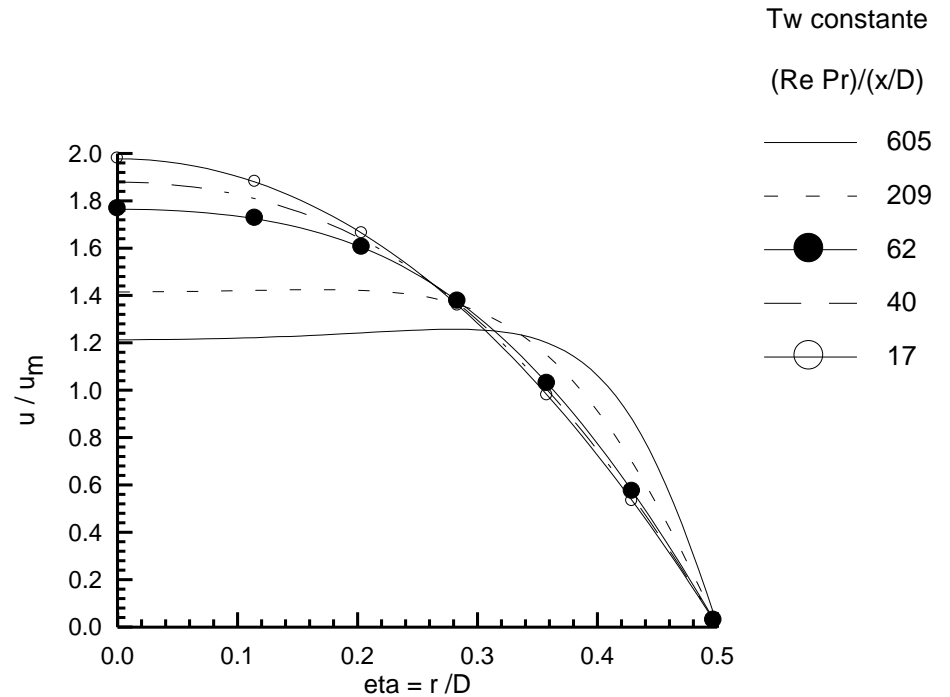
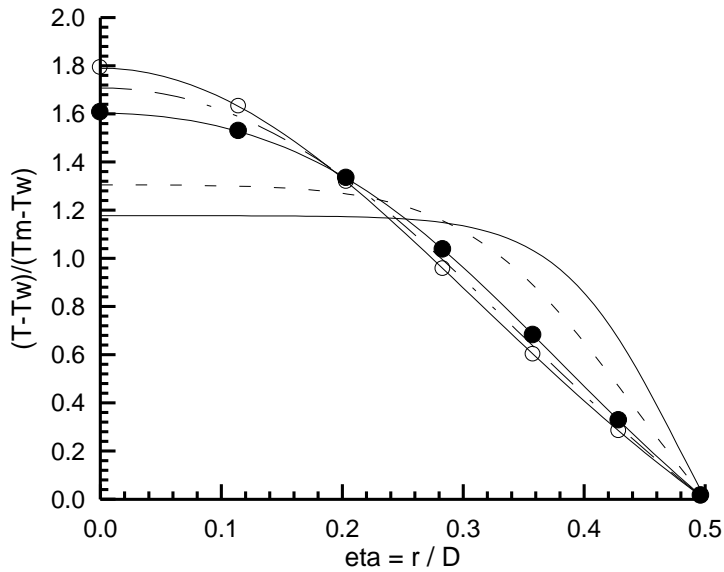
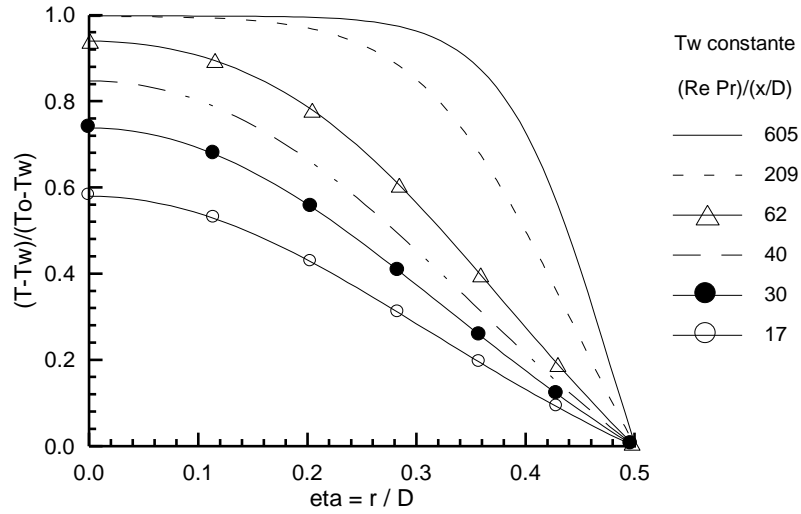
Para Temperatura constante na parede, as figuras a seguir, ilustram o campo de temperatura e de velocidade axial em uma tubulação, sem dissipação viscosa. Para melhor visualizar as figuras abaixo, a dimensão  $X=(x/(D/2))/(\text{Re Pr})$ , foi multiplicada por 50. Obs:  $T_{ref} = T_w$   $\Delta T_{ref}=(T_{in}-T_w)$



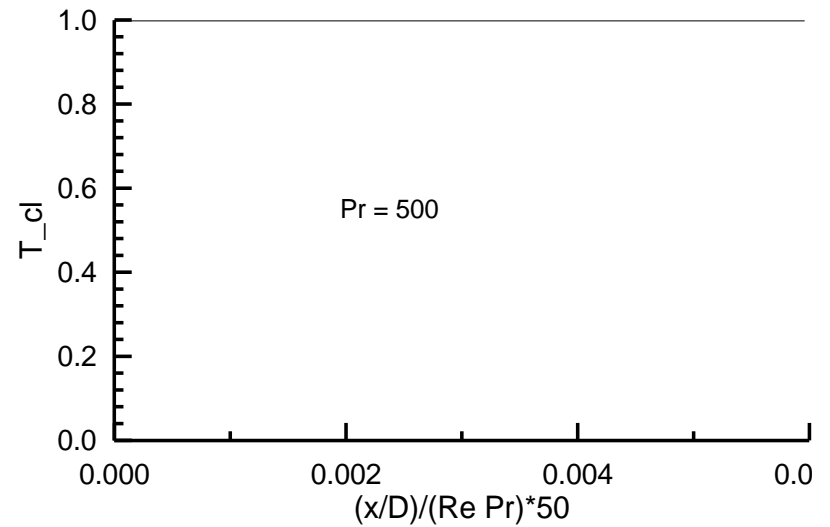
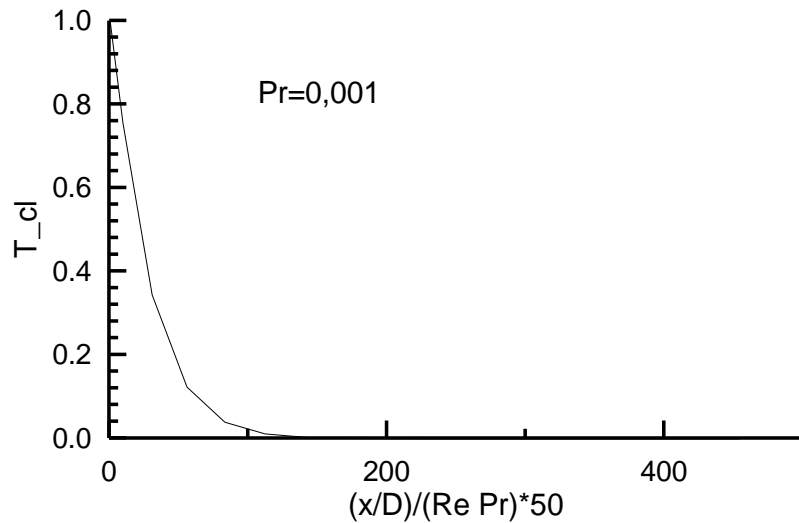
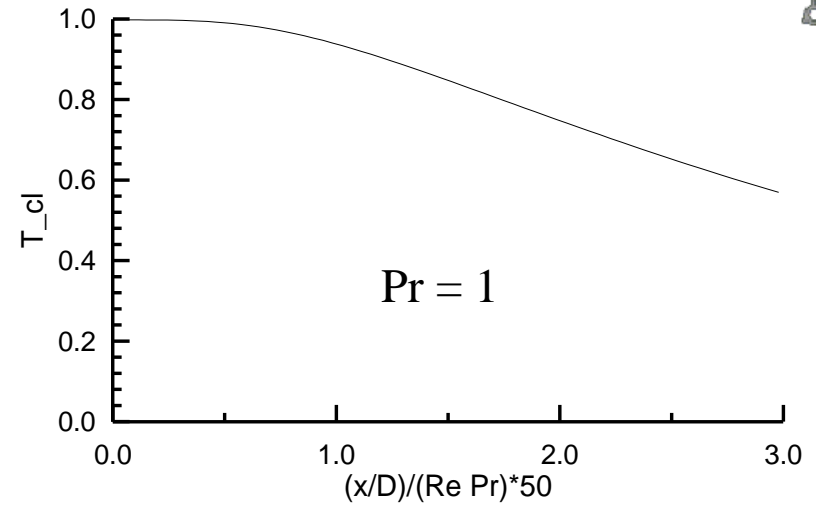
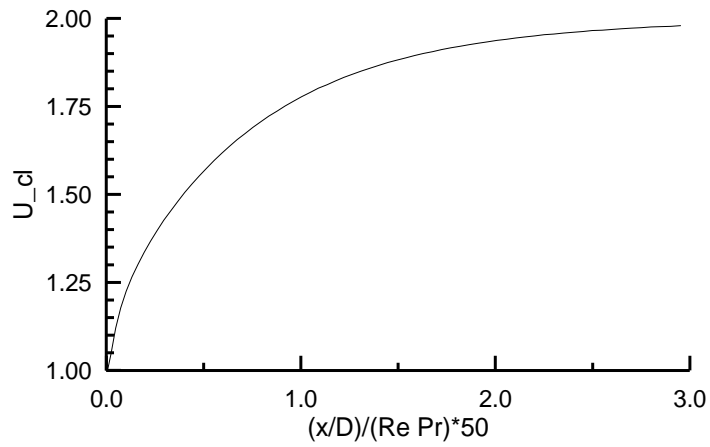




Pr = 1









O número de Nusselt médio pode ser avaliado pela correlação de Hausen, para fluxo de calor constante e temperatura constante

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}_{\infty} + \frac{K_1 (\text{RePr} D / x)}{1 + K_2 (\text{RePr} D / x)^n}$$

**Table 6-13** Constants  $K_1$  and  $K_2$  for Eq. (6-49)

Wall Condition	Inlet Velocity	Pr	$\overline{Nu}_{\infty}$	$K_1$	$K_2$	$n$
$T_w = \text{const}$	Developing	0.7	3.66	0.104	0.016	0.8
$T_w = \text{const}$	Parabolic	Any	3.66	0.0668	0.04	$\frac{2}{3}$
$T_w - T_m = \text{const}$	Developing	0.7	4.36	0.1	0.016	0.8
$q_w = \text{const}$	Developing	0.7	4.36	0.036	0.0011	1
$q_w = \text{const}$	Parabolic	Any	4.36	0.023	0.0012	1



## Propriedades dependentes da temperatura

- A introdução de propriedades variáveis com a temperatura leva a soluções bem mais complexas.
- Quando as variações são moderadas, utiliza-se valor constantes para as propriedades, avaliadas na temperatura média do escoamento
- Esquemas de correção de propriedades também podem ser utilizados.

- Líquidos 
$$\frac{Nu}{Nu(T_m)} = \left( \frac{\mu_w}{\mu_m} \right)^n \quad \frac{f}{f(T_m)} = \left( \frac{\mu_w}{\mu_m} \right)^m$$

- Gases:

$$\frac{Nu}{Nu(T_m)} = \left( \frac{T_w}{T_m} \right)^n \quad \frac{f}{f(T_m)} = \left( \frac{T_w}{T_m} \right)^m$$



**Table 6-18 Fully Developed Exponents for  $(T_w/T_m)$ , Gases [12, 24]**

	$n$	$m$
<i>Laminar Boundary Layer on Flat Plate</i>		
Gas heating	-0.08	-0.08
Gas cooling	-0.045	-0.045
<i>Flow Normal to Circular Tube or Bank of Circular Tubes</i>		
Gas heating	0.0	0.0
Gas cooling	0.0	0.0
<i>Fully Developed Laminar Flow in Circular Tube</i>		
Gas heating	0.0	1.0
Gas cooling	0.0	1.0
<i>Fully Developed Turbulent Flow in Circular Tube</i>		
Gas heating	-0.5	-0.1
Gas cooling	0.0	-0.1

**Table 6-19 Fully Developed Exponents for  $(\mu_w/\mu_m)$ , Liquids [24]**

Pr	$n$		$m$	
	Heating	Cooling	Heating	Cooling
Laminar	-0.14	-0.14	0.58	0.50
1	-0.20	-0.19	0.09	0.12
3	-0.27	-0.21	0.06	0.09
10	-0.36	-0.22	0.03	0.05
30	-0.39	-0.21	0.00	0.03
100	-0.42	-0.20	-0.04	0.01
1000	-0.46	-0.20	-0.12	-0.02