Problemas de Valor Característico (ou auto-valores)

Considere a equação homogênea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\,y = 0$$

Submetida às condições de contorno homogêneas $\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$

A solução geral da equação é do tipo: $y = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes

Aplicando-se as condições de contorno segue

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0$$

Uma solução possível para este sistema algébrico, é dada por $c_1 = c_2 = 0$

que corresponde a solução trivial $y = 0$

As constantes c_1 e c_2 não se anulam apenas se: $\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$ (II)

Se isto ocorrer, as duas equações do sistema (I) se tornam idênticas. Desta forma, tem-se uma solução não trivial, a menos de uma constante C, ou seja

$$y = C\left[\, y_2(a) \;\; y_1(x) \; - \; y_1(a) \;\; y_2(x)\right]$$

Muitos problemas de condução de calor podem ser reduzidos à solução da equação diferencial mostrada, cujos coeficientes $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são dependentes de um certo parâmetro λ.

Em tais problemas, o determinante (II) pode se anular apenas para certos valores específicos de λ, digamos λ_1, λ_2, λ_3, ..., que são chamados de VALORES CARACTERÍSTICOS ou AUTOVALORES.

Estes problemas são chamados de PROBLEMAS DE VALORES CARACTERÍSTICOS.

Exemplo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 \; y = 0 \qquad c.c. \begin{cases} y(0) = 0 & \textbf{(1)} \\ y(L) = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Solução geral:

$$y = c_1 \underbrace{\textbf{sen}\,(\lambda\, x)}_{y_1(x)} + c_2 \underbrace{\textbf{cos}\,(\lambda\, x)}_{y_2(x)}$$

Determinante (II) para este caso:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \textbf{sen}\ \lambda L & \textbf{cos}\ \lambda L \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{sen}\,(\lambda\ L) = 0$$

$$\lambda\, L = n\ \pi \qquad ou \qquad \lambda_n = \frac{n\ \pi}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Estes autovalores poderiam ser obtidos, também, impondo as c.c.'s:

(i) x = 0 $\rightarrow$ y (0) = 0 $\Rightarrow$ $c_2 = 0$

(ii) x = L $\rightarrow$ y (L) = 0 $\Rightarrow$ c_1 sen (λ L) = 0

Para solução não trivial **sen** (λ L) = 0

autovalores $\lambda_n = \dfrac{n\,\pi}{L} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (n = 0 \quad \text{solução trivial})$

Para cada valor de λ_n corresponderá uma função $\varphi_n(x) \rightarrow \quad \varphi_n(x) = \mathbf{sen}\left(\dfrac{n\,\pi}{L}\,x\right)$

Esta função é chamada de FUNÇÃO CARACTERÍSTICA OU AUTO-FUNÇÃO

Solução: $y = c_1\,\varphi_n(x)$

ORTOGONALIDADE DE AUTO-FUNÇÕES

Considere a equação: $$\frac{d^2 y}{d x^2} + f_1(x)\frac{d y}{d x} + \left[f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)\right] y = 0 \qquad (*)$$

Esta equação é igual para problemas de transferência de calor por condução uni-dimensional.

Considere a equação submetida a condições de contorno homogêneas no intervalo (a, b)

A solução deste problema irá gerar autofunções $\varphi_n(x)'s$ correspondentes a autovalores $\lambda_n's$.

A equação (*) pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d_x}\left[p(x) \frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda^2 \omega(x)\right] y = 0$$

$$\text{com} \quad \begin{cases} p(x) = e^{\int f_1(x)\, dx} \\ q(x) = p(x) \quad f_2(x) \\ \omega(x) = p(x) \quad f_3 = f_3(x) e^{\int f_1(x)\, dx} \end{cases}$$

DEFINIÇÃO:

Duas auto-funções $\varphi_n(x)$ e $\varphi_m(x)$, correspondentes a auto-valores λ_n e $\lambda_m(x)$ distintos, são ortogonais num intervalo (a, b) com respeito a função peso $\omega(x)$, isto é:

$$\int_a^b \omega(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad , (m \neq n)$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} + \lambda^2\, y = 0 \qquad c.c. \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = L & y = 0 \end{cases}$$

exemplo:

$$\varphi_n(x) = \mathbf{sen}\left(n\frac{\pi\, x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Neste caso $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_3(x) = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad p(x) = 1,\ \ q(x) = 0\ \ e\ \ \omega(x) = 1$

$$\int_0^L \mathbf{sen}\left(\lambda_n\, x\right)\ \mathbf{sen}\left(\lambda_m\, x\right)\ dx = o \qquad (n \neq m) \quad \lambda_n = \frac{n\,\pi}{L}$$

Para $n = m$ $\Rightarrow \int_0^L \mathbf{sen}^2\left(\frac{n\,\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}$

EXPANSÃO DE UMA FUNÇÃO ARBITRÁRIA $f(x)$ EM SÉRIES DE FUNÇÕES ORTOGONAIS NUM INTERVALO (a, b)

Considere o conjunto de auto-funções $\varphi_n(x)$, ortogonais em (a ,b) com respeito a função peso $\omega(x)$

Uma função genérica $f(x)$ pode ser representada no intervalo (a, b) pela expansão

$$f(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots\ldots \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, \varphi_n(x)$$

Os coeficientes α_n podem ser obtidos multiplicando-se ambos os lados por $\omega(x)$ $\varphi_m(x)$ e integrando em (a, b), isto é:

$$\int_a^b \omega(x)\varphi_m(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \underbrace{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx}$$

todos os termos são nulos, exceto quando n=m

Segue

$$\boxed{\alpha_n = \frac{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_n(x)\, f(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx}}$$

<u>Exemplo</u>: Conjunto $\varphi_n(x) = \textbf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Ortogonal em (0, L) com respeito $\omega(x) = 1$

Função arbitrária, em (0,L): $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \textbf{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$

com os coeficientes dados por $\alpha_n = \dfrac{\int_0^L f(x)\,\textbf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}{\int_0^L \textbf{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$ $\therefore$ $\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\textbf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

Esta expansão é conhecida como <u>**série de Fourier em senos**</u>.

Se, no exemplo dado, cuja equação é $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$

As condições de contorno fossem $\begin{cases} x = 0 & \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \textbf{(1)} \\ x = L & y = 0 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$

$$y = c_1\,\mathbf{sen}(\lambda x) + c_2\,\mathbf{cos}(\lambda x) \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = c_1 \lambda\,\mathbf{cos}(\lambda x) - C_2 \lambda\,\mathbf{sen}(\lambda x)$$

c.c. (1) $\Rightarrow C_1=0$ (2) $\Rightarrow$ **cos** $(\lambda L)=0$ teríamos $\varphi_n = \mathbf{cos}\left(\dfrac{n\pi}{L} x\right)$ n=0, 1, 2,

Uma função arbitrária, $f(x)$, poderá ser representada, no intervalo (0, L) por

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,\mathbf{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

com $\begin{cases} \alpha_\circ = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)\, dx \\ \alpha_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \mathbf{cos}(\dfrac{n\pi}{L} x)\, dx \end{cases}$ Esta expansão é uma **<u>série de Fourier em cosenos</u>**

Equações de Bessel

$$\frac{d}{d_x}\left[p(x)\ \frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda^2\ \omega(x)\right] y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^p\ \frac{d\theta}{dx}\right) + \gamma^2\ x^s\ \theta = 0 \qquad p - s \neq 2 \qquad \textit{Definindo} \begin{cases} \mu = \dfrac{2}{s-p+2} \\ \nu = \dfrac{1-p}{s-p+2} \end{cases}$$

Solução Geral **:**

$$\theta = x^{\frac{1-p}{2}}\ Z_\nu\left(|\gamma|\ \mu\ x^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

γ	ν	Z_ν (soluções particulares)	
Real	Fracioário Zero ou Inteiro $(\nu = n)$	$J_\nu \quad J_{-\nu}\ (ou\ Y_\nu)$ $J_n \quad J_n$	Funções de Besse de 1ª e 2ª espécie
Imaginário	Fracioário Zero ou Inteiro $(\nu = n)$	$I_\nu \quad I_{-\nu}\ (ou\ K_\nu)$ $I_n \quad I_n$	Funções de Besse Modificadas de 1ª e 2ª espécie

Se

$p - s = 2$

trate-se de equações equidimensional, cuja do tipo

$\theta = x^r$

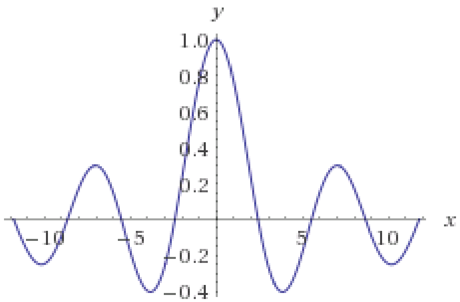
Funções de Bessel

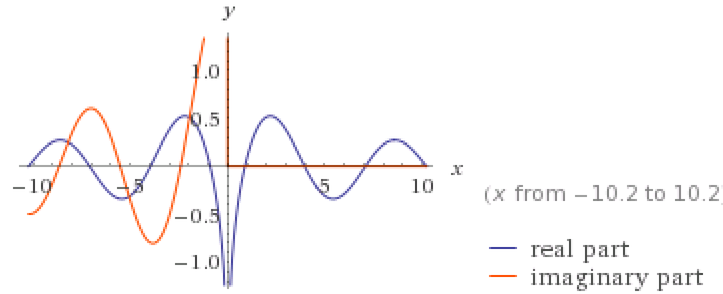
$$J_\nu(m\,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

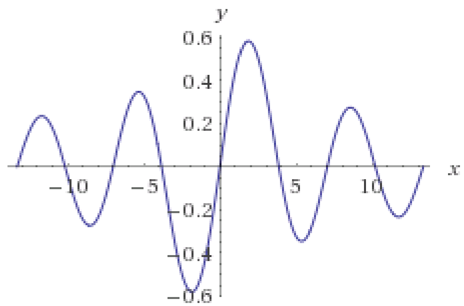
$$Y_\nu(mx) = \frac{\cos(\nu\pi)\,J_\nu(mx) - J_{-\nu}(mx)}{sen(\nu\pi)}$$

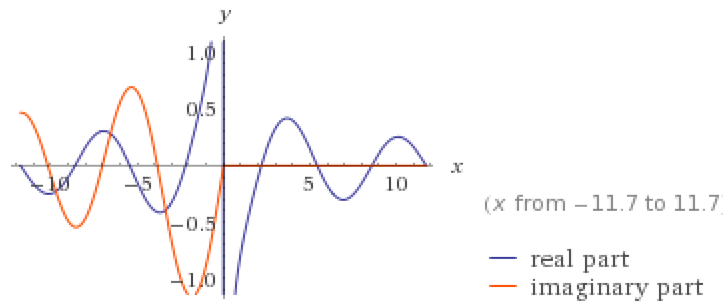
onde função Gama:

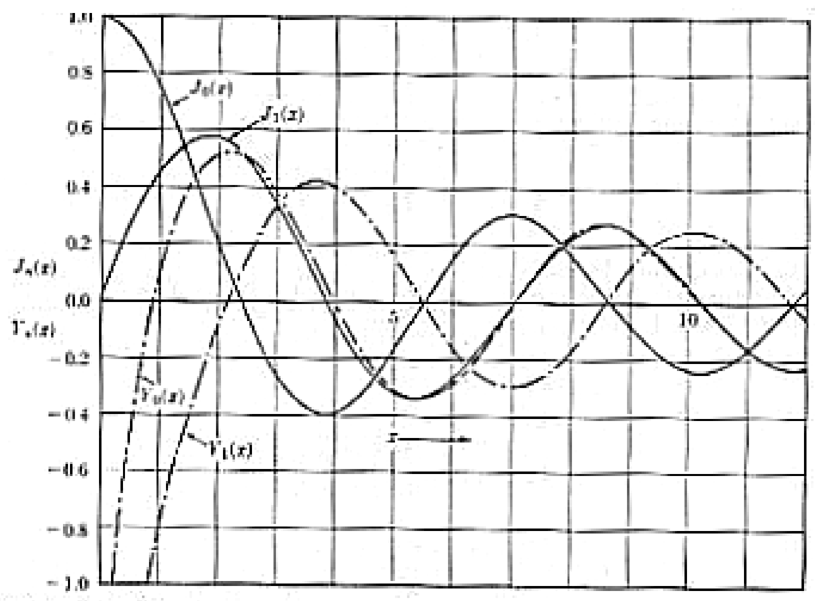
$$\begin{pmatrix} \Gamma(1) = 0! = I \\ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{cases} \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n! \\ \Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu-1) = \dfrac{\pi}{sen(\pi\nu)} \end{cases}$$









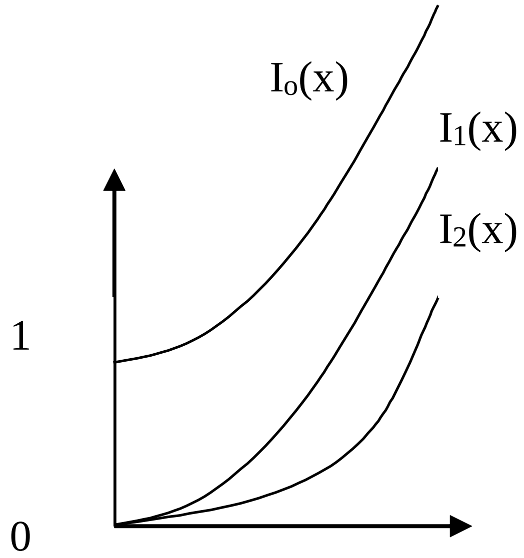


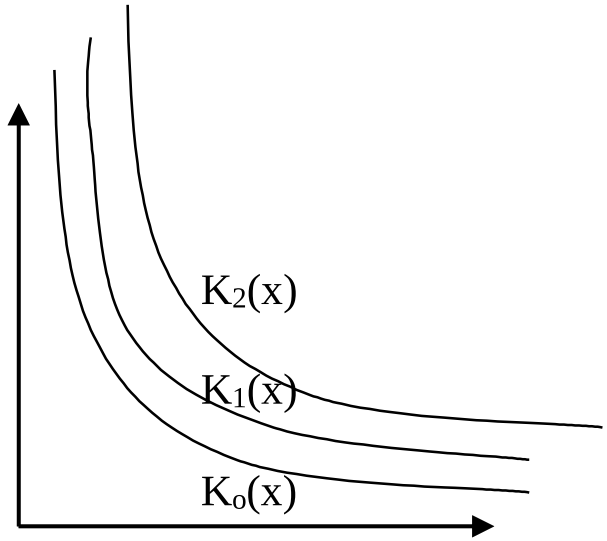
J0=besselj[0,x]
J1=besselj[1,x]
Y0=bessely[0,x]
Y1=besseljy[1,x]

$$I_\nu(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\ \Gamma(k+\nu+1)}$$

Funções de Bessel Modificadas

$$K_\nu(mx) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(mx) - I_\nu(mx)}{sen(\nu\pi)}$$





Derivadas das Funções de Bessel:

$$\frac{d}{d_x}\left[x^{\nu} Z_{\nu}(mx)\right] = \begin{cases} mx^{\nu}\ Z_{\nu-1}(mx) & para\ Z = J, Y, I \\ -mx^{\nu}\ Z_{\nu-1}(mx) & para\ Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{d_x}\left[x^{-\nu} Z_{\nu}(mx)\right] = \begin{cases} -mx^{-\nu}\ Z_{\nu+1}(mx) & para\ Z = J, Y, K \\ mx^{\nu}\ Z_{\nu+1}(mx) & para\ Z = I \end{cases}$$

Caso especial, para $\upsilon = 0$

$$\frac{d}{d\ x}\left[Z_{\circ}(mx)\right] = \begin{cases} -m\ Z_1\ (mx) & para\ Z = J, Y, K \\ m\ Z_1\ (mx) & para\ Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\ x}\left[Z_{\nu}(mx)\right] = \begin{cases} m\ Z_{\nu-1}\ (mx) - \left(\nu/x\right) Z_{\nu}(mx) & para\ Z = J, Y, K \\ m\ Z_{\nu-1}\ (mx) - \nu/x\ \ Z_{\nu}(mx) & para\ Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\ x}\left[Z_{\nu}(mx)\right] = \begin{cases} -m\ Z_{\nu+1}\ (mx) + \left(\nu/x\right) Z_{\nu}(mx) & para\ Z = J, Y, K \\ m\ Z_{\nu+1}\ (mx) + \left(\nu/x\right) Z_{\nu}(mx) & para\ Z = I \end{cases}$$