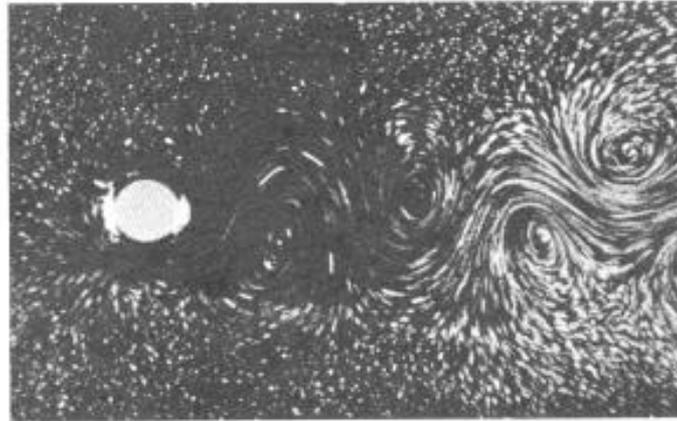


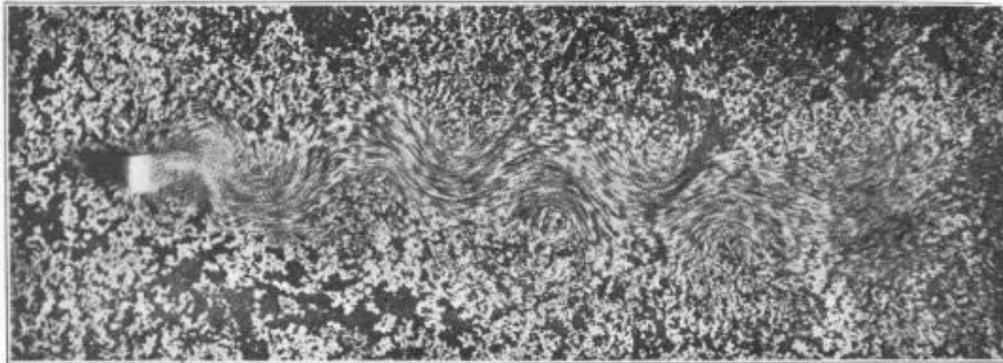
# ESCOAMENTO TURBULENTO

- a turbulência em geral surge de uma instabilidade do escoamento em regime laminar, quando o número de Reynolds torna-se grande. As instabilidades estão relacionadas com interações entre termos viscosos e termos de inércia não lineares nas equações de quantidade de movimento linear.
  - Os efeitos advectivos altamente não lineares, são efeitos amplificadores de perturbações é geradores de instabilidades. Por outro lado os efeitos difusivos são amortecedores ou inibidores da formação de instabilidades. O número de Reynolds ( $Re$ ) é definido como a razão entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos. Desta forma um escoamento só poderá transicionar ou se manter turbulento quando  $Re$  for maior que a unidade.

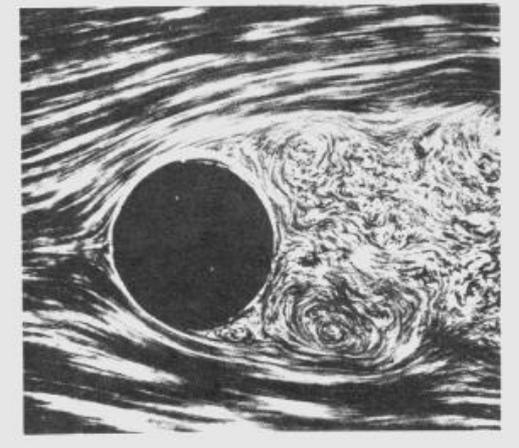
## Escoamento ao redor de um cilindro



Baixo número de Reynolds



Número de Reynolds Intermediário



Alto Número de Reynolds

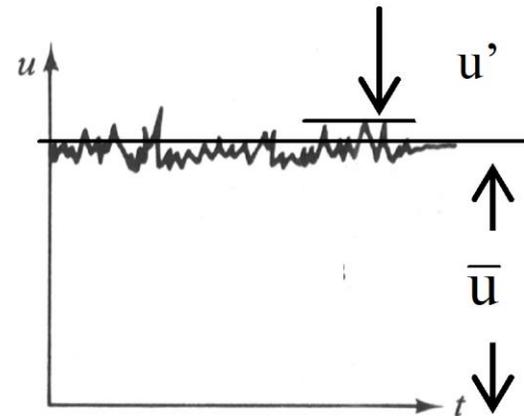
- As equações de conservação que regem o escoamento independem do regime de escoamento. Porém o regime turbulento é sempre tri-dimensional e transiente.
- Se diferentes escoamentos turbulentos são comparados, observa-se diferentes padrões de escoamento com diferentes tamanhos. Para descrever um escoamento turbulento é portanto necessário introduzir a noção de escala de turbulência. Escala de tempo e escala espacial. Para um escoamento turbulento em um tubo, por exemplo, espera-se que a escala de tempo seja da ordem da razão entre o diâmetro do tubo e a velocidade média do escoamento na seção transversal e a escala espacial seja da ordem de grandeza do diâmetro do duto.

- Considerando ser possível definir a velocidade como a soma de um valor médio mais uma flutuação

$$u = \bar{u} + u'$$

O valor médio é obtido por

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} u \, dt$$



sendo  $\bar{u}' = 0$  já que

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} u \, dt = \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \bar{u} \, dt}_{\bar{u}} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} u' \, dt}_{\text{zero}}$$

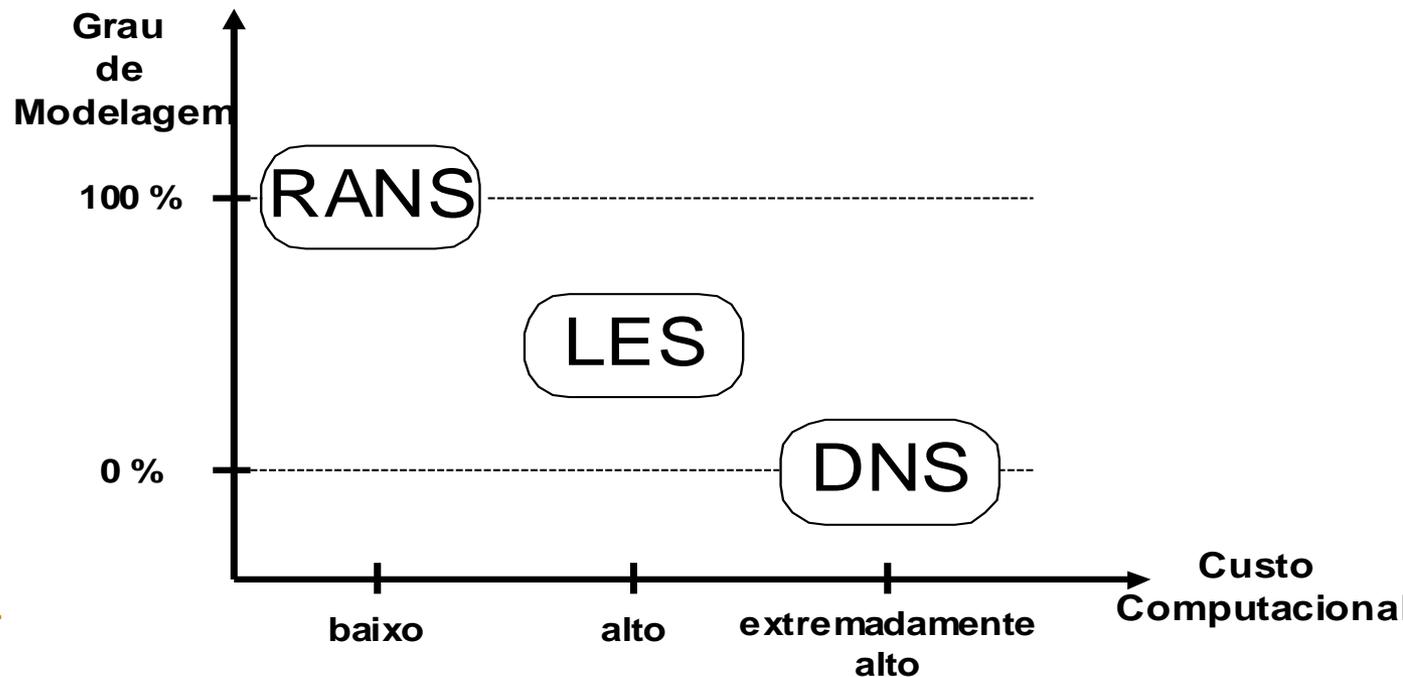
- Somente a escala da turbulência não é suficiente para caracterizar o escoamento turbulento. É preciso ter uma noção sobre a "violência" do movimento. O valor médio da velocidade não pode ser uma medida da violência do movimento, pois é exatamente a violência das flutuações em relação a velocidade média que desejamos saber.
- Como a velocidade média não é uma boa medida para a violência, é conveniente utilizar como definição de violência, a intensidade da turbulência, a qual foi definida por Dryden and Kuethe, 1930, como a raiz quadrada do valor médio da flutuação (root mean square)

$$|u'| = \sqrt{(u')^2}$$

- As equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear são não lineares e acopladas.
- Como o escoamento turbulento é transiente e tridimensional, a solução numérica destas equações traz muitas complicações porque características importantes dos escoamento turbulentos estão contidos nas recirculações que possuem apenas alguns milímetros em tamanho para escoamento com domínios de muitos metros.
- Mesmo o problema mais simples necessitaria uma malha muito fina.
- Além disso, para captar a variação temporal dos turbilhões, passos de tempo muito pequenos são necessários.

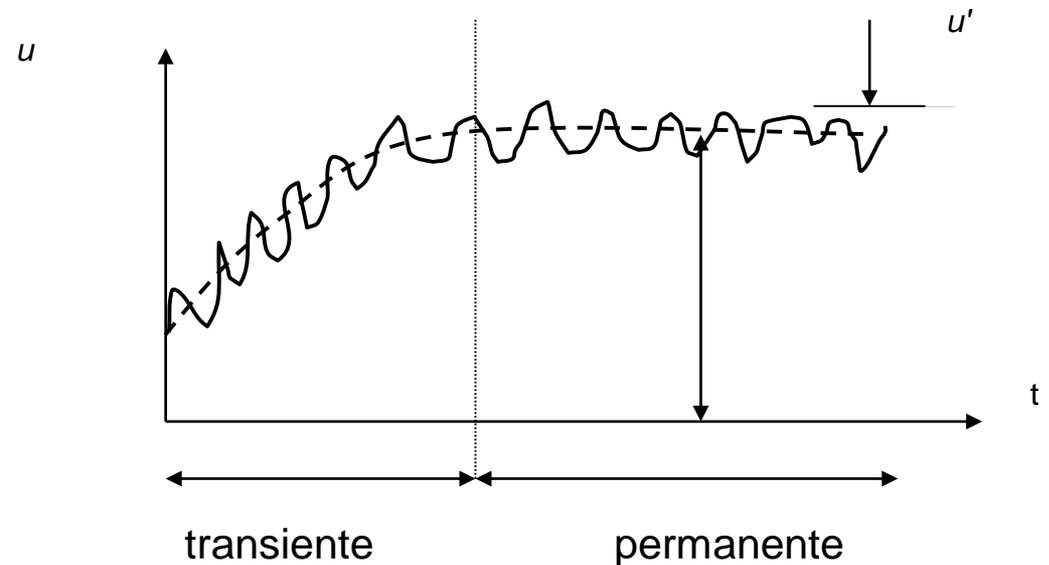
- Atualmente existem basicamente três métodos para se analisar um escoamento turbulento, os quais serão descritos a seguir.
  - **DNS (Direct Numerical Simulation)**: cálculo de todas as escalas de comprimento da turbulência.
  - **LES (Large Eddy Simulation)**: cálculo dos turbilhões de grandes escalas, com uma modelagem dos turbilhões de escala menor.
  - **RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)**: modelos da turbulência estatística baseado nas equações de Navier-Stokes médias no tempo.

- Pode-se classificar os métodos de acordo ao grau de modelagem e ao custo computacional como ilustrado na figura. Temos que a simulação de grandes escalas LES está entre os métodos estatísticos RANS e a simulação numérica direta DNS, sendo que este último é o que tem o maior custo computacional.



- A análise estatística baseia-se no fato de que o escoamento turbulento pode ser descrito por um valor médio  $\bar{u}$  e mais uma flutuação  $u'$  (muitas vezes da ordem de 1% a 10% de  $\bar{u}$  )

$$u = \bar{u} + u'$$



- Para o engenheiro, muitas vezes é suficiente conhecer o comportamento do valor médio.

- Note que com relação ao valor médio, podemos fazer a hipótese de regime permanente, pois

$$\partial \bar{u} / \partial t = 0$$

- Observamos ainda que se o vetor velocidade é dado por ,

$$\vec{V} = (\bar{u} + u') \vec{i} + (\bar{v} + v') \vec{j} + w' \vec{k}$$

podemos fazer a hipótese de 2-D com relação aos valores médios.

- Dessa forma, podemos simplificar bastante o problema. Desejamos então determinar o campo médio de velocidades. Neste caso, é preciso obter equações de conservação para essa grandeza.

# Equações Médias de Reynolds

- Os modelos de turbulência baseados nas equações de Navier-Stokes médias no tempo **RANS** (**R**eynolds **A**veraged **N**avier-**S**tokes) serão descritos.
- No estudo de um escoamento turbulento, como as quantidades analisadas são caracterizadas por apresentar flutuações randômicas em torno de um valor médio, pode-se utilizar de métodos estatísticos. Uma simples análise estatística é suficiente.

# Decomposição de Reynolds:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

$$p = \bar{p} + p' ;$$

Generalizando podemos escrever:  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$

onde o valor médio é obtido por  $\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi dt$   $\bar{\phi}' = 0$

Antes de derivarmos as equações médias para um escoamento turbulento, vamos sumarizar algumas regras que governam as médias temporais das flutuações das propriedades

$$\phi = \Phi + \phi'$$

$$\psi = \Psi + \psi'$$

e suas combinações, derivadas e integrais

$$\overline{\phi'} = \overline{\psi'} = 0 \qquad \overline{\Phi} = \Phi \qquad ; \qquad \overline{\phi + \psi} = \Phi + \Psi$$

$$\overline{\phi \psi} = \overline{\phi} \overline{\psi} = \Phi \Psi$$

$$\overline{\phi' \psi} = \overline{\phi'} \overline{\psi} = 0$$

$$\overline{\int \phi \, ds} = \int \Phi \, ds \qquad \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

Essas equações podem ser facilmente demonstradas, ao notar que a operação de média é uma operação de integração e, portanto a ordem de diferenciação ou integração e obtenção de média temporal podem ser invertidas.

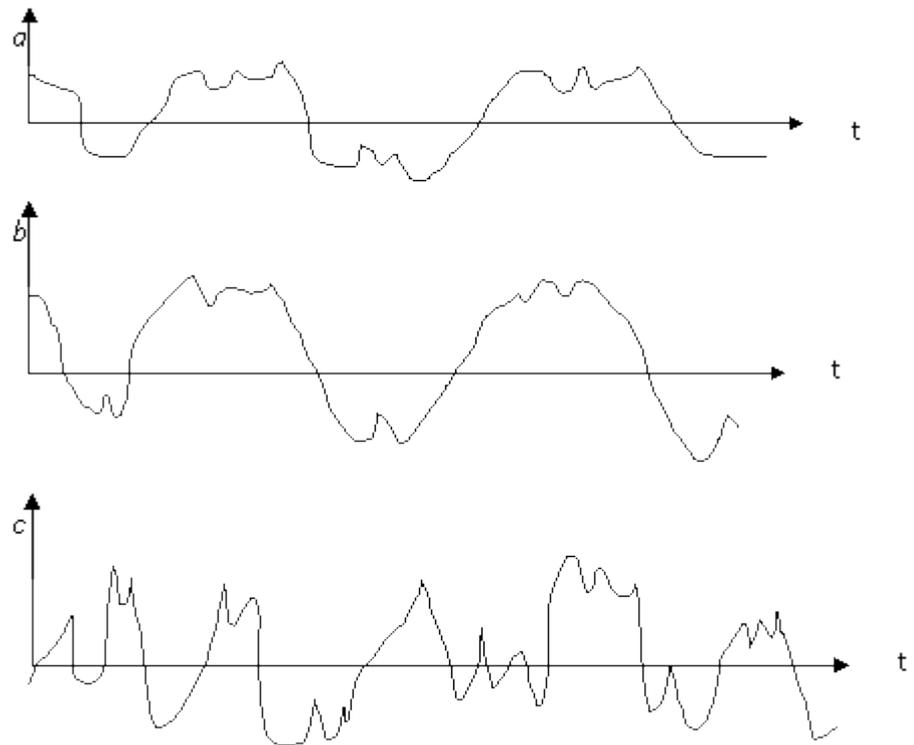
# Correlação entre variáveis

- Vimos que a média de uma flutuação é nula. No entanto, a média do produto de duas flutuações só é diferente de zero, se estas forem correlacionadas, se estas não forem correlacionadas, a média é nula.

A figura a seguir ilustra o conceito de flutuações de variáveis que são correlacionadas

A flutuação da variável  $a$  tem o mesmo sinal que a variável  $b$ , na maior parte do tempo, resultando em  $\overline{ab} > 0$ . Por outro lado, a variável  $c$  não é correlacionada com  $a$  e  $b$ , então

$$\overline{ac} = 0 \quad \overline{bc} = 0$$



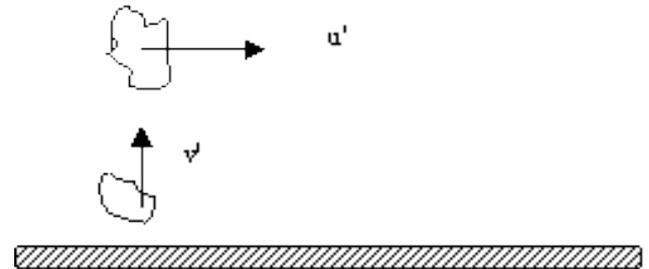
De um modo geral, tem-se

$$\overline{\phi\psi} = \overline{(\Phi + \phi')(\Psi + \psi')} = \overline{(\Phi\Psi + \phi'\Psi + \psi'\Phi + \phi'\psi')}$$

$$\overline{\phi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\phi'\psi'}$$

As flutuações da velocidade são correlacionadas, então

$$\overline{u'v'} \neq 0$$



Uma vez que o divergente e o gradiente são diferenciações, as regras acima podem ser estendidas para um vetor com flutuação e sua combinação com um escalar com flutuação

$$\overline{\mathbf{div} \vec{a}} = \mathbf{div} \vec{A}$$

$$\overline{\mathbf{div} \mathbf{grad} \phi} = \mathbf{div} \mathbf{grad} \Phi$$

$$\overline{\mathbf{div} (\phi \vec{a})} = \mathbf{div} (\overline{\phi \vec{a}}) = \mathbf{div} (\Phi \vec{A}) + \mathbf{div} (\overline{\phi' \vec{a}'})$$

As equações de Navier-Stokes médias no tempo são apresentadas a seguir:

**Equação da continuidade** 
$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

para  $\rho$  constante  $\Rightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0$

Note que subtraindo a equação acima da equação de conservação de massa obtemos

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$$

isto é, as flutuações da velocidade assim como as velocidades médias satisfazem a equação de conservação de massa incompressível.

# Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

$$\left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]$$

Para propriedades variáveis a equação média no tempo de Navier-Stokes é

$$\left( \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] + \frac{\partial (-\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

O termo  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  é denominado **tensão de Reynolds**, e envolve os componentes das flutuações da velocidade que não são conhecidas.

Com muita freqüência o tensor de Reynolds é definido  $\overline{u'_i u'_j}$

# Tensão de Reynolds

- A tensão viscosa corresponde a uma transferência de quantidade de movimento a nível molecular.
- A tensão de Reynolds corresponde a uma transferência de quantidade de movimento devido ao campo de velocidades flutuantes
- O tensor de Reynolds  $-\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \overline{u'_j u'_i}$  é de 2a. ordem e é simétrico
- Os componentes da diagonal são as tensões normais, enquanto as tensões fora da diagonal são as tensões cisalhantes
- A energia cinética turbulenta é definida como a metade do traço do tensor de Reynolds

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

é a energia cinética por unidade de massa do campo de velocidade flutuante

---

# Modelos RANS

- Determinar diretamente as **Tensão de Reynolds**, através de suas equações de conservação
- **Modelos de Viscosidade Turbulenta**

# Modelos de Viscosidade Turbulenta

- Os modelos de viscosidade turbulenta são baseados no conceito da viscosidade turbulenta introduzido por Boussinesq em 1877. Boussinesq propõe para o núcleo turbulento uma analogia entre as tensões turbulentas e as tensões existentes no regime laminar.
- Vimos que a tensão viscosa para um fluido Newtoniano é

$$\underline{\underline{\tau}} = \left\{ \mu [\mathbf{grad} \vec{V} + (\mathbf{grad} \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \mathbf{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} \right\}$$

Em notação indicial a equação acima pode se escrita com

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

- Fazendo uma analogia entre a tensão laminar e turbulento, a tensão turbulenta é definida como:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho \kappa \delta_{ij}$$

- onde  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta.
- O termo  $\rho \kappa$  é a parte isotrópica do tensor e é introduzido para representar a pressão dinâmica associada aos turbilhões, em analogia à pressão estática, termodinâmica.  $\kappa$  é a energia cinética turbulenta, definida como

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

- Com a substituição da expressão para a tensão de Reynolds na equação média de quantidade de movimento, obtêm-se a seguinte expressão para a equação de conservação de quantidade de movimento linear para regime turbulento baseada no conceito da viscosidade turbulenta

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho \kappa \delta_{ij} \right]$$

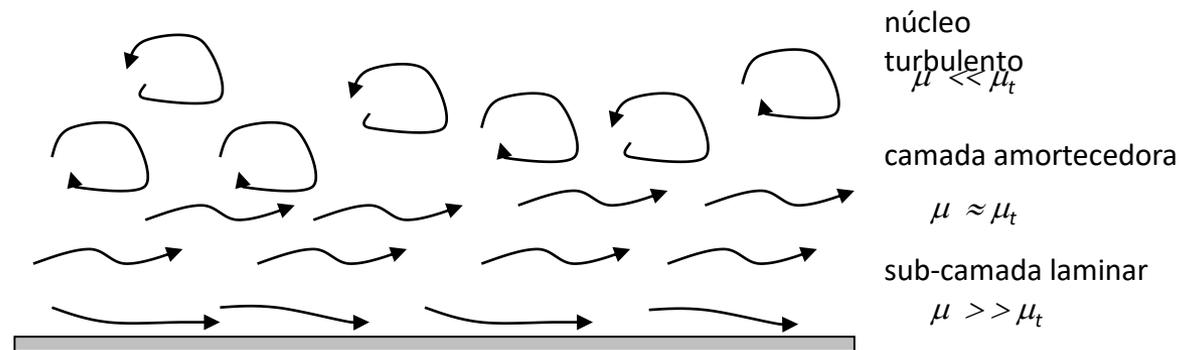
$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ef} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \right) + \rho g_i \quad (*)$$

- onde  $P$  é a pressão modificada, definida como

$$P = p + \frac{2}{3} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} \rho \kappa$$

- e a viscosidade efetiva  $\mu_{ef}$ :  $\mu_{ef} = \mu + \mu_t(\mathbf{x}, t)$
- onde  $\mu$  é a viscosidade molecular e  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta.

- A equação (\*) não constitui um modelo de turbulência por si só, mas é a base para construção de um grande número de modelos de turbulência simples e complexos, cujo ponto de partida é a avaliação da viscosidade turbulenta  $\mu_t$ .
- A viscosidade turbulenta não é uma propriedade, e sim função do escoamento. Analisando o escoamento próximo à parede, observamos que na região imediatamente adjacente à parede, a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é desprezível em relação a viscosidade absoluta  $\mu$ . Esta região é denominada sub-camada laminar. Longe da parede, na região do núcleo turbulento, a viscosidade absoluta  $\mu$  é de uma magnitude muito inferior à da viscosidade turbulenta  $\mu_t$ .



- 
- Diferentes modelos têm sido propostos para a avaliação da viscosidade turbulenta. Cada modelo apresenta um grau de complexidade diferente e com uma abrangência diferente.
  - Os modelos podem ser classificados em modelos:
    - modelos algébricos, modelos de zero equações diferenciais
    - modelos de uma equação diferencial
    - modelos de duas equações diferenciais
    - modelos de  $n$  equações diferenciais

# VISCOSIDADE TURBULENTA

## Interpretação física:

- De acordo com a teoria cinética dos gases, a viscosidade absoluta (molecular) é resultante da transferência de quantidade de movimento resultante da colisão de moléculas ( $\mu \approx \rho a \xi$ ), onde  $a$  é a velocidade do som e  $\xi$  é o caminho médio livre entre colisões.
- De forma análoga a viscosidade turbulenta é definida como sendo resultante da transferência de quantidade de movimento da colisão de turbilhões turbulentos, podendo ser estimada por

$$\mu_t \approx \rho V_c L_c$$

onde  $V_c$  e  $L_c$  são, respectivamente, a velocidade e o comprimento característico ou típicos da escala de movimento.

- Os diversos modelos para viscosidade turbulenta, diferem com respeito a determinação dos valores característicos da escala turbulenta.

---

# Modelos Algébricos

- Os modelos algébricos também são chamados de modelos de zero equações (diferencias)

## Viscosidade Turbulenta Constante

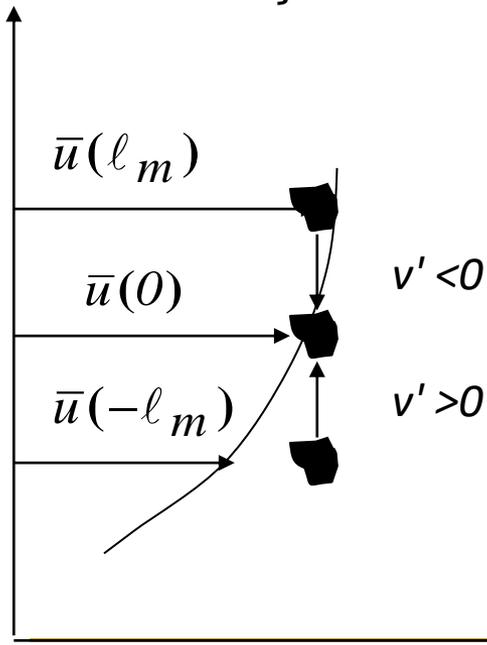
- Este é o modelo mais simples possível. Ocasionalmente, como uma primeira aproximação, para alguns escoamentos, a viscosidade turbulenta pode ser considerada como constante, onde o valor da constante deveria ser ajustado a partir de dados experimentais, Este modelo não é muito utilizado, por ser muito grosseiro.

## Modelo de Comprimento de Mistura:

- A *Hipótese do Comprimento de Mistura* foi desenvolvida por Prandtl (1925), considerando um escoamento turbulento simples com

$$\bar{u} = \bar{u}(y) \quad ; \quad \bar{v} = \bar{w} = 0$$

- Considere que em um escoamento turbulento ao longo de uma parede, porções de fluido se juntam e se movimentam através de um determinado comprimento  $\ell_m$  sem alterar sua quantidade de movimento na direção x.



Vamos analisar o movimento de uma porção de fluido começando em  $y = -\ell_m$  e se deslocando com velocidade  $v$  positiva ( $v' > 0$ ) até a posição  $y = 0$ . Sua quantidade de movimento por unidade de volume é  $\rho \bar{u}(-\ell_m)$ . Considerando que o fluido mantém sua quantidade de movimento, sua velocidade na nova posição  $y=0$  é menor do que a velocidade a existente lá. A diferença entre as velocidades na nova posição será

$$\Delta \bar{u}_1 = \bar{u}(0) - \bar{u}(-\ell_m)$$

- esta diferença de velocidades pode ser estimada utilizando uma expansão em série de Taylor

$$\Delta \bar{u}_1 \approx \ell_m \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0}$$

- Considerando agora, uma porção de fluido se deslocando com velocidade negativa ( $v' < 0$ ), saindo de  $y = \ell_m$  até a posição  $y = 0$ . Sua velocidade será maior do que da nova posição e a diferença de velocidades será

$$\Delta \bar{u}_2 \approx \ell_m \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0}$$

- As diferenças no valor de velocidade originada pelo movimento transversal podem ser interpretadas como as flutuações de velocidade em  $y=0$ . O valor médio do módulo dessas flutuações de velocidade em  $y=0$  pode ser avaliado por

$$\overline{\|u'\|} = \frac{1}{2} \left( \|\Delta \bar{u}_1\| + \|\Delta \bar{u}_2\| \right) = \ell_m \left\| \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0} \right\|$$

- Analisando a equação anterior, pode-se interpretar o comprimento de mistura, como sendo a distância que deve ser percorrida por uma porção de fluido com sua velocidade original de tal forma que a diferença entre os valores de sua velocidade e o da velocidade na nova região seja igual ao valor médio da flutuação de velocidade naquela região.
- Considerando que o componente transversal de flutuação de velocidade,  $v'$ , seja da mesma ordem de grandeza que o componente horizontal,  $u'$ , isto é

$$\overline{\|v'\|} = c \overline{\|u'\|} = c \ell_m \left\| \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0} \right\|$$

onde  $0 < c < 1$ .

- Para avaliar o produto  $\overline{u' v'}$ , podemos notar que uma condição de  $v' > 0$  geralmente está associada a uma condição de  $u' < 0$ , já que porções de fluido vindas de regiões com menores velocidades tendem a produzir uma redução de velocidade (flutuação) no novo meio. Usando o mesmo argumento, podemos associar à condição de  $v' < 0$  valores de  $u' > 0$ . Desta forma, a tensão cisalhante  $\overline{u' v'}$  pode ser escrita para o perfil de velocidade representado na figura como

$$\overline{u' v'} = - c \overline{\|u'\|} \overline{\|v'\|}$$

que finalmente, pode ser rescrita em função da velocidade média como

$$\overline{u' v'} = - \ell_m^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

- onde a constante  $c$  foi incorporada na expressão para  $\ell_m$ , que ainda não foi definida.

- A expressão anterior, deve ser modificada, para que o sinal da tensão turbulenta seja coerente para diferentes perfis de velocidade, logo

$$\overline{u' v'} = - \ell_m^2 \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\| \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

- Esta expressão é o principal resultado da ***Hipótese de Comprimento de Mistura de Prandtl.***

- Finalmente, podemos determinar a viscosidade turbulenta, pois

$$- \rho \overline{u' v'} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

Então  $\mu_t = \rho \ell_m^2 \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\|$  sendo  $V_c = \ell_m \left\| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\|$

já que  $\mu_t = \rho V_c \ell_m$

A distribuição de  $\ell_m$  deve ser especificada algébricamente.

Para escoamentos mais gerais, a viscosidade turbulenta pode ser obtida de

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right]^{1/2}$$

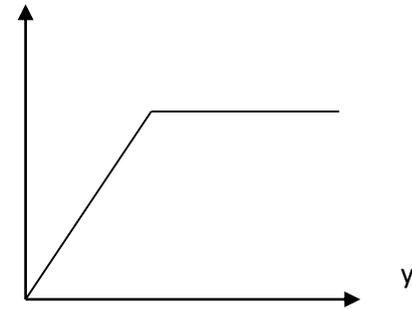
## Distribuição do Comprimento de Mistura

- O valor do comprimento de mistura  $l_m$  varia de acordo com o tipo de escoamento:
- camadas cisalhantes livres: Para camada cisalhantes livres, o comprimento de mistura é considerado constante através da camada e proporcional a espessura local da camada cisalhante  $\delta$ . A razão  $l_m / \delta$  varia para cada tipo de escoamento (ver Launder e Spalding, 1972). Para uma boa concordância com resultados experimentais, a razão  $l_m / \delta$  pode ser definida como:
  - i. camadas de mistura:  $l_m / \delta = 0,07$
  - ii. esteira planas:  $l_m / \delta = 0,16$
  - iii. jatos planos:  $l_m / \delta = 0,09$

- camadas limites ao longo de paredes: Para escoamentos ao longo de superfícies sólidas, espera-se que à medida que se aproxima a superfície sólida, a escala de comprimento da turbulência associada ao tamanho dos vórtices diminua. Nestas situações, o comprimento de mistura é definido como

$$\ell_m = K y \quad \text{para} \quad y \leq (\lambda / K) \delta$$

$$\ell_m = \lambda \delta \quad \text{para} \quad y \geq (\lambda / K) \delta$$



onde  $K= 0,435$  e  $\lambda = 0,09$  e  $\delta$  é a espessura da camada limite local.

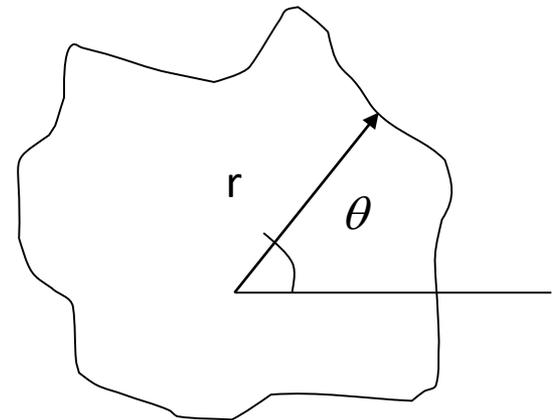
- escoamentos desenvolvidos em dutos: Neste caso, a fórmula de Nikuradse é satisfatória ( $R$  é o raio da tubulação e  $y$  é a distância à parede)

$$\ell_m / R = 0,14 - 0,08 (1 - y / R)^2 - 0,06 (1 - y / R)^4$$

- escoamentos desenvolvidos em dutos com geometria arbitrária: Buleev (1962) sugere a seguinte expressão

$$\ell_m^{-1} = 1,25 \int_0^{2\pi} r^{-1} d\theta$$

onde  $r$  é o comprimento do raio desenhado a partir de um certo ponto até a parede do duto ao longo da direção  $\theta$ .



## Comentários sobre o Modelo de Comprimento de Mistura

- O modelo é limitado a escoamento simples, não sendo capaz de responder a mudanças rápidas no escoamento, a recirculação de escoamentos, a efeitos de turbulência na corrente livre, etc.
- O fato de  $\mu_t$  ser zero quando  $\partial u/\partial y$  é zero é uma implicação inconveniente; causando a inexistência de fluxo de calor turbulento através de planos com gradiente de velocidade nulo.
- Mesmo para escoamentos simples, a distribuição de  $\ell_m$  não é universal. Dificuldades ocorrem quando uma camada de mistura torna-se um jato, quando um jato encontra-se com uma camada limite próxima a uma parede, etc.
- Para escoamentos complexos, não existe esperança de se prescrever uma distribuição útil para  $\ell_m$ .

---

# Estrutura da Turbulência em Escoamentos Junto à Superfícies Sólidas

- Os níveis de tensões de Reynolds em escoamentos turbulentos junto à superfície sólidas são muito menores do que aqueles encontrados em escoamentos livres, devido à ação inibidora da parede.
- Por outro lado, devido à inibição do movimento do fluido na direção normal à parede, a anisotropia das flutuações de velocidade junto à parede é bem maior do que no caso de escoamento livre.

- A figura abaixo, ilustra dados experimentais para a distribuição de tensões de Reynolds ( $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ ;  $\overline{u'v'}$ ) e velocidade média ( $\overline{u}$ ) junto a uma parede sólida, onde  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento longe da parede. Como pode ser observado, as maiores intensidades das flutuações de velocidade ocorrem na região adjacente à parede, onde os gradientes de velocidades são muito elevados e, como conseqüência a geração da turbulência  $P_k$  também é elevada

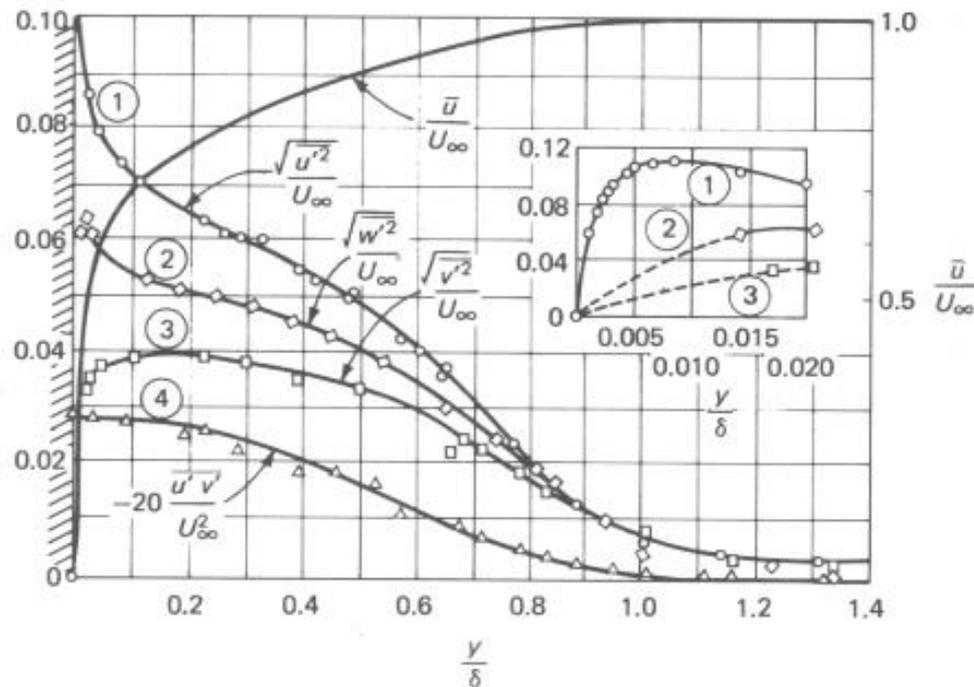
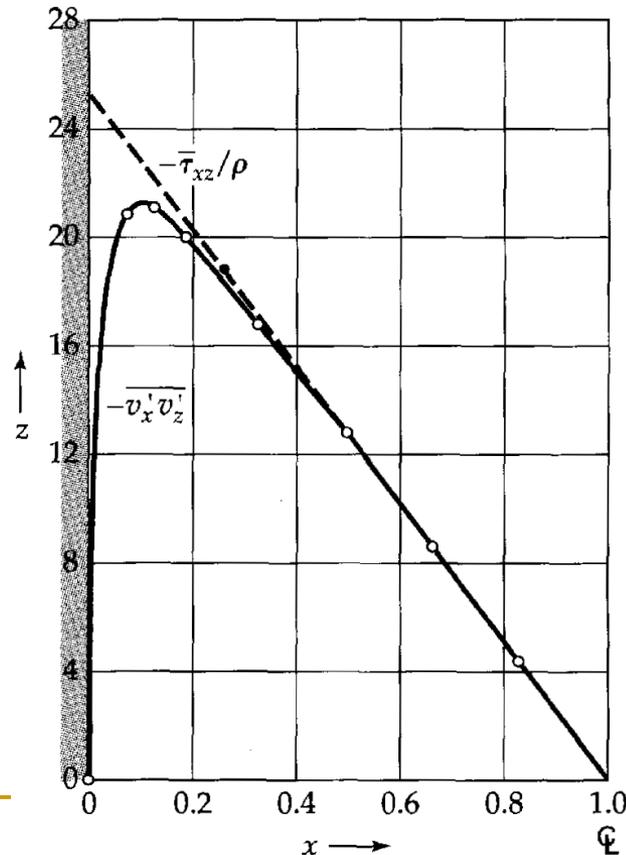


FIGURE 5-36

Flat-plate measurements of the fluctuating velocities  $u'$  (streamwise),  $v'$  (normal), and  $w'$  (lateral) and the turbulent shear  $u'v'$ . [After Klebanoff (1955).]

- A figura seguinte ilustra a distribuição de tensão total e turbulenta para um escoamento turbulento em um canal formado por placas paralelas, distantes entre si de  $H$ . Note que na maior parte do escoamento as tensões se devem exclusivamente aos termos turbulentos. Apenas junto à parede, onde as flutuações devem ir a zero, as tensões laminares dominam.

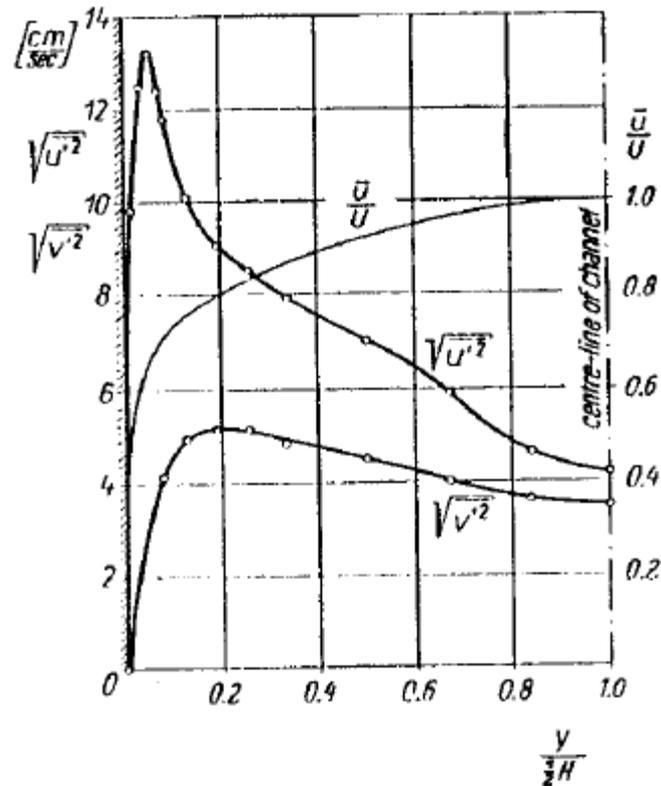


$$\tau = \tau_l + \tau_t$$

$$\tau_t = -\rho \overline{u' v'}$$

$$-\overline{u' v'}$$

- A figura a seguir ilustra os componentes de flutuação turbulenta em um canal.

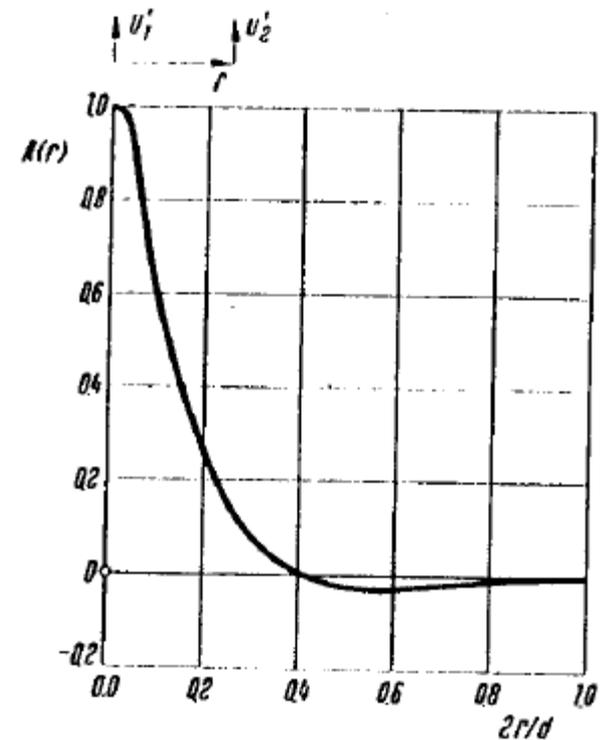


- O escoamento próximo à parede, seja para uma camada limite ou escoamento em um canal é muito semelhante e as mesmas leis podem ser aplicadas em ambas as situações.

- Para caracterizar a turbulência, além da distribuição das flutuações da velocidade, pode-se utilizar a **função de correlação**

$$R = \frac{\overline{u'_1 u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \sqrt{\overline{u'^2_2}}}$$

- A figura ao lado ilustra a função de correlação para um duto circular. No centro, as flutuações  $u'_1$  e  $u'_2$  são idênticas, logo  $R(0)=1$ . Note que a função correlação cai rapidamente em direção a parede.

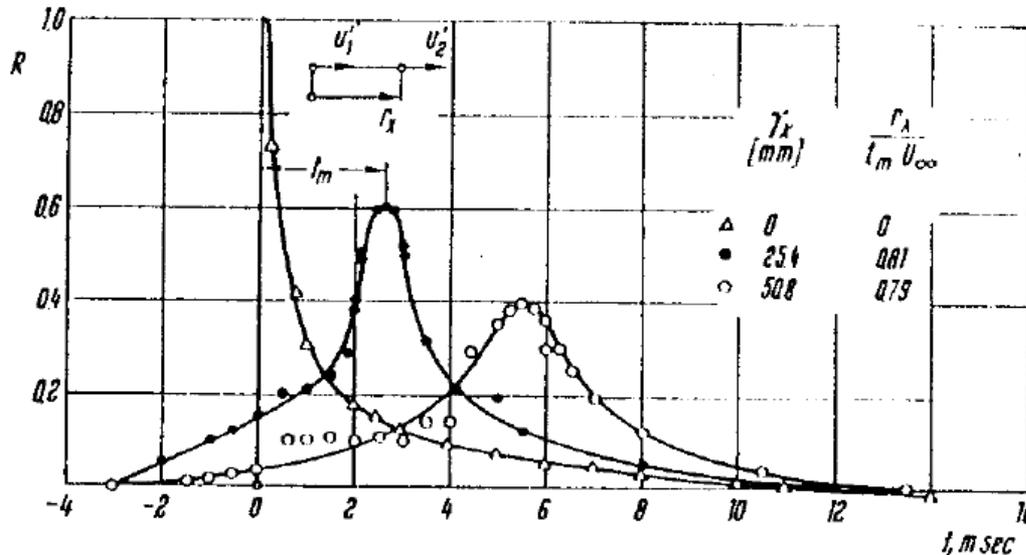


- O comprimento característico da estrutura turbulenta do escoamento ou ***comprimento de escala turbulento*** é

$$\ell = \int_0^{D/2} R(r) dr$$

- Este comprimento é uma medida da extensão da massa de fluido que se desloca como uma unidade e nos dá uma idéia do tamanho médio dos vórtices ou turbilhões (*eddies*) turbulentos.
- Se as flutuações são medidas na mesma coordenada, mas em instantes de tempo diferentes [  $u'_1(t_1)$  e  $u'_2(t_2=t_1+\Delta t)$  ], tem-se a **função de auto-correlação**

- **Correlação de espaço-tempo** consiste em avaliar dois componentes da velocidade em diferentes posições e diferentes instantes de tempo



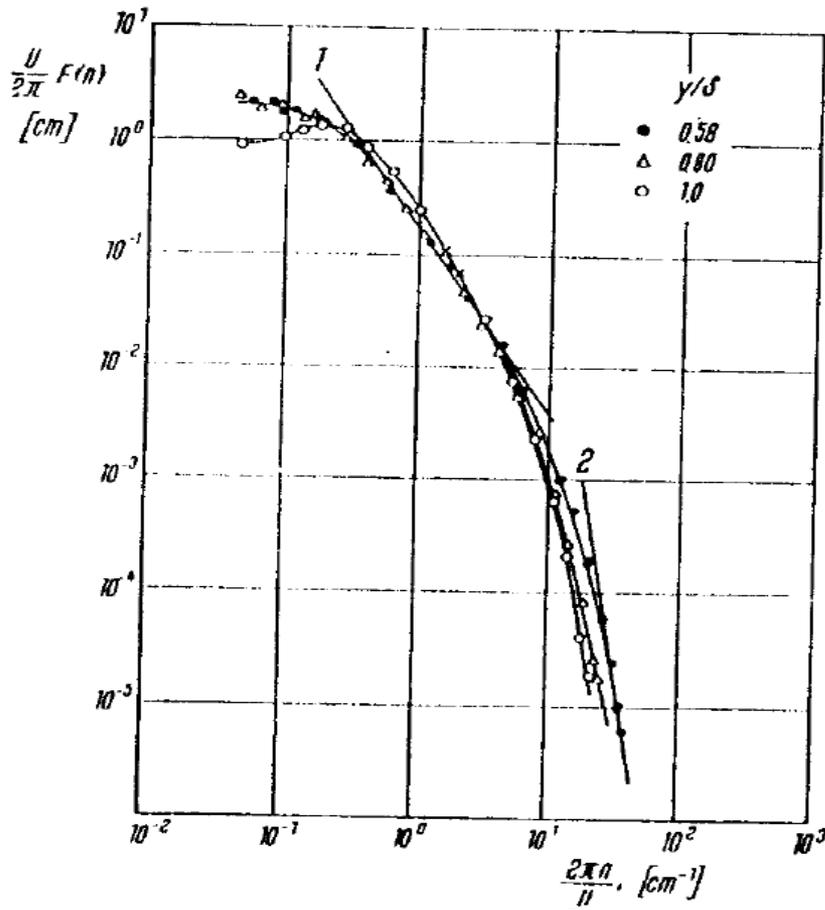
Distance from wall:  
 $y/\delta = 0.24$   
 Boundary-layer thickness:  
 $\delta = 16.8 \text{ mm}$

- O deslocamento temporal  $t_m$  do máximo de cada curva é devido a passagem dos turbilhões turbulentos, os quais no exemplo acima, se movem com velocidade aproximadamente igual a  $0,8 U_\infty$ . O valor máximo decai, pois com a passagem do tempo, o turbilhão perde sua individualidade devido a mistura com o fluido turbulento adjacente. Paralelamente, novos turbilhões são continuamente formados.

- Uma descrição alternativa da turbulência pode ser obtida com uma **análise da frequência**.
- **Espectro:**
  - Seja  $n$  a frequência e  $F(n)$  a fração da raiz quadrada da flutuação longitudinal  $\overline{u'^2}$  que existe no intervalo de frequência de  $n$  a  $n+dn$ .
  - $F(n)$  é a distribuição espectral de  $\overline{u'^2}$ . Representa a densidade da distribuição de  $\overline{u'^2}$  em  $n$ , e por definição, tem-se
$$\int_0^{\infty} F(n) dn = 1$$
  - A função espectral  $F(n)$  é a transformada de Fourier da função de auto-correlação.

■ Distribuição de espectro de energia da camada limite sobre uma placa plana

$\overline{u'^2}$  da camada limite sobre uma placa plana



Curve (1):  $F \sim n^{-5/3}$

Curve (2):  $F \sim n^{-7}$

- Os maiores valores de energia estão associados as menores freqüências.
- A medida que a freqüência cresce, o espectro de energia varia de acordo com a teoria de Kolmogorov,  $F(n) \approx n^{-5/3}$ .
- Para freqüências mais altas, o espectro de energia decai mais rapidamente devido a ação da viscosidade cinemática. De acordo com Heissenberg,  $F(n) \approx n^{-7}$
- A partir da distribuição do espectro de energia, pode-se verificar que uma corrente turbulenta possui turbilhões de vários tamanhos, já que a freqüência é inversamente proporcional ao comprimento de onda.

## Perfil de Velocidade na Região da Parede

- Vamos agora estimar o perfil de velocidade em cada uma das zonas na região próxima à parede, a partir das equações de conservação.

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$

- Vamos definir velocidade e distância adimensionais como

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \qquad y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$$

onde  $u^*$  é chamado de velocidade de atrito, sendo definido como

$$u^* = \sqrt{\tau_s / \rho}$$

- Considerando que próximo a parede o gradiente de pressão é desprezível  $\partial \bar{p} / \partial x \approx 0$ , e que  $\bar{v} \approx 0$ ;  $\partial \bar{u} / \partial x \approx 0$ , a equação de quantidade de movimento linear se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) \approx 0$$

logo

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \approx cte = \tau_s$$

- Numa vizinhança imediatamente adjacente à parede, **na sub-camada laminar**, existe uma região onde os termos viscosos dominam,

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_s$$

- integrando a equação, obtemos  $\bar{u} = \frac{\tau_s}{\mu} y$

- esta equação pode ser rescrita como  $\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{\rho u^* y}{\mu}$  ou ainda  $u^+ = y^+$

- A conclusão é que o perfil de velocidade de um escoamento turbulento possui forma linear na região muito próxima à parede. Podemos concluir ainda que  $u^+$  e  $y^+$  e são variáveis de similaridade para esta região. Dados experimentais mostram que esta relação é válida para  $y^+ < 5$ .
- Imediatamente acima da região laminar viscosa deve existir uma região onde os efeitos das tensões laminares e turbulentas possuem a mesma importância. É a **camada amortecedora**. Esta região é mais difícil de ser modelada.
- A região seguinte, chamada de **Região turbulenta**, a tensão turbulenta domina, então

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u' v'} \approx cte = \tau_s$$

$$- \rho \overline{u' v'} = \tau_s$$

- Infelizmente, não podemos integrar a equação acima, sem a introdução de uma relação constitutiva que permita modelar o termo turbulento. Assumindo que próximo a parede a aproximação do comprimento de mistura se aplica, podemos reescrever a tensão turbulenta como

$$-\rho \overline{u'v'} \approx \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left( \rho u^* \ell \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left( \rho u^* k y \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

- igualando a tensão turbulenta com a tensão cisalhante na parede temos

$$\left( \rho u^* k y \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_s \Rightarrow \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{k y^+}$$

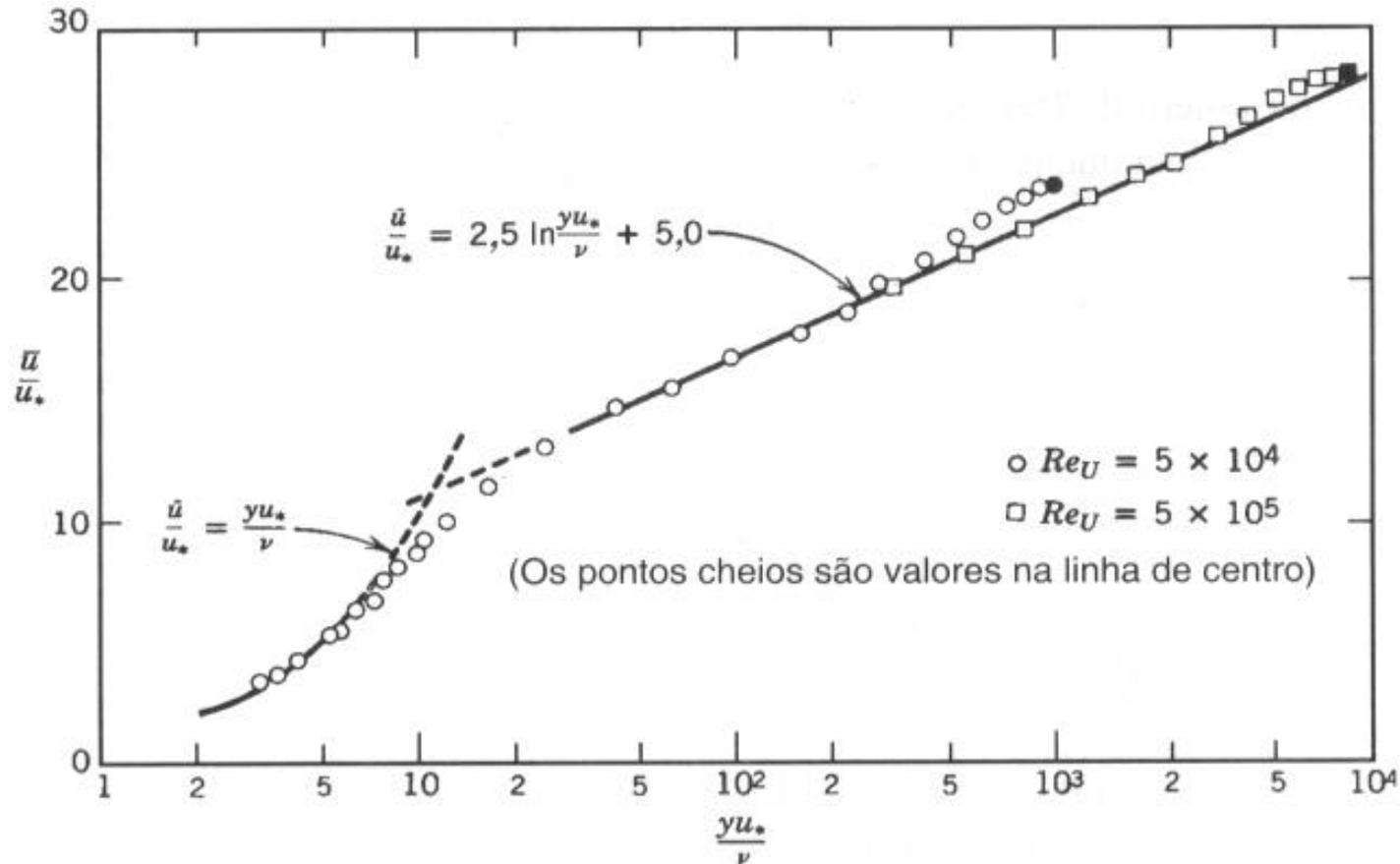
- o coeficiente  $k$  é conhecido como a constante de von Kármán, e de acordo com dados experimentais é aproximadamente igual a 0,4.

- Integrando a equação acima, obtemos

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + cte$$

- Para paredes lisas o valor da constante de integração é determinado empiricamente como sendo igual a 5.

- A figura a seguir ilustra uma comparação entre os perfis para a região da sub-camada laminar e região turbulenta e dados experimentais, onde observa-se excelente concordância



# Camada Limite Turbulenta: Placa Plana

- Para estimar o perfil de velocidade médio turbulento sob uma placa plana, pode-se utilizar expressões empíricas  $\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$

- A espessura da camada limite pode ser estimada a partir da seguinte correlação empírica

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,381}{\mathbf{Re}_x^{1/5}} - \frac{10270}{\mathbf{Re}_x}$$

Infelizmente, este perfil não é adequado para avaliar a tensão cisalhante na parede, pois prevê  $\partial \bar{u} / \partial y = \infty$  na parede. Recomenda-se a utilização do seguinte perfil empírico

$$\tau_s = 0,0233 \rho U_\infty^2 \left(\frac{v}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad \text{para } \mathbf{Re}_x > 5 \times 10^5$$

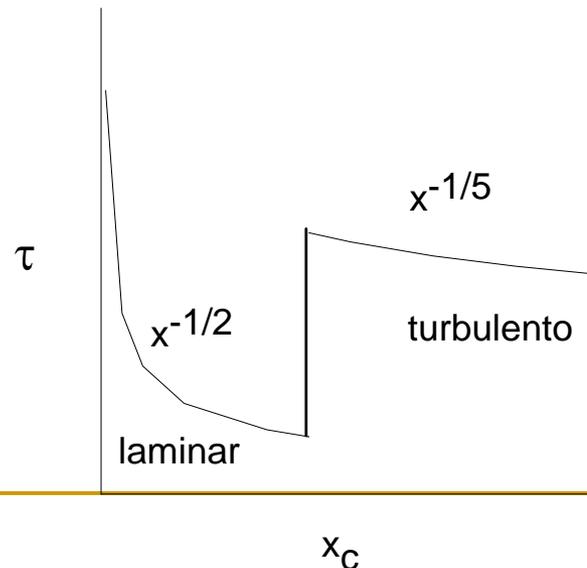
O coeficiente de atrito local pode ser obtido, sendo igual a

$$C_f(x) = \frac{\tau_s(x)}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

$$C_f(x) = \frac{0,0592}{Re_x^{1/5}}$$

para  $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$

A variação da tensão ao longo da superfície encontra-se ilustrada na figura abaixo. Para determinar a força resultante em uma placa é preciso levar em consideração que na parte anterior da placa,  $x < x_c$  o regime é laminar e a tensão cai com  $x^{-1/2}$ , e em  $x_c$  ocorre uma mudança de regime, a transferência de quantidade de movimento cresce, e a tensão cisalhante cresce substancialmente, passando a cair com  $x^{-1/5}$ .



A força sobre a placa é

$$F = \overline{\tau_s} A_s = \int \tau_s(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_{A_s} C_f(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^L C_f(x) b dx =$$
$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} \left[ \int_0^{x_c} C_{f_{\text{lam}}}(x) b dx + \int_{x_c}^L C_{f_{\text{turb}}}(x) b dx \right] = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \overline{C_{f_L}} A_s$$

$$\overline{C_{f_L}} = \frac{1}{L} \left[ \int_0^L C_{f_{\text{turb}}}(x) dx - \int_0^{x_c} [C_{f_{\text{turb}}}(x) - C_{f_{\text{lam}}}(x)] dx \right]$$

$$\overline{C_{f_L}} = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1740}{\text{Re}_L}$$

$$\text{para } 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^7$$

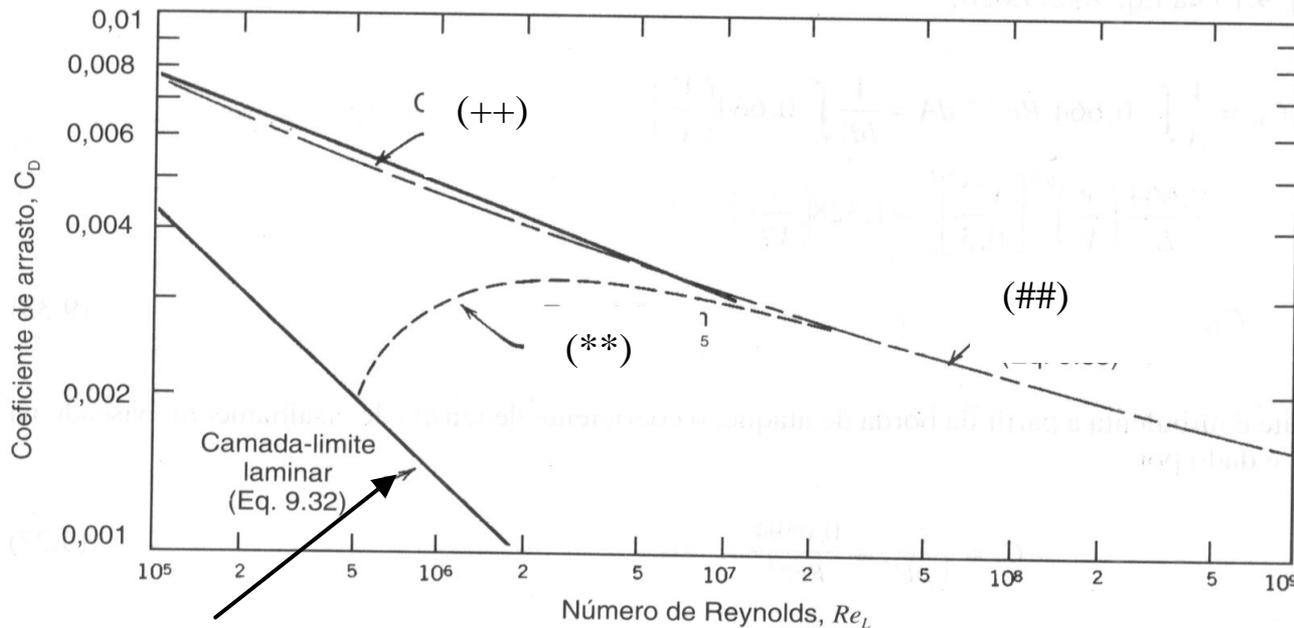
$$\overline{C_{f_L}} = \frac{0,455}{(\log \text{Re}_L)^{2,58}} - \frac{1610}{\text{Re}_L}$$

$$\text{para } 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^9 \quad (**)$$

Se  $x_c \ll L$ , a camada limite sobre a placa é praticamente toda turbulenta, pode-se então aproximar o coeficiente de atrito médio para

Se  $x_c \ll L$  então  $\overline{Cf}_L = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}}$  para  $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$  (++)

Se  $x_c \ll L$  então  $\overline{Cf}_L = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}}$  para  $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^9$  (##)

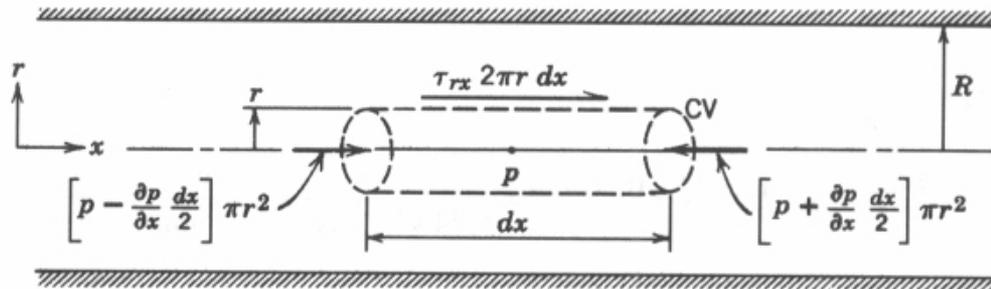


**Fig. 9.8** Variação de coeficiente de arrasto com o número de Reynolds para uma placa plana lisa paralela ao escoamento.

$$\overline{Cf}_L = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}$$

# ESCOAMENTO HIDRODINÂMICAMENTE DESENVOLVIDO TURBULENTO

nos escoamentos hidrodinamicamente desenvolvidos em tubos horizontais, tanto no regime laminar quanto turbulento, a queda de pressão é somente devido às tensões tangenciais nas paredes da tubulação.



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2}$$

□ a tensão na parede é

$$\tau_s = -\tau(r = R) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{R}{2}$$

□ No entanto, o perfil de velocidade varia substancialmente para cada regime de escoamento pois a relação entre a tensão cisalhante e o gradiente de velocidade não é a mesma. Como já foi visto, no regime turbulento.

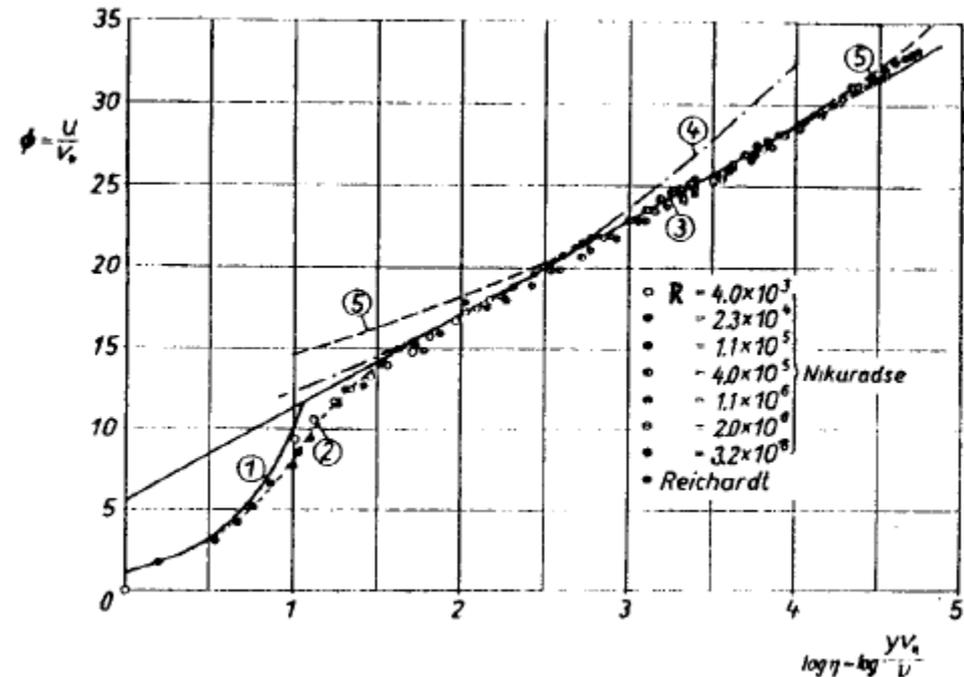
$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \mu_{ef} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad ; \quad \mu_{ef} = \mu + \mu_t$$

□ Para avaliar o perfil de velocidade, precisamos de um modelo de turbulência para determinar a viscosidade turbulenta.

□ Na região da parede, podemos utilizar o mesmo perfil de velocidade  $u^+ \times y^+$  que para uma camada limite.

□

□ A figura ao lado, ilustra a boa concordância com dados experimentais para diversos números de Reynolds



❑ Podemos também, assim como para a camada limite, utilizar dados empíricos.

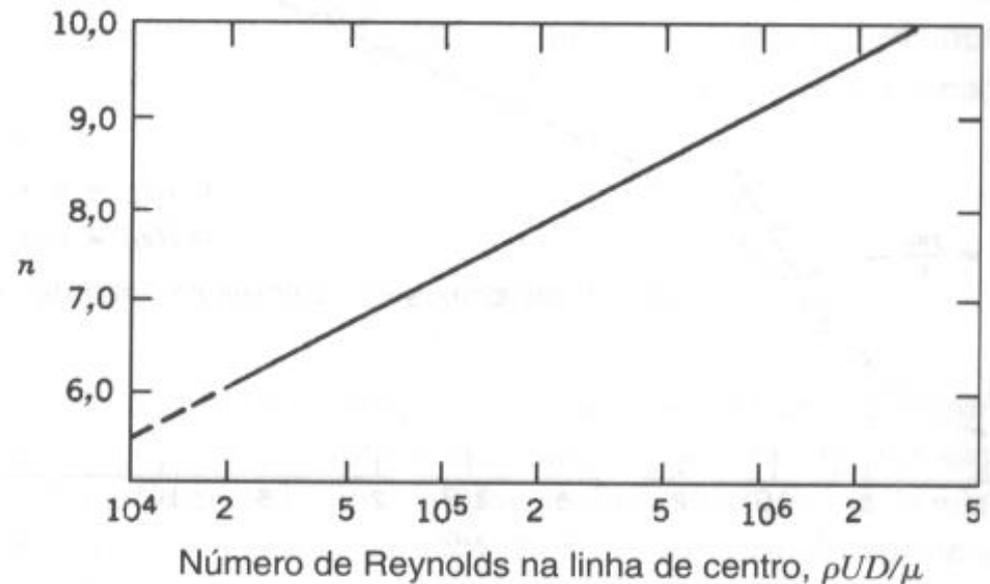
❑ Para um tubo liso, o perfil de velocidade pode ser aproximado pela “lei de potências” de forma análoga ao regime turbulento na camada limite

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

❑ O expoente  $n$  depende do número de Reynolds, baseado na velocidade máxima

$$U = \bar{u}_{\max}$$

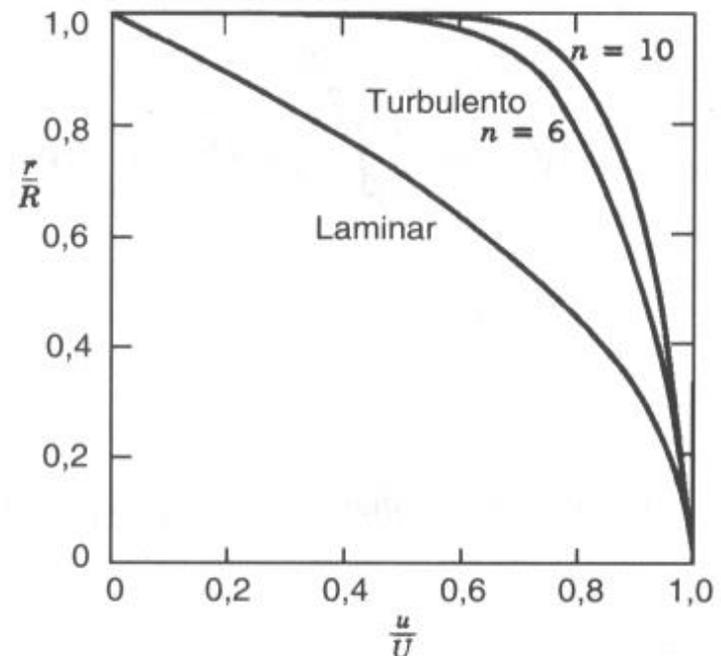
e no diâmetro, de acordo com a figura



- Conhecido o perfil de velocidade, a velocidade média pode ser facilmente obtida

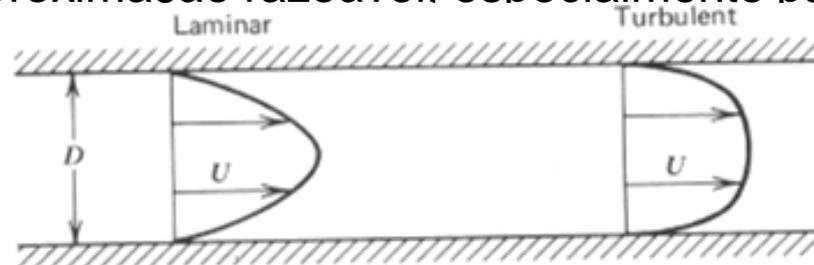
$$Q = \overline{u_m} A_T = \int_{A_T} \bar{u} dA_T = \int_0^R \bar{u} 2\pi r dr \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{u_m}}{u_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

- Naturalmente que a relação entre a velocidade média e máxima depende do expoente  $n$ . Quanto maior o número de Reynolds, maior é o expoente  $n$  e mais achatado é o perfil de velocidade, maior é a tensão cisalhante. Note que a relação entre a velocidade média e máxima para o regime laminar em um tubo circular é  $1/2$ .
- A figura ao lado ilustra uma comparação entre o perfil de velocidade no regime laminar e no regime turbulento para diferentes expoentes.



❑ Na prática, com muita freqüência, especifica-se o expoente  $n = 7$  independente do número de Reynolds.

❑ Vale ressaltar que a hipótese de velocidade uniforme na seção transversal é uma péssima aproximação no caso de regime laminar. Já para o regime turbulento, é uma aproximação razoável, especialmente para altos Reynolds.



❑ O lei  $1/n$  aproxima bem o perfil de velocidade em quase todo o domínio, com exceção da região próxima à parede, não sendo possível estimar o atrito a partir deste perfil.

❑ Utiliza-se então dados empíricos para estimar o fator de atrito, o qual depende não só do número de Reynolds, mas da rugosidade relativa da tubulação.

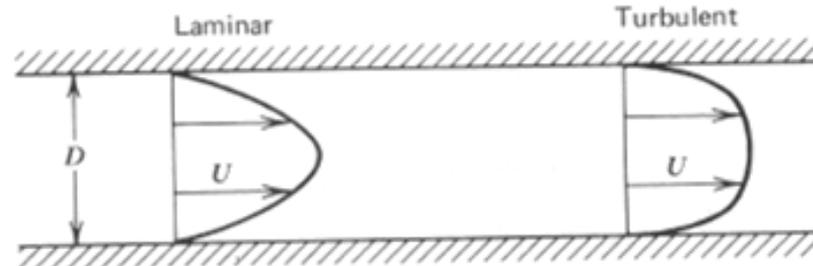
$$f = f(\mathbf{Re}, \varepsilon / D)$$

❑ O fator de atrito nada mais é do que uma queda de pressão adimensional ou tensão cisalhante na parede adimensional

$$f = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} D}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = \frac{4 \tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

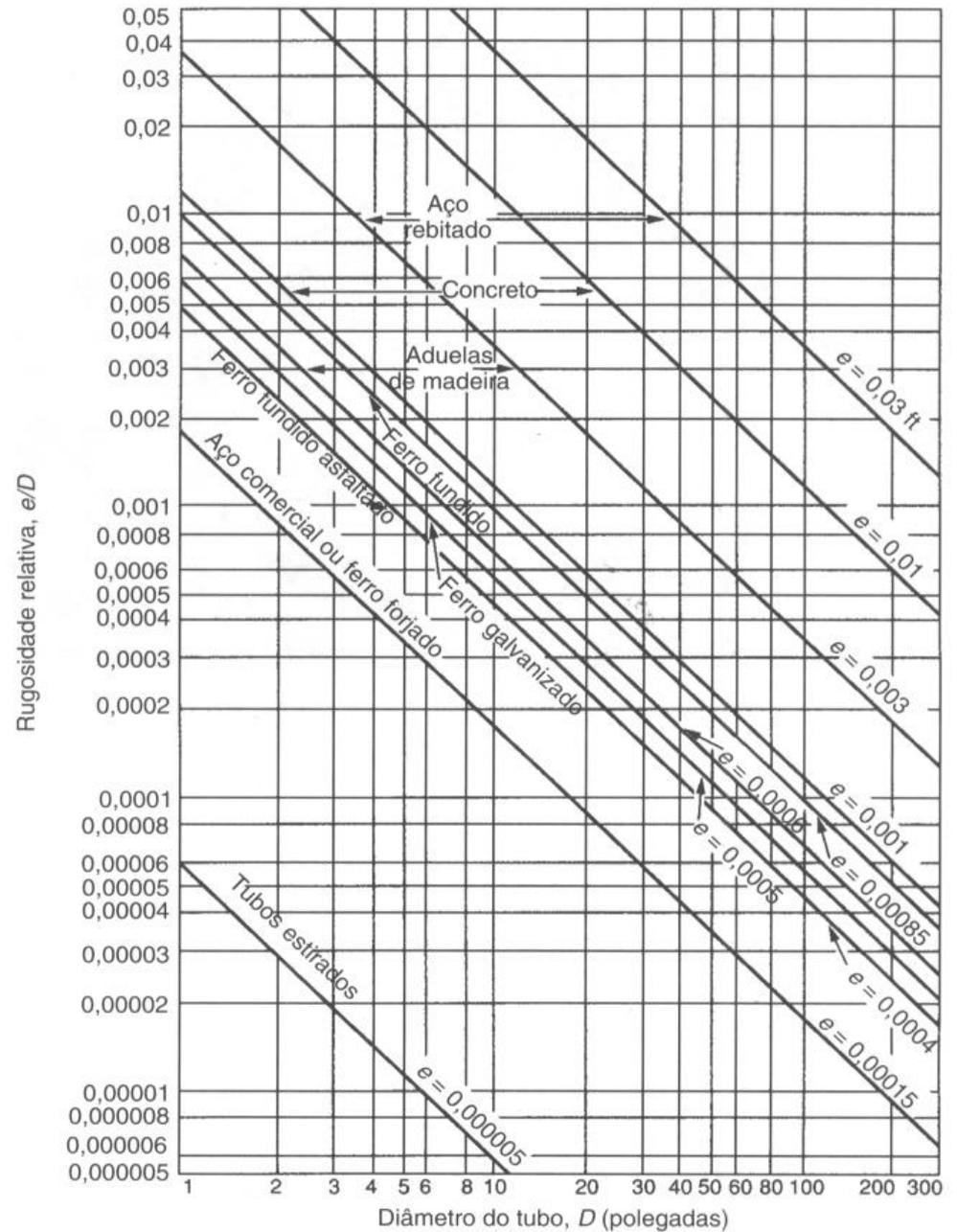
❑ Na prática, com muita frequência, especifica-se o expoente  $n = 7$  independente do número de Reynolds.

❑ Vale ressaltar que a hipótese de velocidade uniforme na seção transversal é uma péssima aproximação no caso de regime laminar. Já para o regime turbulento, é uma aproximação razoável, especialmente para altos Reynolds.

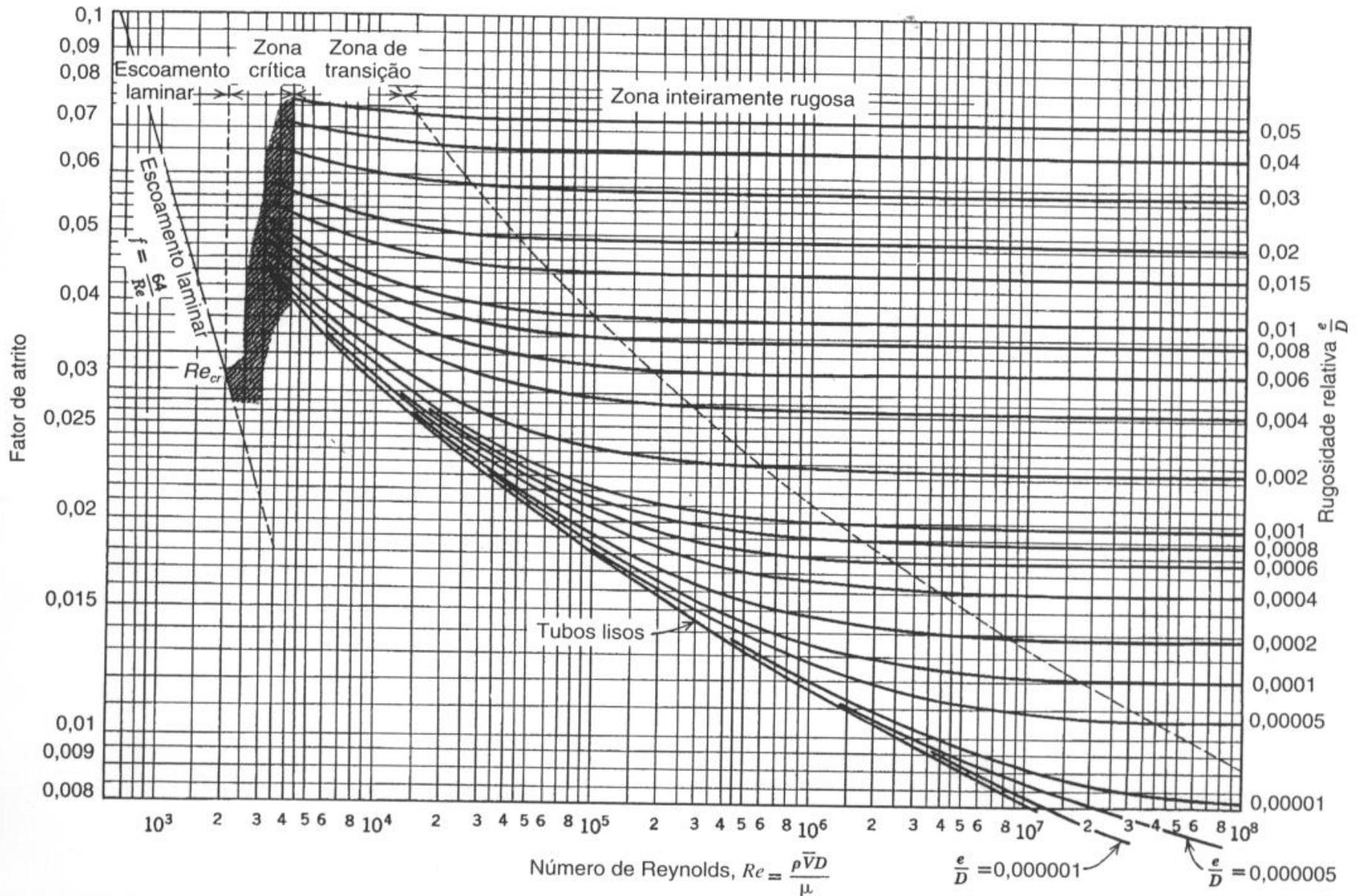


❑ O lei  $1/n$  aproxima bem o perfil de velocidade em quase todo o domínio, com exceção da região próxima à parede, não sendo possível estimar o atrito a partir deste perfil.

A **rugosidade** relativa depende do material da tubulação e do diâmetro da mesma



# O fator de atrito pode ser avaliado a partir do diagrama de Moody



- A representação gráfica é conveniente e facilita a determinação do fator de atrito, no entanto, quando desejamos utilizar de forma sistemática em um programa de computador por exemplo, é desejável, representar a informação do diagrama de Moody por uma correlação.

- A correlação mais utilizada é a fórmula de Colebrook

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2,0 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re} f^{0,5}} \right)$$

- A correlação de Colebrook é uma equação transcendental, isto é, não é possível explicitar o valor do fator de atrito. É necessário resolver de forma iterativa. Miller recomenda como estimativa inicial para o processo iterativo, a seguinte expressão

$$f_o = 0,25 \left[ \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right]^{-2}$$

- Com essa inicialização, obtém-se um resultado dentro de 1% com apenas uma iteração.

# Dutos com seção transversal não circular

□ Fator de atrito

$$f = \lambda = \frac{4 \tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} D_h}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

□ Para escoamento laminar,  $f \text{ Re} = C = \text{cte}$

□ Circular:  $C=64$

□ Triângulo isosceles:  $C= 52$

□ Triângulo equilátero:  $C=53$

□ Quadrado:  $C=57$

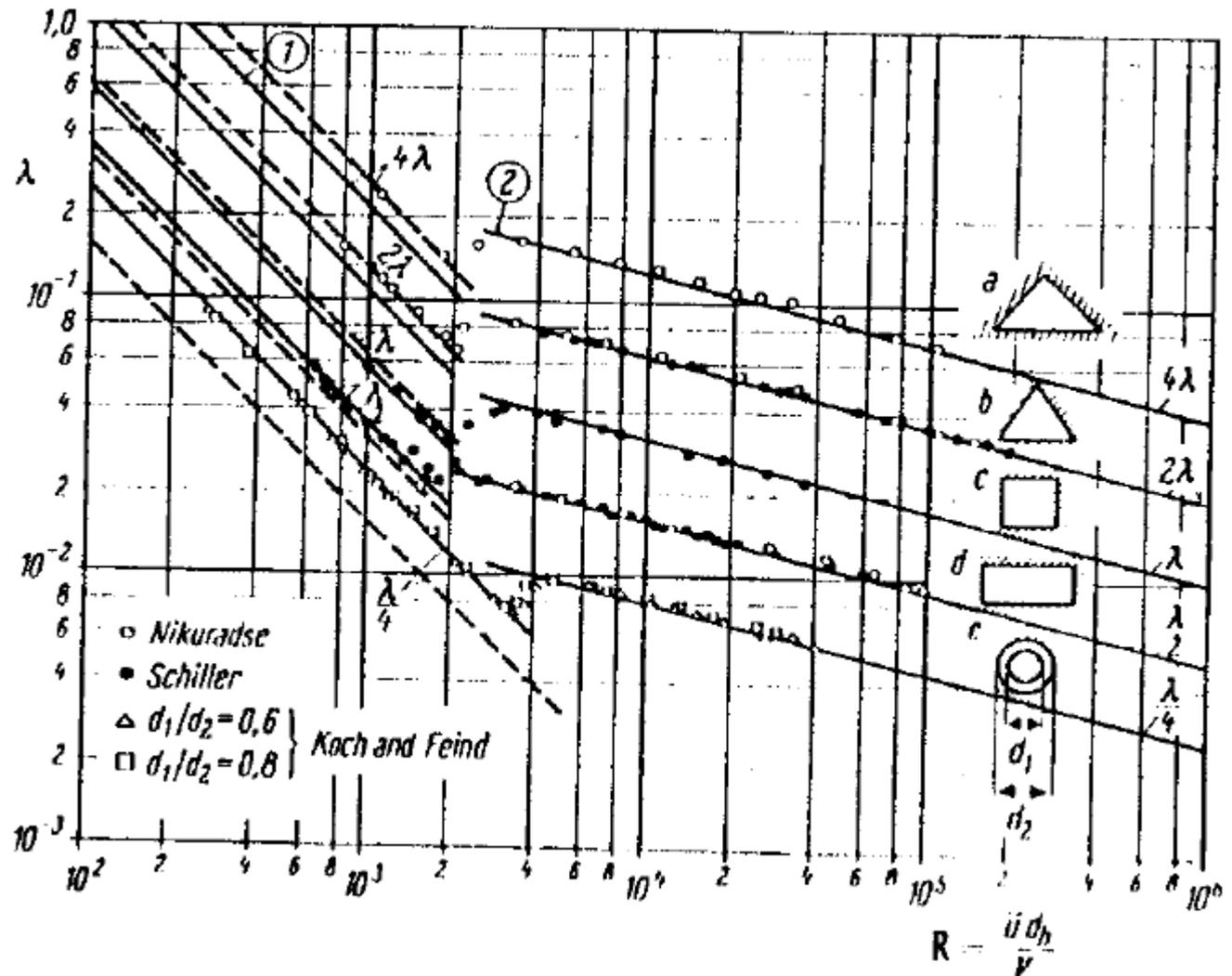
□ Retângulo com razão de aspecto de 3/1 a 5/1: 71

□ Anulus: 54 a 96 para  $d_2/d_1 \rightarrow 1$

# Fator de atrito

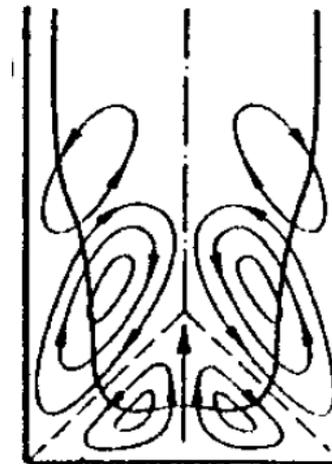
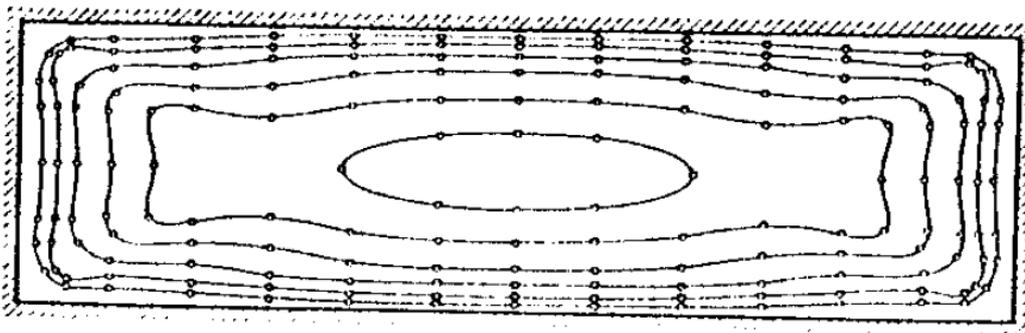
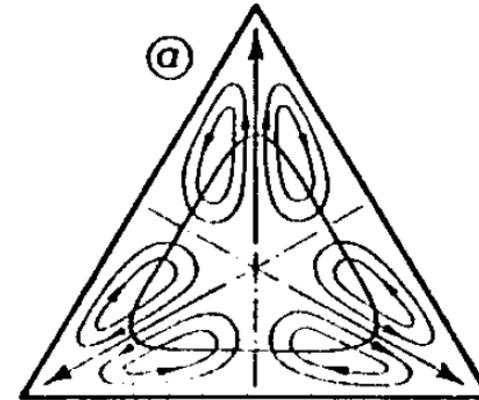
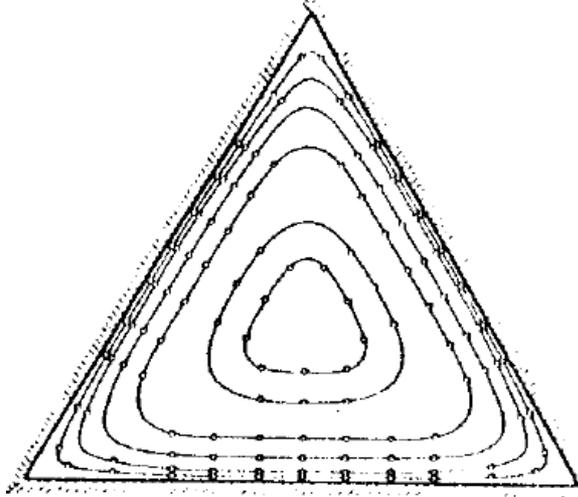
$$f = \lambda = \frac{4 \tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

$$f = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} D_h}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$



- Para escoamento turbulento, com o uso do diâmetro hidráulico, a correlação para duto circular ( curva 2) representa bem as outras geometrias, para escoamento até número de Mach=1.

- Analisando curvas de iso-velocidades nestes dutos, observa-se altas velocidades nas quinas.
- O escoamento secundário continuamente transporta “momentum” do centro para as quinas, gerando altas velocidades

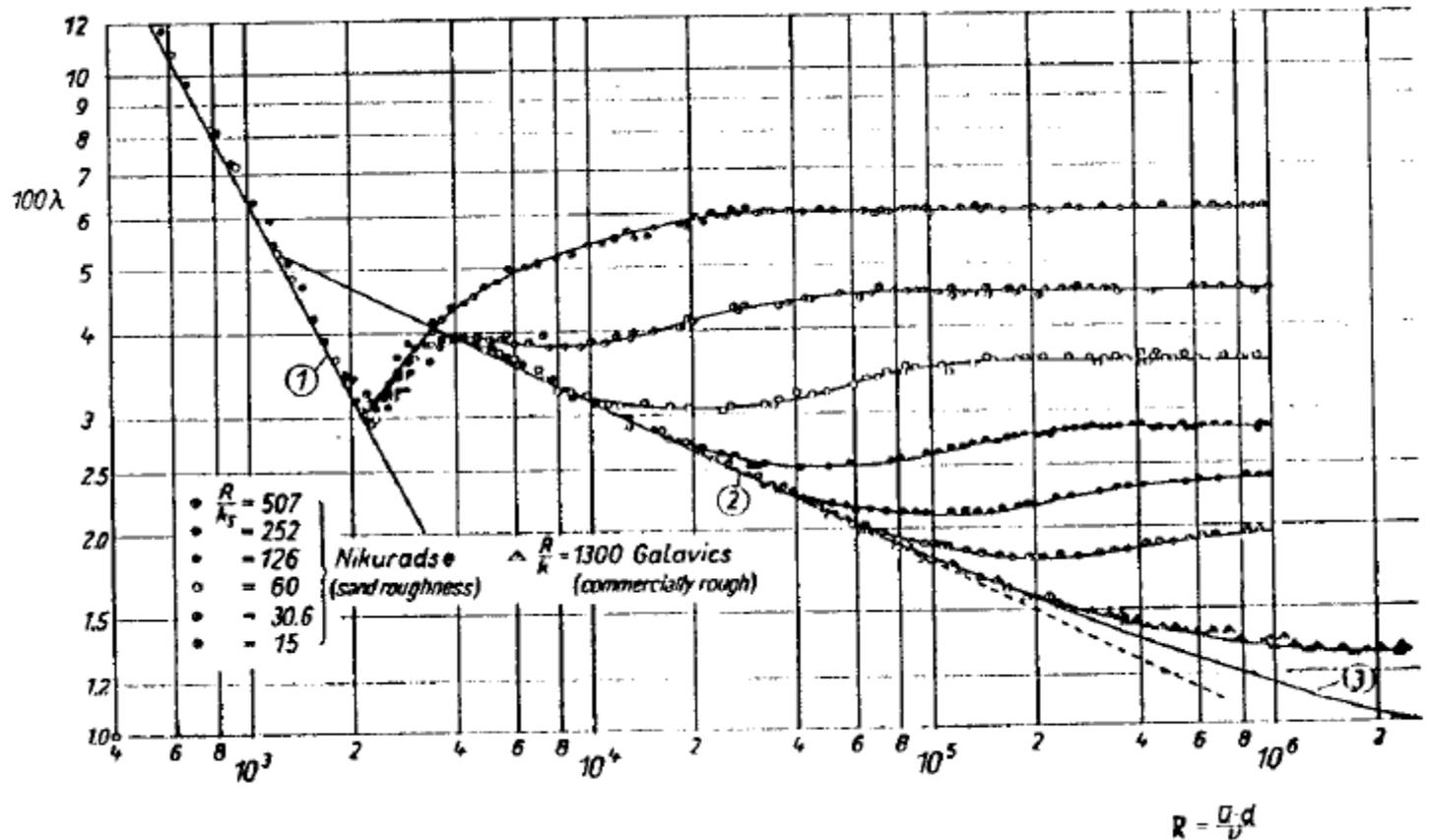


# Dutos rugosos

□ Fator de atrito para duto rugoso com areia:

$$f = \lambda = \frac{4 \tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

$$f = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} D_h}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$$

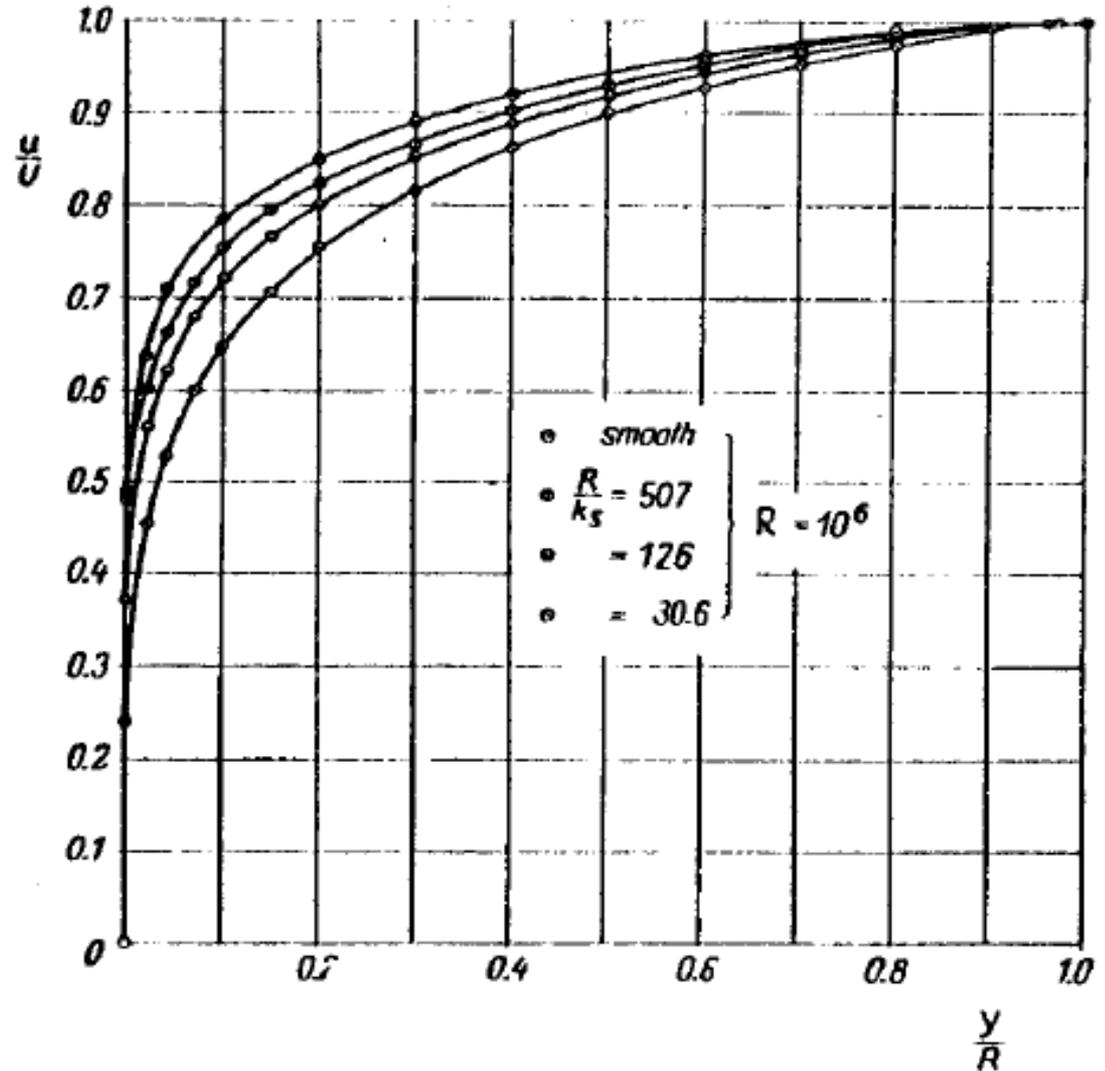


□ Rugosidade relativa:  $k_s/R$

# Distribuição de velocidade

- ▣ Gradiente menos acentuado na parede para duto rugoso (expoente  $n=4 \sim 5$ )

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$



# Lei logarítmica de velocidade

□ Duto liso:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5 \quad ; \quad \kappa = 0,4$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = 5,75 \log y^+ + 5,5$$

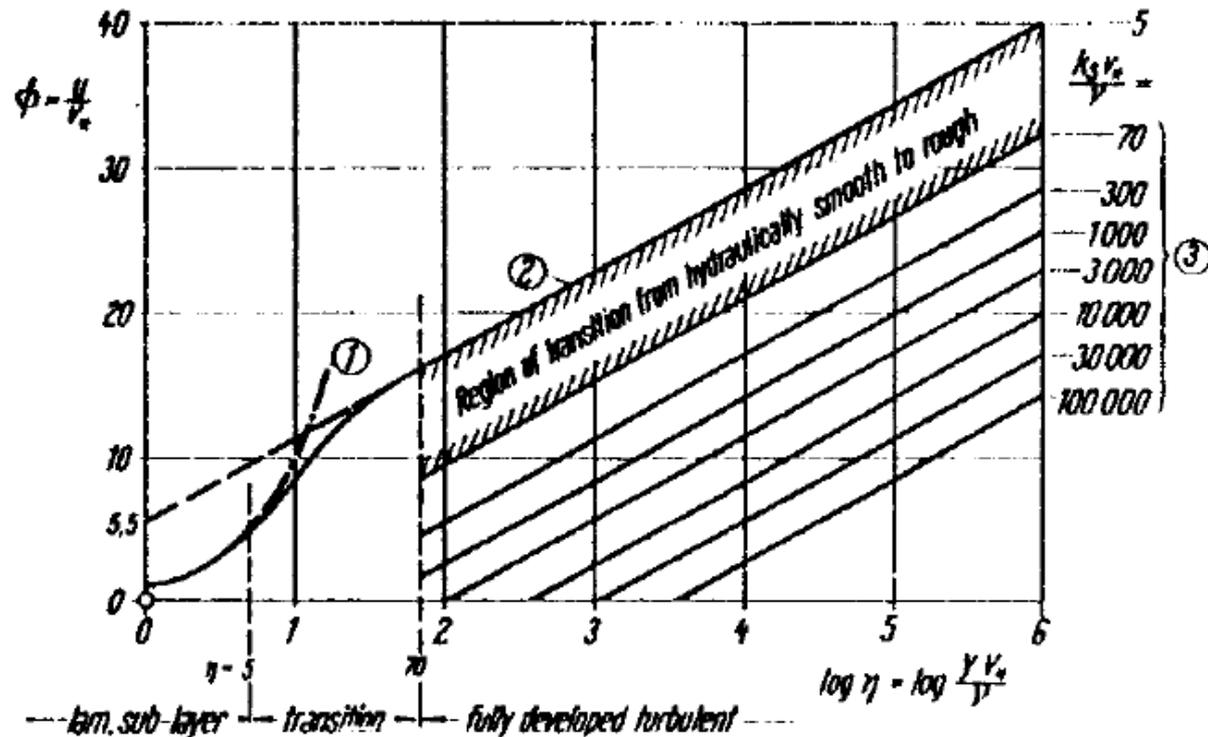
□ Duto rugoso:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = 5,75 \log \frac{y}{k_s} + B$$

$$B = 5,5 + 2,5 \ln(k_s^+)$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = 5,75 \log y^+ + D$$

$$D = 8,5 - 5,75 \log(k_s^+)$$



# Distribuição de Energia Turbulenta

- O movimento oscilatório continuamente extrai energia do movimento médio principal através das tensões turbulentas, sendo que esta energia é completamente dissipada em forma de calor devido à ação da viscosidade nas altas frequências (pequenos vórtices).

Energia cinética  $E(x,t) = \frac{1}{2} \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$

$$\langle E(x,t) \rangle = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \Rightarrow \langle E(x,t) \rangle = \bar{E}(x,t) + \kappa$$

$$\bar{E}(x,t) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \kappa = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \bullet \mathbf{u}'}$$

Energia cinética  
do escoamento  
médio

Energia cinética  
turbulenta

□ A evolução da energia cinética instantânea pode ser obtida da equação de Navier-Stokes

$$\rho \frac{DU_j}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad \text{onde} \quad \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\rho \nu S_{ij} \quad \text{e} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{D\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{Dt} = \mathbf{U} \cdot \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \quad ; \quad \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} E)$$

$$\begin{aligned} U_j \frac{DU_j}{Dt} &= \frac{U_j}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (U_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (U_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left( \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \tau_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (U_j \tau_{ij})}{\partial x_i} - \tau_{ij} S_{ij} \right] \end{aligned}$$

□ Vimos que para um fluido Newtoniano

$$U_j \frac{DU_j}{Dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ U_j \left( -\frac{p}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu S_{ij} \right) \right] - \left( \frac{p}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu S_{ij} \right) S_{ij} \right]$$

$$= \left[ -\frac{\partial U_i (p/\rho)}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\nu U_j S_{ij})}{\partial x_i} - \left( \frac{p}{\rho} S_{ii} + 2\nu S_{ij} S_{ij} \right) \right]$$

Mas  $S_{ii}=0$  pela continuidade para  $\rho = \text{constante}$

Definindo  $T_i = U_i p/\rho - 2\nu U_j S_{ij} \Rightarrow$

tem-se  $\frac{DE}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -2\nu S_{ij} S_{ij}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} E) + \nabla \cdot \mathbf{T} = -2\nu S_{ij} S_{ij}$$

Dissipação viscosa representa a conversão de energia mecânica em energia térmica

**Energia cinética média:** calculando a média da equação de energia

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} + \nabla \bullet (\langle \mathbf{u} E \rangle) + \nabla \bullet \langle \mathbf{T} \rangle = - \langle 2 \nu S_{ij} S_{ij} \rangle$$

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{E} + \bar{E}')}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet (\langle \mathbf{u} E \rangle) = \frac{1}{2} \nabla \bullet (\langle \mathbf{u} \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \rangle) = \frac{1}{2} \nabla \bullet (\langle (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \bullet (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \rangle)$$

$$(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \bullet (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') [(\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}') + (\mathbf{u}' \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u}' \bullet \mathbf{u}')] ]$$

$$\langle (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \bullet (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \rangle = \overline{\bar{\mathbf{u}} [(\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}') + (\mathbf{u}' \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u}' \bullet \mathbf{u}')] } + \overline{\mathbf{u}' [(\bar{\mathbf{u}} \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}') + (\mathbf{u}' \bullet \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u}' \bullet \mathbf{u}')] }$$

$$\langle \mathbf{u} E \rangle = \mathbf{u} \bar{E} + \mathbf{u} \bar{E}' + \overline{\mathbf{u}' \bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}' E'}$$

$$T_i = U_i p / \rho - 2\nu U_j S_{ij}$$

$$\langle T_i \rangle = \langle U_i p / \rho - 2\nu U_j S_{ij} \rangle$$

$$\langle T_i \rangle = \overline{U_i p / \rho} + \overline{U'_i p' / \rho} - 2\nu \overline{U_j S_{ij}} - 2\nu \overline{U'_j S'_{ij}}$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad \overline{S'_{ij}} = s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}' \bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}' E'} + \langle \mathbf{T} \rangle = & \overline{U_i p / \rho} - 2\nu \overline{U_j S_{ij}} + \\ & + \overline{U'_i p' / \rho} - 2\nu \overline{U'_j s_{ij}} - \overline{u'_i u'_j u'_j} - 2 \overline{U_j u'_i u'_j} \end{aligned}$$

$$T_i = U_i p / \rho - 2\nu U_j S_{ij}$$

□Definindo:

$$\bar{T}_i = -\bar{u}_j (2\nu \bar{S}_{ij} - \overline{2u'_i u'_j}) + \bar{u}_i \bar{p} / \rho$$

$$\bar{T}'_i = - (2\nu \overline{u'_j s_{ij}} - \overline{u'_i u'_j u'_j}) + \overline{u'_i p'} / \rho$$

$$\nabla \bullet (\overline{\mathbf{u}' \bar{\mathbf{u}} \bullet \mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}' E'} + \langle \mathbf{T} \rangle) = \nabla \bullet \bar{\mathbf{T}} + \nabla \bullet \bar{\mathbf{T}}'$$

□ Dissipação viscosa

$$\langle 2 \nu S_{ij} S_{ij} \rangle = -2 \nu \overline{S_{ij} S_{ij}} - 2 \nu \overline{s_{ij} s_{ij}}$$

□ Definindo:

➤ dissipação devido ao escoamento médio:  $\bar{\varepsilon} = 2 \nu \overline{S_{ij} S_{ij}}$

em geral é desprezível por ser proporcional à  $Re^{-1}$

➤ **dissipação turbulenta:**

$$\varepsilon = 2 \nu \overline{s_{ij} s_{ij}}$$

## Energia cinética média

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \nabla \cdot (\mathbf{u} E) \right\rangle + \left\langle \nabla \cdot \mathbf{T} \right\rangle = - \left\langle 2 \nu S_{ij} S_{ij} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{E}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \kappa) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}' &= \\ &= -2 \nu \overline{S_{ij} S_{ij}} - 2 \nu \overline{s_{ij} s_{ij}} \end{aligned}$$

$$\frac{D \bar{E}}{Dt} + \frac{D \kappa}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}' = -\bar{\varepsilon} - \varepsilon$$

## Energia Cinética do escoamento Médio e Turbulenta

$$\frac{D \bar{E}}{D t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} = -\wp - \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{T}_i = \overline{u_j u_i' u_j'} + \overline{u_i} \bar{p} / \rho - 2\nu \overline{u_j S_{ij}}$$

$$\frac{D \kappa}{D t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}' = \wp - \varepsilon$$

$$\bar{T}'_i = \overline{u_i' u_j' u_j'} + \overline{u_i'} \bar{p}' / \rho - 2\nu \overline{u_j' s_{ij}}$$

□ onde: 
$$\wp = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

é a **produção de energia cinética turbulenta**

➤ A ação do gradiente de velocidade média atuando sobre as tensões de Reynolds, remove energia cinética do escoamento médio (-  $\wp$  na equação para  $\bar{E}$  ) e transfere para o campo flutuante de velocidade (+  $\wp$  na equação para  $\kappa$  ).

# PRODUÇÃO

(i) Somente a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade afeta a produção

$$\wp = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij}$$

(ii) Somente a parte anisotrópica do tensor de Reynolds afeta a produção

$$\wp = -a_{ij} S_{ij} \quad a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij}$$

(iii) De acordo com a hipótese de viscosidade turbulenta

a produção é

$$\wp = 2 \nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \geq 0$$

Note que esta expressão é a mesma de  $\bar{\varepsilon}$ , com  $\nu_t$  no lugar de  $\nu$

# DISSIPACÃO

- Na equação de  $\kappa$ , o sorvedouro  $\varepsilon$  é a dissipação da energia cinética turbulenta ou simplesmente *dissipação*.
- O gradiente das velocidades flutuantes  $\partial u'_i / \partial x_j$  trabalha contra a tensor deviatórico de flutuações ( $2 \nu s_{ij}$ ) e transforma a energia cinética em energia interna.
- A dissipação é sempre positiva.

# Modelos de Turbulência Diferenciais

- ❑ Os modelos algébricos não são capazes de prever de forma adequada escoamentos mais complexos. Desta forma, surgiram os modelos de turbulência diferenciais
  - ❑ modelos de uma equação diferencial
  - ❑ modelos de duas equações diferenciais
  - ❑ modelos de  $n$  equações diferenciais
- ❑ Além das flutuações das velocidades do escoamento, todas as outras grandezas relevantes também flutuam, dando origem a fluxo turbulento de grandezas escalares.

## Modelos de Difusividade Turbulenta

- Para avaliar o fluxo de difusão turbulento de uma grandeza escalar, também é possível fazer uma analogia com o fluxo de difusão molecular.

$$\overline{-\rho u'_j \phi'} = -\Gamma_t \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} \right)$$

onde  $\Gamma_t$  é a difusividade turbulenta.

- Vamos supor que a equação de interesse é a equação da energia e que a grandeza escalar é a entalpia,  $\phi=h$ . O fluxo difusivo de calor molecular é

$$q_j = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = -\frac{k}{cp} \left( \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = -\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} \left( \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)$$

- logo, o coeficiente de difusão é  $\Gamma=\mu/\mathbf{Pr}$ , onde  $\mathbf{Pr}$  é o número de Prandtl.

- A difusividade turbulenta pode então ser definida como  $\Gamma_t = \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t}$

onde  $\mathbf{Pr}_t$  é o número de Prandtl turbulento ou número de Schmidt turbulento

## Modelos De Uma Equação

- Como vimos uma das dificuldades do modelo de comprimento de mistura é a relação direta entre a viscosidade turbulenta e o gradiente da velocidade.
- O modelo de uma equação utiliza outra velocidade característica para avaliar a viscosidade turbulenta. Como vimos a intensidade da turbulência  $|u'| = \sqrt{(u')^2}$  é uma boa medida da violência do escoamento, podendo ser utilizado para avaliar a velocidade característica do turbilhão.
- No caso geral, a intensidade da turbulência pode ser representada pela energia cinética turbulenta

$$|u'_i| = \kappa^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{2} \left( \overline{u_i'^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

- a viscosidade turbulenta pode então ser avaliada por

$$\mu_t = \rho \kappa^{1/2} \ell$$

- A equação acima foi proposta independentemente por Kolmogorov ( 1942) e Prandtl (1945).
- Neste modelo continua sendo necessário uma expressão algébrica para avaliar o comprimento de característica de mistura  $\ell$ .
- Para avaliar a energia cinética, utiliza-se uma equação de conservação para  $\kappa$ , a qual, como vimos, é obtida a partir da equação de Navier Stokes.

$$\frac{D \kappa}{Dt} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{T}'} = \wp - \varepsilon \quad \overline{T'_i} = \overline{u'_i u'_j u'_j} + \overline{u'_i p'} / \rho - 2\nu \overline{u'_j s_{ij}} \quad \wp = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

## Termo de produção $P_K = \rho \wp$

- Este termo representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o mecanismo de turbulência

$$P_K = - \overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho \wp$$

- Para os modelos baseados na hipótese de viscosidade turbulenta, utiliza-se o modelo já apresentado para a tensão de Reynolds, e o termo de produção pode ser escrito como

$$P_K = \mu_t \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \rho \kappa \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- Para fluidos incompressíveis, como o divergente da velocidade é nulo, temos

$$P_K = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

**Termo de difusão  $D_K$**        $D_K = -\rho \nabla \bullet \bar{\mathbf{T}}'$

$$\bar{T}'_i = \overline{u'_i u'_k u'_k} + \overline{u'_i p' / \rho} - 2\nu \overline{u'_k s_{ik}} \quad s_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)$$

$$D_K = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} e_j \bullet \bar{T}'_i e_i = -\rho \frac{\partial \bar{T}'_j}{\partial x_j}$$

$$\overline{2 u'_k s_{ik}} = \overline{\left( u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} = \overline{\left( u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} + \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_k u'_k}{\partial x_i} \right)} = \overline{\left( u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right)}$$

$$D_K = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_j \left( \frac{p'}{\rho} + 2k' \right)} - \mu \overline{\left( u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} \right] + \mu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_j^2}$$

- Estes termos representam o transporte de  $\kappa$  por difusão laminar e turbulenta

## Termo de difusão $D_k$

- A primeira parcela representa o transporte difusivo turbulento de  $k$ , e pode ser aproximado utilizando o conceito de difusividade turbulenta

$$-\overline{\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u'_j \left( \frac{p'}{\rho} + k' \right) \right]} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

- onde  $\sigma_k$  é o número de Prandtl de energia cinética turbulenta, sendo um parâmetro empírico, em geral igual a um ( $\sigma_k = 1$ ). O termo de difusão pode então ser escrito

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

- O transporte difusivo molecular de  $\kappa$  é

$$\mu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_j^2}$$

e só é importante em regiões de baixa intensidade de turbulência, como por exemplo, a sub-camada viscosa (ou sub-camada laminar).

## Termo de dissipação de energia cinética turbulenta, $\rho \varepsilon$

- Vimos que o trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa é definido como  $\Phi = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}}$ , logo trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa de um turbilhão, ou dissipação da energia cinética é  $\rho \varepsilon = \underline{\underline{\tau}}' : \underline{\underline{D}}'$ , então

$$\rho \varepsilon = \overline{\mu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)}$$

- Para avaliar a dimensão da dissipação, vamos considerar que a energia dissipada por um vórtice de dimensão  $L$  pode ser estimada da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{\text{Potencia}}{\text{massa}} = \frac{\text{Forca } u}{\rho \nabla} \approx \frac{\left( \rho \frac{u^2}{2} \text{ area} \right) u}{\rho \nabla} \approx \frac{\rho \frac{u^2}{2} L^2 u}{\rho L^3} \approx \frac{u^3}{L}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = c_\mu \frac{\kappa^{3/2}}{\ell_\varepsilon}$$

# Equação de Conservação de Energia Cinética Turbulenta

- Vimos que o trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa é definido como  $\rho \nu \overline{u_j u_j} \frac{\partial^2 \overline{\kappa}}{\partial x_j^2}$ , logo trabalho de energia por unidade de volume devido à dissipação viscosa de um turbilhão, ou dissipação da energia cinética é  $\rho c_\mu \frac{\overline{\kappa}^3}{l_\varepsilon}$ , então

$$\rho \frac{\partial \overline{\kappa}}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_j \kappa} \right) = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial^2 \overline{\kappa}}{\partial x_j^2} - \rho c_\mu \frac{\overline{\kappa}^3}{l_\varepsilon}$$

onde  $\mu_t = \rho \overline{\kappa}^{1/2} l$

sendo  $c_\mu = 0,09$  uma constante empírica.

- Em geral, a escala de comprimento  $l$  é considerada igual a  $l_\varepsilon$  ( $l = l_\varepsilon$ ), e as expressões já apresentadas podem ser utilizadas para avaliar estas grandezas, podendo-se alterar ligeiramente os valores das constantes empíricas.

## Modelos De Duas Equações

- Estes modelos consistem na solução de duas equações diferenciais para avaliar a viscosidade turbulenta. Na elaboração de um modelo de duas equações, faz sentido continuarmos utilizando a equação para a energia cinética  $\kappa$ , devido ao pouco empiricismo usado na sua obtenção. Como podemos utilizar qualquer combinação do tipo para a segunda variável, várias propostas surgiram ao longo dos anos:
  - Freqüência de vórtices  $f$  ( $f = \kappa^{1/2} \ell^{-1}$ ) (Kolmogorov, 1942)
  - Produto energia versus escala de comprimento  $\kappa \ell$  (Rodi e Spalding, 1970)
  - Vorticidade  $\omega$  ( $\omega = \kappa \ell^{-2}$ ) (Wilcox, 1988)
  - Dissipação  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \kappa^{3/2} \ell^{-1}$ ) da energia cinética turbulenta  $\kappa$  (Harlow e Nakayama, 1968 e Launder e Spalding, 1974)

## Modelo $\kappa$ - $\varepsilon$

- O modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  é sem dúvida o modelo que tem recebido maior atenção devido, principalmente, aos trabalhos de Jones e Spalding (1972, 1973) e Launder e Spalding (1974). Neste modelo a velocidade característica continua sendo  $V_c = \kappa^{1/2}$  e o comprimento característico é obtido em função da dissipação ( $\varepsilon = u^3 / \ell \Rightarrow \ell = u^3 / \varepsilon \Rightarrow \ell = \kappa^{3/2} / \varepsilon$ ). A viscosidade turbulenta é ( $\mu_t = c_\mu \rho \kappa^{1/2} \ell = c_\mu \rho \kappa^{3/2} \varepsilon^{-1}$ ), ou melhor

$$\mu_t = \frac{c_\mu \rho \kappa^2}{\varepsilon}$$

- Para avaliar a dissipação da energia cinética, deriva-se uma equação de conservação para  $\varepsilon$ , a qual também é obtida a partir da equação de Navier Stokes, lembrando que

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2}$$

# Equação de Conservação da Dissipação da Energia Cinética Turbulenta $\varepsilon$

- A equação de conservação para  $\varepsilon$  é obtida através das seguintes etapas:
  - i. Subtrair a equação média de Navier-Stokes da equação de Navier-Stokes
  - ii. Derivar a equação resultante em relação a  $x_j$
  - iii. Fazer um produto escalar com  $2 \nu \partial u'_i / \partial x_j$
  - iv. obter a média da equação resultante

- Os termos da equação de transporte de  $\varepsilon$  podem ser agrupados de tal forma a representarem mecanismos físicos distintos

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_j \varepsilon} \right) = D_\varepsilon + P_\varepsilon - d_\varepsilon$$

onde  $D_\varepsilon$  ;  $P_\varepsilon$  e  $d_\varepsilon$  representam, respectivamente, os mecanismos de difusão, produção e destruição de  $\varepsilon$ . As principais técnicas para a modelagem dos termos na equação de  $\varepsilon$  são a análise dimensional e a intuição física.

### **Termo de difusão $D_k$**

- A difusão  $D_\varepsilon$  de  $\varepsilon$  é aproximada usando o gradiente de  $\varepsilon$ :

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

onde  $\sigma_\varepsilon$  é o número de Prandtl de dissipação de energia cinética turbulenta, sendo um parâmetro empírico.

## Termo de Produção $P_\varepsilon$

- A produção de  $P_\kappa$  de  $\kappa$  deve ser balanceada pela produção  $P_\varepsilon$  de  $\varepsilon$ , para evitar um aumento ilimitado de  $\kappa$ . Assim

$$P_\varepsilon = \rho \frac{\varepsilon}{\kappa} P_\kappa$$

onde  $(\varepsilon/\kappa)$  é o inverso da escala de tempo.

## Termo de destruição de $\varepsilon$ , $d_\varepsilon$

$$d_\varepsilon = \mu 2 \nu \overline{\left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2}$$

- O termo de destruição  $d_\varepsilon$  na equação de  $\varepsilon$  deve tender ao infinito quando  $\kappa \rightarrow 0$ , caso contrário  $\kappa$  pode se tornar negativo. Desta forma:

$$d_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\kappa} \rho \varepsilon$$

- Finalmente, usando as equações anteriores, pode-se escrever as equações para o modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  padrão, lembrando que  $\ell = \kappa^{3/2} / \varepsilon$

## Equações de Conservação do Modelo $\kappa$ - $\varepsilon$ Padrão

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \kappa}) = P_K + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u_j \varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + [c_{1\varepsilon} P_K - c_{2\varepsilon} \rho \varepsilon] \frac{\varepsilon}{\kappa}$$

$$P_K = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad \mu_t = c_\mu \rho \frac{\kappa^2}{\varepsilon}$$

nas equações acima, as constantes empíricas são:

$$c_\mu = 0,09 ; c_{1\varepsilon} = 1,44 ; c_{2\varepsilon} = 1,92 ; \sigma_\kappa = 1,0 \text{ e } \sigma_\varepsilon = 1,3$$

- O modelo  $\kappa-\varepsilon$  é robusto, econômico e apresenta precisão razoável, razão pela qual é muito usado industrialmente para simular escoamentos. No entanto, existem diversas variantes em relação a estas equações.
- Pode-se simplificá-la ainda mais para escoamentos com altos números de Reynolds. 
$$\mu_{ef} = \mu + \mu_t \approx \mu_t$$
- A mesma deve ser modificada na presença de empuxo, e para escoamentos compressíveis. Existem também algumas variações destas equações para tentar levar em conta aspectos anisotrópicos do escoamento.
- A equação de  $\varepsilon$  apresenta um maior número de aproximações e diversas variações da mesma podem ser encontradas, quando busca-se eliminar algumas das simplificações feitas anteriormente, como considerar separadamente o efeito do gradiente de pressão, ou introduzir o efeito da compressibilidade do escoamento.

## Modelos de Viscosidade Turbulenta - Região da Parede

- Como vimos, os modelos de viscosidade turbulenta se baseiam na hipótese de Boussinesq, onde a tensão turbulenta é obtida por

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho \kappa \delta_{ij}$$

- e o escoamento pode ser determinado pela solução da equação média de conservação dado por

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u_i' u_j'} \right)$$

- A maioria dos modelos apresentados para a viscosidade turbulenta, seja de zero equação, uma ou duas equações diferenciais são válidos longe da parede. Na região da parede emprega-se a *Lei da Parede*, isto é a solução exata de  $u^+ \times y^+$  válida para a região da parede.
- Recomenda-se a utilização do perfil logaritmo para  $y^+ > 11$ .
- Para os modelos de uma ou duas equações diferenciais informações adicionais relativas a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação de  $k$  na região da parede devem ser obtidas.

## Energia Cinética Turbulenta $k$

- Na região próxima a parede ( $y^+ > 11$ ) a produção da energia cinética se iguala com a sua destruição, então  $P_K = \rho \varepsilon$

- A produção pode ser obtida pela seguinte expressão

$$P_K = - \overline{\rho u' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau^2}{\mu_t}$$

- Como vimos, a viscosidade turbulenta e a dissipação podem ser obtidos por

$$\mu_t = \rho \kappa^{1/2} \ell \quad \varepsilon = c_\mu \frac{\kappa^{3/2}}{\ell}$$

- Substituindo as relações acima na equação de equilíbrio entre produção e destruição de  $k$ , temos

$$\frac{\tau^2}{\mu_t} = \rho \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau^2}{\rho \kappa^{1/2} \ell} = \rho c_\mu \frac{\kappa^{3/2}}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{\rho} = c_\mu^{1/2} \kappa$$

- Finalmente como vimos, a tensão turbulenta é aproximadamente constante e igual a tensão na parede, logo

$$\frac{\tau_s}{\rho} = c_\mu^{1/2} \kappa$$

- Concluimos então que como a tensão cisalhante é aproximadamente constante na região da parede, a energia cinética turbulenta também o é. Como o valor da tensão cisalhante na parede não é conhecido, uma condição de contorno conveniente para  $k$  é

$$\frac{\partial k}{\partial y} \approx 0$$

- Vale ressaltar aqui, que a relação obtida acima entre a tensão cisalhante e a energia cinética é muito conveniente, ao utilizar a lei da parede, pois a velocidade de atrito pode ser obtida em função da energia cinética turbulenta

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad u^* = c_{\mu}^{1/4} k^{1/2}$$

## Dissipação da Energia Cinética Turbulenta $k$

- No caso dos modelos de duas equações, precisamos obter uma expressão para a dissipação turbulenta na região da parede. Novamente, vamos considerar equilíbrio entre a produção e destruição de  $k$ .

$$P_K = \rho \varepsilon$$

onde

$$P_K = - \overline{\rho u' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

- Neste caso a viscosidade turbulenta é  $\mu_t = \frac{\rho c_\mu \kappa^2}{\varepsilon}$

- Substituindo a expressão para a produção e viscosidade turbulenta da equação de equilíbrio, temos

$$P_K = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \Rightarrow \frac{\rho c_\mu \kappa^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \rho \varepsilon$$

$$\varepsilon = c_\mu^{1/2} \kappa \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = c_\mu^{1/2} \kappa \frac{u^*}{\mu / (\rho u^*)} \left( \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)$$

- Como já vimos na região turbulenta  $\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{k y^+}$

- então

$$\varepsilon = c_{\mu}^{1/2} \kappa \frac{u^*}{\mu l(\rho u^*)} \frac{1}{k y^+} = c_{\mu}^{1/2} \kappa \underbrace{\frac{u^*}{c_{\mu}^{1/4} \kappa^{1/2}}}_{1} \frac{1}{k y} = \frac{c_{\mu}^{3/4} \kappa^{3/2}}{k y}$$

- finalmente, obtemos

$$\varepsilon = \frac{c_{\mu}^{3/4} \kappa^{3/2}}{k y}$$

- Precisamos estimar o comportamento do componente vertical de velocidade na região da parede. Vimos que a equação da continuidade é

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

- Como a velocidade é nula ao longo da parede, concluímos que

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \approx 0$$

# Escoamento Cisalhante Livre

- São escoamentos afastados de paredes.
- Jatos, esteiras, camadas de mistura
- Turbulência se desenvolve devido a diferenças de velocidades



Camada cisalhante turbulenta entre 2 correntes de gases diferentes. Alto Reynolds.  $Re \approx 200.000$



Brown & Roshko, 1974

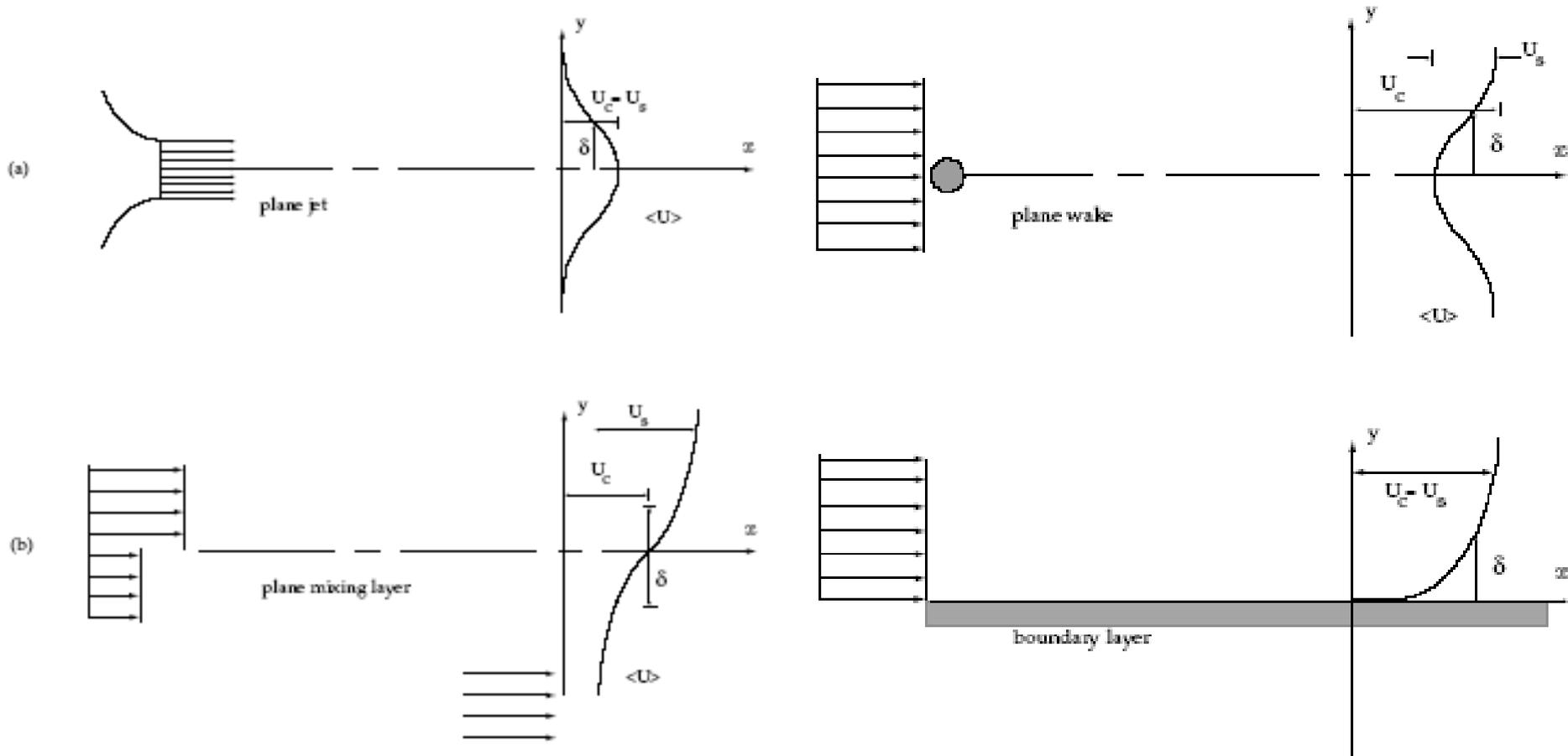


Freythuth, 1966

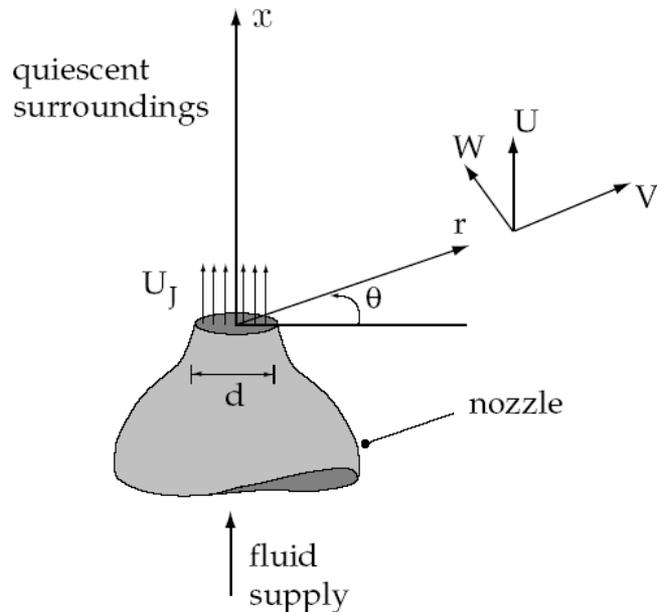
Desenvolvimento inicial a baixo Reynolds de descontinuidade de velocidade.  $Re \approx 7500$

# Exemplos de escoamentos cisalhantes livres

- Todos os escoamentos ilustrados apresentam uma direção de escoamento médio dominante podendo ser analisado com as equações de camada limite em vez das equações completas de Navier- Stokes



# Jato Circular



## Campo de Velocidade Média

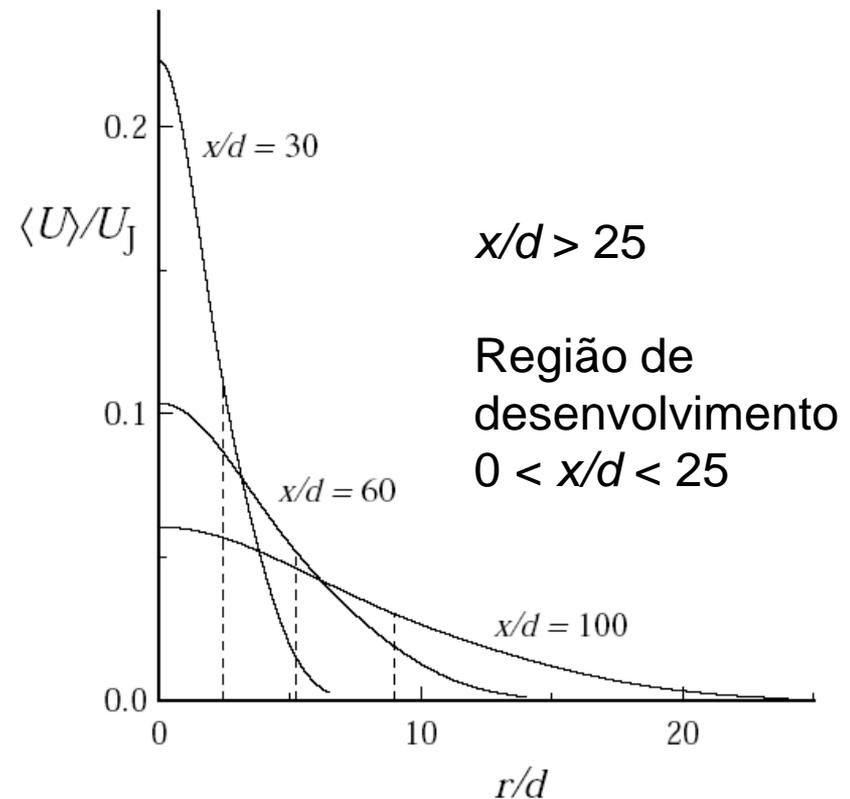
$\langle U \rangle$  simétrico

$\langle W \rangle = 0$

$\langle V \rangle$  uma ordem de grandeza inferior

- Regime permanente
- Simetria angular
- Escoamento governado pelo número de Reynolds:

$$Re = \rho U_j d / \mu$$

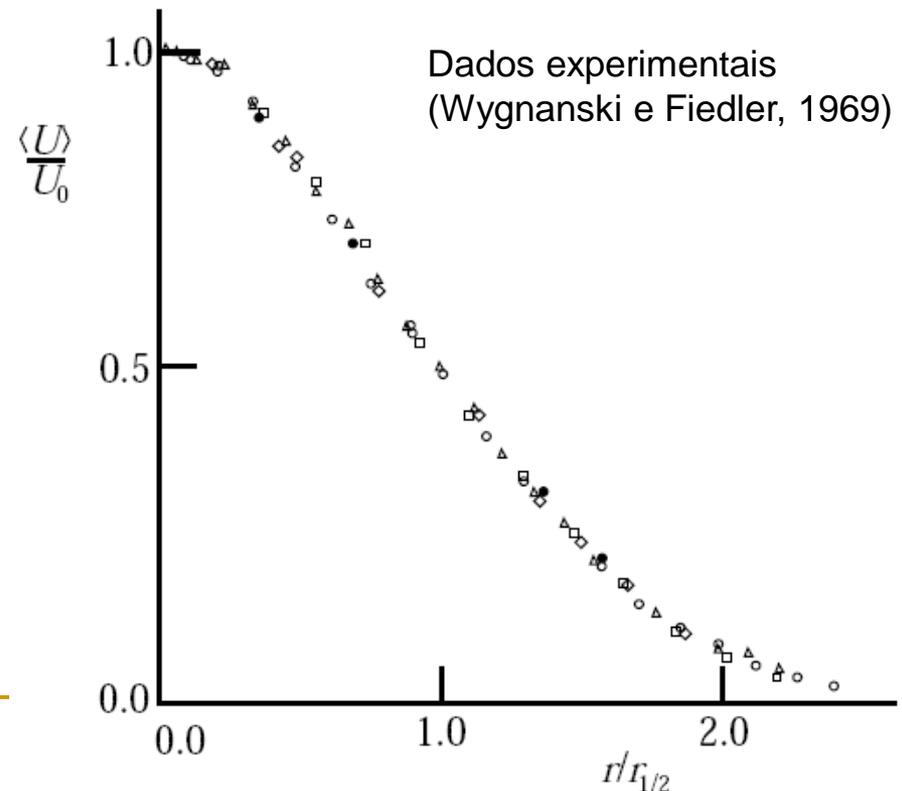


## Velocidade da linha de centro: $U_o$

❑ Velocidade na linha de centro  $\langle U(x,0,0) \rangle = U_o(x)$  decai a medida que se afasta do bocal.

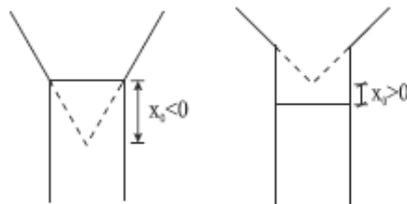
❑ A meia largura do jato  $r_{1/2}(x)$  é definida tal que :  
 $\langle U(x, r_{1/2}, 0) \rangle = \frac{1}{2} U_o$ . Jato de alarga com a distância.

❑ Após uma distância de desenvolvimento do escoamento  $x/D > 30$ , observa-se que o campo de velocidade é similar, isto é, possui a mesma forma, a velocidade  $\langle U \rangle$  normalizada pela velocidade na linha de centro  $U_o$ , colapsa em uma única curva. O perfil de velocidade média é auto-similar (*self-similar*)



- Variação do inverso da velocidade da linha de centro ao longo da direção axial

A interseção dessa linha com a abscissa define uma *origem virtual*, denominada de  $x_0$

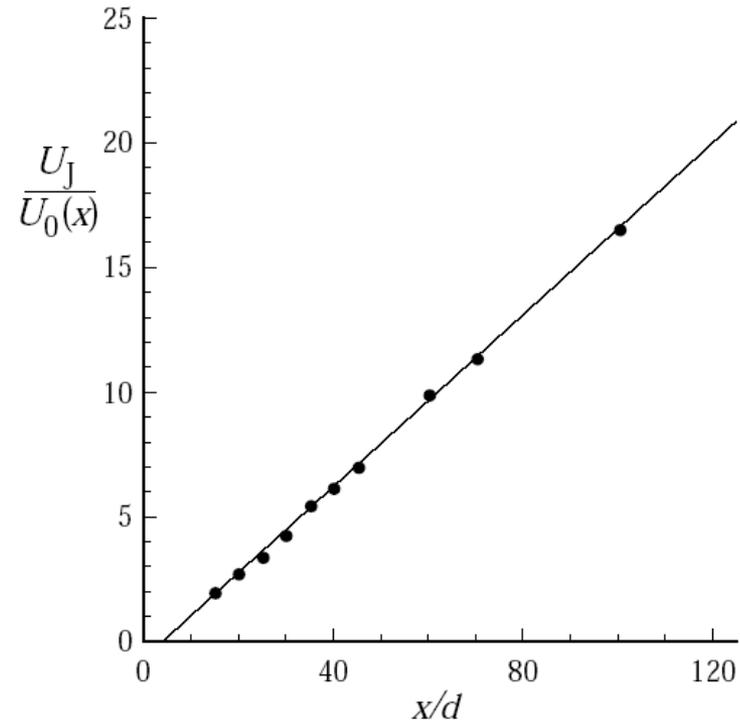


$x_0$  is virtual origin of jet

A linha reta corresponde a

$$\frac{U_o(x)}{U_j} = \frac{B}{(x - x_o) / d}$$

onde  $B$  é uma constante empírica.

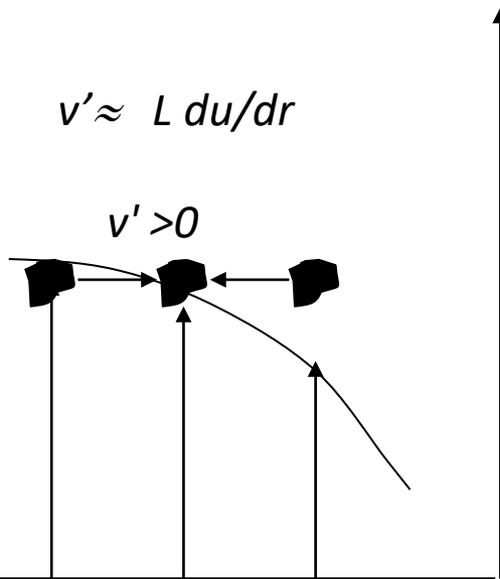


## Taxa de alargamento S do jato

$$S \equiv \frac{\partial r_{1/2}}{\partial x}$$

Estimativa:

$$\frac{D r_{1/2}}{Dt} \approx v' \quad \Rightarrow \quad \frac{D r_{1/2}}{Dt} \approx L \frac{\partial u}{\partial r} = r_{1/2} \frac{U_o}{r_{1/2}} \approx U_o$$



Porém a derivada substantiva também pode se escrita como

$$\frac{D r_{1/2}}{Dt} \approx U_o \frac{\partial r_{1/2}}{\partial x}$$

então 
$$\frac{\partial r_{1/2}}{\partial x} = \text{cte} = S$$

A taxa de alargamento na região *auto-similar* é

$$S \equiv \frac{dr_{1/2}}{dx} = \text{cte} \Rightarrow \text{o jato se alarga linearmente} \quad r_{1/2} = S(x - x_0)$$

O número de Reynolds local é definido por  $\mathbf{Re}_o(x) = \frac{r_{1/2}(x) U_o}{\nu}$

Como  $r_{1/2}$  varia linearmente com  $x$  e  $U_o$  com o inverso de  $x$ ,

$\mathbf{Re}_o$  independe de  $x$ .

A constante **B** e a taxa de alargamento **S** também independem do número de Reynolds

	<b>Panchapakekan e Lumley (1993)</b>	<b>Hussein et al (1994) hot wire data</b>	<b>Hussein et al (1994) laser-doppler data</b>
<b>Re</b>	11000	95500	95500
<b>S</b>	0,096	0,102	0,094
<b>B</b>	6,06	5,9	5,8

Apesar do Reynolds afetar fortemente o escoamento e as estruturas do jato, a velocidade média e a taxa de alargamento independem do Reynolds. Para altos números de Reynolds ( $Re > 10^4$ ) recomenda-se  $S=0,094$  e  $B=5,8$

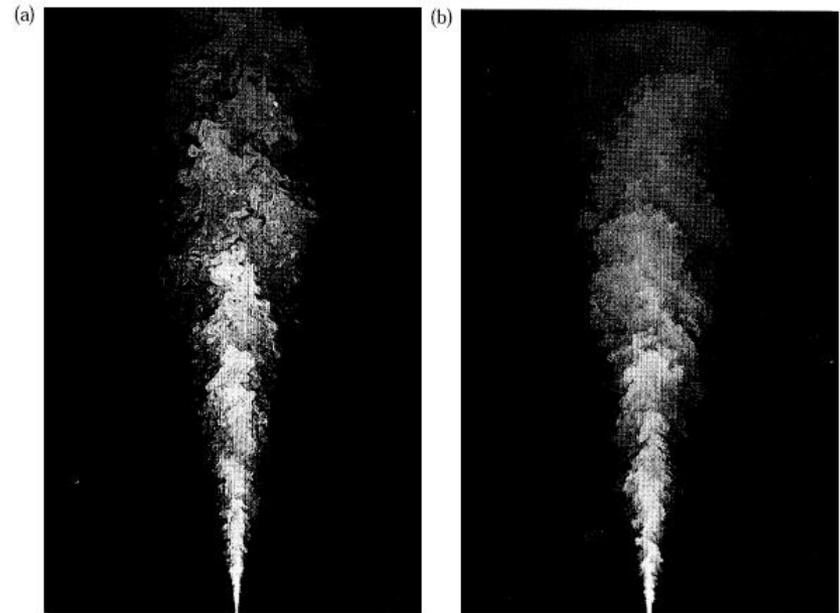


Figure 1.2: Planar images of concentration in a turbulent jet: (a)  $Re = 5,000$  (b)  $Re = 20,000$ . From Dahm and Dimotakis (1990).

## Tensões de Reynolds

$$\overline{u_i u_j} = \begin{pmatrix} \overline{u^2} & \overline{u v} & 0 \\ \overline{u v} & \overline{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w^2} \end{pmatrix}$$

$$u_o(x) = \sqrt{\overline{u^2}} \quad \text{em} \quad (r = 0)$$

$u_o(x)/U_o$  tende para um valor constante, logo

$u_o(x)$  e  $U_o(x)$  caem com  $x^{-1}$

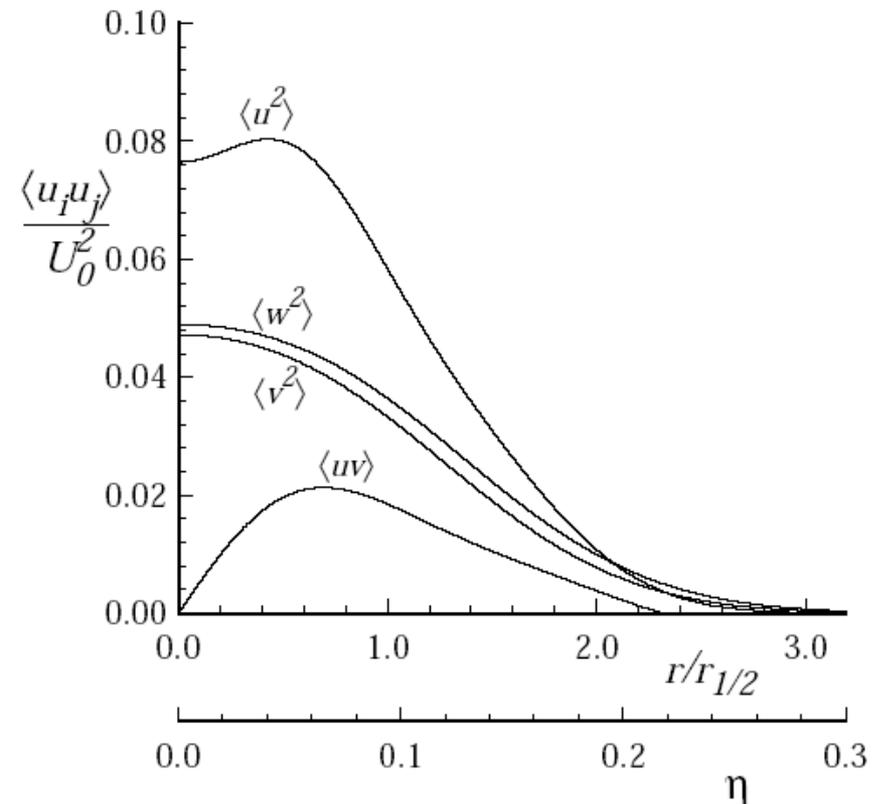
Após a região de desenvolvimento, as tensões de Reynolds são auto-similares

$u = \text{flutuação da velocidade}$

Simetria angular:  $\overline{u w} = \overline{v w} = 0$

Tensões normais são pares  
Tensão cisalhante é ímpar

No centro:  $\overline{v^2} = \overline{w^2}$



- Uma vez que a tensão de Reynolds é positiva quando  $\partial\langle U \rangle / \partial r$  é negativo, e tende a zero quando  $\partial\langle U \rangle / \partial r$  tende a zero, pode-se definir uma viscosidade turbulenta positiva  $\nu_t = \mu_t / \rho$  tal que

$$\overline{u v} = -\nu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial r}$$

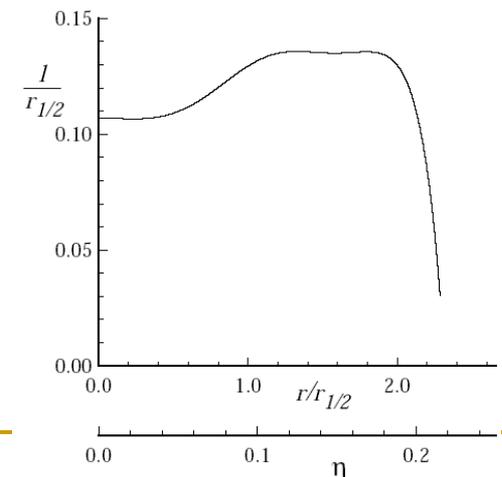
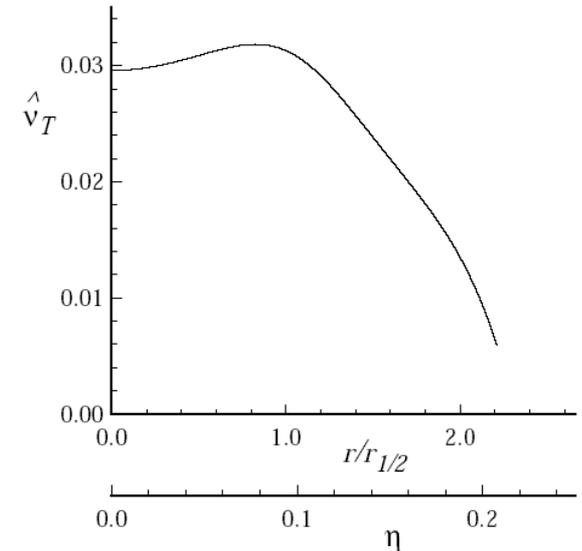
- Como os perfis de  $\langle u v \rangle$  e  $\partial\langle U \rangle / \partial r$  são auto-similares, o perfil da viscosidade turbulenta também é

$$\nu_t = U_o(x) r_{1/2}(x) \hat{\nu}_t(\eta)$$

$\hat{\nu}_t$  é aproximadamente uniforme ( $\approx 0,028$ ) para  $0,1 < r/r_{1/2} < 1,5$ , e cai a zero na extremidade do jato

- A viscosidade turbulenta tem dimensão de velocidade vezes comprimento

$$\nu_t = u' \ell \quad \ell/r_{1/2} \approx 0,12 \text{ para } 0,1 < r/r_{1/2} < 2,1$$



- Schlichting (1933) resolveu as eqs. de *momentum* e continuidade definindo

$$f(\eta) = \frac{\bar{U}}{U_o} \quad ; \quad \eta = \frac{r}{(x - x_o)}$$

- A solução é  $f(\eta) = \frac{1}{(1 + a \eta^2)^2} \quad ; \quad a = (\sqrt{2} - 1) / S^2$

- viscosidade turbulenta  $\hat{v}_t = \frac{\nu_t}{U_o(x) \eta_{1/2}} = \frac{S}{8(\sqrt{2} - 1)}$

□ Discrepância somente na região onde

$$\hat{v}_t(\eta) \rightarrow 0$$

- $S = 8(\sqrt{2} - 1) \hat{v}_t$   
 $S = 0,094 \quad \text{se} \quad \hat{v}_t = 0,028$

□ número de Reynolds turbulento

$$\mathbf{Re}_t = \frac{U_o(x) \eta_{1/2}(x)}{\nu_t} = \frac{1}{\hat{v}_t} \approx 35$$

