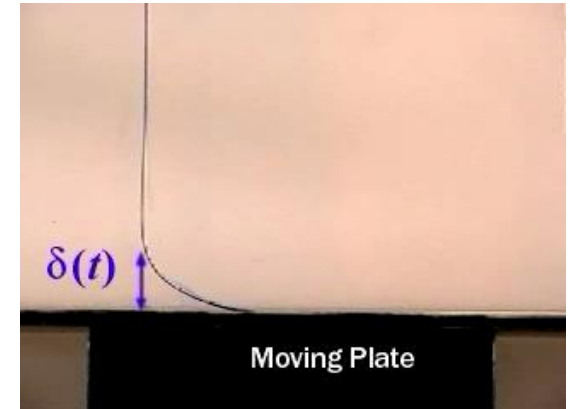
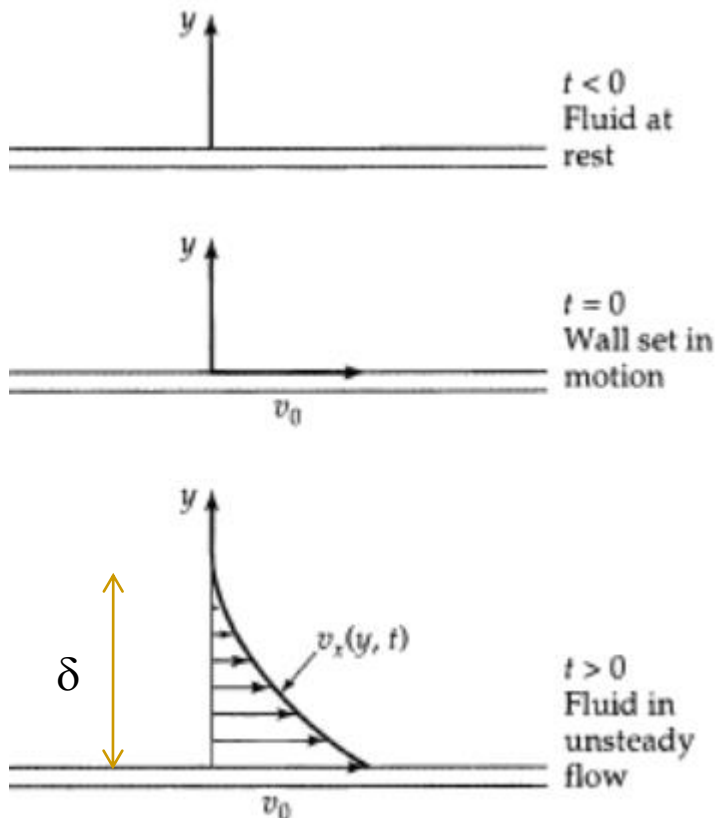


ESCOAMENTOS EM REGIME TRANSIENTE



□ Regime transiente: são escoamentos que apresentam variação com o tempo $\Rightarrow \partial/\partial t \neq 0$

Exemplo: Escoamentos Próximo à uma Parede Abruptamente Posta em Movimento



Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano
2. Propriedades constantes ($\rho = \text{cte}$, $\mu = \text{cte}$)
3. 2-D (largura $b \gg \delta$) $\Rightarrow \partial/\partial z = 0$
4. $L \gg \delta \Rightarrow \partial/\partial x = 0$
5. Escoamento horizontal, gravidade vertical
6. $p = p_{\text{atm}} = \text{cte}$
7. laminar



Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \rho = cte \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0(5)} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0(4)} = 0 \Rightarrow v = cte$ Condição de contorno: $y=0 ; v=0$

$v = 0$

$\vec{V} = u(y, t) \vec{i}$

Q.M.L. (Navier-Stokes): $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$

Q. M. L - direção z e y satisfeitas de acordo com as hipótese listadas

Q. M. L - direção x

$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{0(4)} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{0(v=0)} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{0(3)} \right) = \underbrace{\rho g_x}_{0(5)} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0(6)} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0(4)} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{0(3)} \right)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\nu =$ viscosidade cinemática; $\nu = \mu/\rho$ (m²/s)

Condição inicial

1) $t \leq 0 ; u=0$

para $\forall y$

Condições de contorno, $t > 0$

1) $y=0 ; u=u_o$

2) $y \rightarrow \infty ; u=0$

Adimensionalizando
a velocidade

$$U = \frac{u}{u_0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$



Espera-se que a medida que o tempo passa, δ cresce, mas a forma do perfil mantenha-se similar. Então é conveniente adimensionalizar a coordenada vertical com a espessura de penetração δ , tal que $U = U(y/\delta)$

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

Podemos estimar a variação da espessura de penetração δ com o tempo, analisando a equação de momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{U}{t} \approx \nu \frac{U}{\delta^2} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\nu t}$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4 \nu t}}$$

o número 4 é introduzido por conveniência, como será visto no resultado final

Mudança de variáveis: $U = U(\eta, \tau)$ onde $\eta = y/(4 \nu t)^{0.5}$ e $\tau = t$



$$U = U(\eta, \tau) \quad \text{onde } \eta = y/(4 \nu t)^{0.5} \quad \text{e} \quad \tau = t$$

Para introduzir a mudança de variáveis na equação de conservação, é preciso utilizar a regra da cadeia

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

mas

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{y}{\sqrt{4 \nu}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4 \nu t}} = \frac{\eta}{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{-\eta}{2t}\right) + \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{4 \nu t}} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \frac{1}{4 \nu t}$$

substituindo $-2\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + 4\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$

Condições de contorno

1) $\eta=0; U=U_o$

2) $\eta \rightarrow \infty$ e $\tau=0; U=0$



$$4\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

Utilizando separação de variáveis: $U(\eta, \tau) = H(\eta) T(\tau)$

$$-2\eta T \frac{dH}{d\eta} + 4\tau H \frac{dT}{d\tau} = T \frac{d^2 H}{d\eta^2}$$

$$\frac{4\tau}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{2\eta}{H} \frac{dH}{d\eta} = -\lambda^2$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda^2}{4} \frac{d\tau}{\tau} \quad \ln T = -\frac{\lambda^2}{4} \ln \tau + \ln C \quad T = C \tau^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

Condições de contorno

1) $\tau=0$; T =finito $\Rightarrow \lambda=0$ e T =constante

$T=1$ e $U(\eta) = H(\eta)$



Resultando em

$$\frac{d^2 U}{d \eta^2} + 2 \eta \frac{d U}{d \eta} = 0$$

Condições de contorno e inicial

1) $\eta = 0 ; U = 1$

2) $\eta \rightarrow \infty ; U \rightarrow 0$

A condição de contorno (1) corresponde a condição de não deslizamento, enquanto que a condição (2) engloba a condição inicial e no infinito, pois $\eta = y/(4 \nu t)^{0,5}$

Para integrar esta equação diferencial ordinária de 2a. ordem, observa-se que esta equação é de 1a. ordem para

$$\phi = \frac{d U}{d \eta}$$

$$\frac{d \phi}{d \eta} + 2 \eta \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d \phi}{\phi} = -2 \eta d \eta \quad \Rightarrow \quad \ln \phi = -\eta^2 + \ln C_1$$

$$\phi = C_1 e^{-\eta^2} \Rightarrow \frac{d U}{d \eta} = C_1 e^{-\eta^2} \quad U = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' + C_2$$



$$U = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' + C_2$$

Condições de contorno e inicial

$$1) \eta = 0 ; U = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

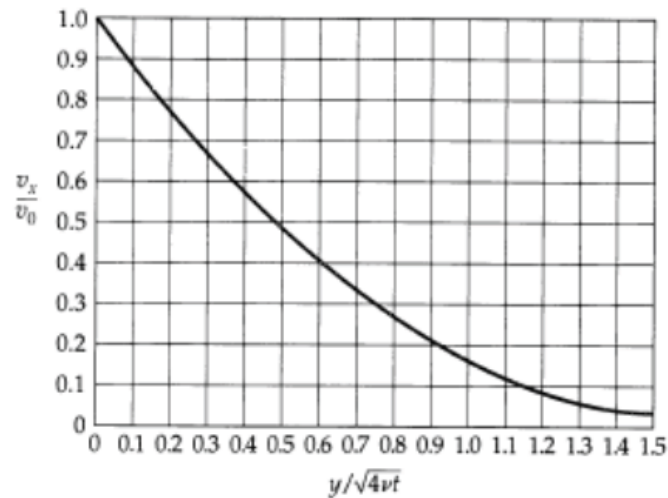
$$2) \eta \rightarrow \infty ; U \rightarrow 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\eta'^2} d\eta'} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{então } U(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$$

erf é a **função erro** e erfc é a **função complementar**

$$u(y,t) = u_o \left[1 - \text{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right) \right]$$
$$u(y,t) = u_o \left[\text{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right) \right]$$



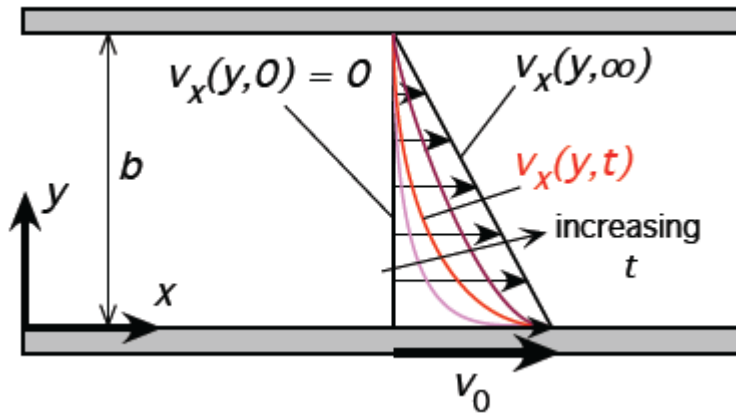
A espessura de penetração pode ser definida como a distância da placa onde a velocidade é 1% de u_o . Neste caso, $\eta \approx 2$, logo $\delta = 4 \sqrt{\nu t}$

Exemplo: Escoamento transiente entre duas placas paralelas



Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano
2. Propriedades constantes ($\rho = \text{cte}$, $\mu = \text{cte}$)
3. 2-D (largura $w \gg b$) $\Rightarrow \partial / \partial z = 0$
4. $L \gg b \Rightarrow \partial / \partial x = 0$
5. Escoamento horizontal, gravidade vertical
6. $p = p_{\text{atm}} = \text{cte}$
7. laminar



Como já vimos, a equação da continuidade incompressível é $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

o que implica que $\vec{V} = u(y, t) \vec{i}$

Exemplo: Escoamento transiente entre duas placas paralelas



Q.M.L. (Navier-Stokes):
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Q. M. L - direção z e y satisfeitas de acordo com as hipótese listadas

Q. M. L - direção x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{0(4)} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{0(v=0)} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{0(3)} \right) = \underbrace{\rho g_x}_{0(5)} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0(6)} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0(4)} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{0(3)} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Vimos que a equação de conservação de quantidade de movimento se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Condição inicial

$$1) \quad t \leq 0; \quad u=0$$

para $0 < y \leq b$

Condições de contorno, $t > 0$

$$1) \quad y=0; \quad u=v_o$$

$$2) \quad y=b, \quad u=0$$

Adimensionalizando

$$U = \frac{u}{v_o}$$

$$\eta = \frac{y}{b}$$

$$\tau = \frac{t}{\Delta t_{ref}}$$

$$\frac{1}{\Delta t_{ref}} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\nu}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{ref} = \frac{b^2}{\nu} \quad \tau = \frac{t \nu}{b^2}$$

O tempo característico corresponde aproximadamente ao tempo para o *momentum* se difundir em uma distância b

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$$

Condições de contorno e inicial

$$1) \quad \tau \leq 0; \quad U=0 \quad 2) \quad \eta=0; \quad U=1$$

$$3) \quad \eta=1; \quad U=0$$



Procura-se solução do tipo: $U = U_{\infty}(\eta) - U_t(\eta, \tau)$

U_{∞} é a solução em regime permanente e U_t é a parte transiente da solução que desaparece quando $t \rightarrow \infty$

Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{d^2 U_{\infty}}{d\eta^2} = 0$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_t}{\partial \eta^2}$$

Condições de contorno,

1) $\eta=0; U_{\infty}=1$

2) $\eta=1, U_{\infty}=0$

Condições de contorno e inicial

1) $\tau=0; U_t=U_{\infty}$ 2) $\eta=0, U_t=0$

3) $\eta=1, U_t=0$

Primeiro vamos encontrar a solução em regime permanente

$$\frac{d^2 U_{\infty}}{d\eta^2} = 0 \Rightarrow U_{\infty} = C_1 \eta + C_2$$

$$U_{\infty}(\eta) = 1 - \eta$$

Condições de contorno

1) $\eta=0; U_{\infty}=1 \Rightarrow C_2=1$

2) $\eta=1; U_{\infty}=0 \Rightarrow C_1=-1$



Para resolver

$$\frac{\partial U_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_t}{\partial \eta^2}$$

Vamos assumir uma solução do tipo

$$U_t = f(\eta) g(\tau)$$

**Separação de
variáveis**

Substituindo na equação diferencial e dividindo por $f g$ obtém-se

$$\frac{1}{g} \frac{d g}{d \tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d \eta^2}$$

Como τ e η são variáveis independentes, e como o lado direito só depende de η e o esquerdo de τ , então ambos os lados devem ser iguais a mesma constante. Vamos definir esta constante como $-c^2$, o que nos permite escrever

$$\frac{d g}{d \tau} = -c^2 g \quad \Rightarrow \quad g = A e^{-c^2 \tau}$$

**Problema de
Sturm-Liouville**

$$\frac{d^2 f}{d \eta^2} + c^2 f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = B \sin(c \eta) + C \cos(c \eta)$$



$$U_t = A e^{-c^2 \tau} [B \sin(c\eta) + C \cos(c\eta)]$$

Condições de contorno

$$1) \eta=0, U_t=0 \Rightarrow C=0$$

$$2) \eta=1, U_t=0 \Rightarrow \sin(c) = 0, \text{ pois } B=0 \text{ implica em solução trivial } U_t=0$$

Porém existem infinitos valores c que satisfazem esta condição, i.e., são os **auto-valores**

$$c_n = n \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Para cada auto-valores, existe uma **auto-função** correspondente f_n e função g_n

$$f_n = B_n \sin(n \pi \eta)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$g_n = A_n e^{-n^2 \pi^2 \tau}$$



Cada produto $g_n f_n$ satisfaz a equação diferencial, então a solução completa é a soma do todas as soluções particulares

$$U_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin(n \pi \eta)$$

onde $D_n = A_n B_n$.

Como o termo $n=0$ é nulo e $\sin(-n \pi \eta) = -\sin(n \pi \eta)$, podemos omitir o valor nulo e negativos de n .

$$U_t = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin(n \pi \eta)$$

Aplicando a condição inicial: $\tau=0$, $U_t = U_\infty$ temos

$$1 - \eta = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin(n \pi \eta)$$

Para determinar as constantes D_n precisamos explorar a condição de ortogonalidade.

ORTOGONALIDADE DE AUTO-FUNÇÕES



Considere a equação:
$$\frac{d^2 y}{d x^2} + f_1(x) \frac{d y}{d x} + \left[f_2(x) + \lambda^2 f_3(x) \right] y = 0$$

Esta equação é típica em problemas uni-dimensionais de transferência de calor e mecânica dos fluidos.

Considere a equação submetida a condições de contorno homogêneas no intervalo (a, b).

A solução deste problema irá gerar autofunções $\varphi_n(x)$ correspondentes a autovalores $\lambda_n(x)$.

A equação do exemplo transiente nas placas é um caso particular desta equação, com $y = f$, $f_1=f_2=0$ e $f_3=1$. $\lambda=c$ é o auto-valor

$$\frac{d^2 f}{d \eta^2} + c^2 f = 0$$



A equação anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda^2 \omega(x) \right] y = 0$$

$$\text{com } \begin{cases} p(x) = e^{\int f_1(x) dx} \\ q(x) = p(x) f_2(x) \\ \omega(x) = p(x) f_3 = f_3(x) e^{\int f_1(x) dx} \end{cases}$$

No exemplo do escoamento transiente entre placas:

$$p(x) = 1 \quad ; \quad q(x) = 0 \quad ; \quad \omega(x) = 1$$



Funções ortogonais: Sejam $\varphi_n(x)$ e $\varphi_m(x)$ duas auto-funções correspondentes a auto-valores λ_n e λ_m distintos. Estas funções são ortogonais num intervalo (a, b) com respeito a função peso $\omega(x)$ pois:

$$\int_a^b \omega(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad ; \quad (m \neq n)$$

Voltando ao exemplo: Para determinar as constantes $(1-\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \mathbf{sin}(n \pi \eta)$ D_n vamos utilizar a condição de ortogonalidade.

$$(1-\eta) \mathbf{sin}(m \pi \eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \mathbf{sin}(n \pi \eta) \mathbf{sin}(m \pi \eta)$$

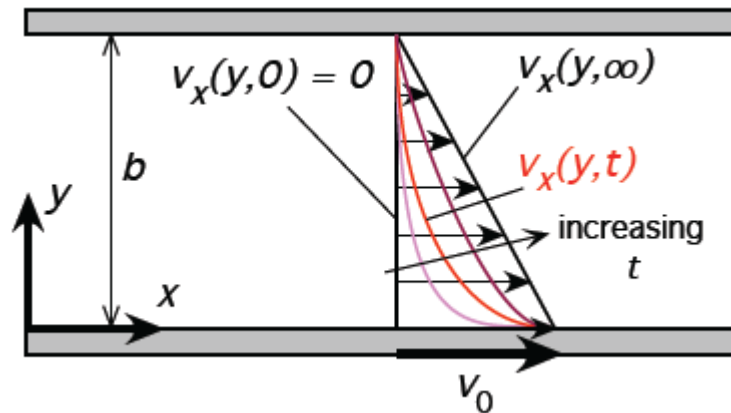
$$\underbrace{\int_0^1 (1-\eta) \mathbf{sin}(m \pi \eta) d\eta}_{1/(m\pi)} = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \underbrace{\int_0^1 \mathbf{sin}(n \pi \eta) \mathbf{sin}(m \pi \eta) d\eta}_{\substack{=0 \quad \text{quando } m \neq n \\ =1/2 \quad \text{quando } m = n}}$$

então

$$D_n = \frac{2}{n \pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A solução final é

$$U(\eta, \tau) = (1 - \eta) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n \pi} \right) \mathbf{exp}(-n^2 \pi^2 \tau) \mathbf{sin}(n \pi \eta)$$

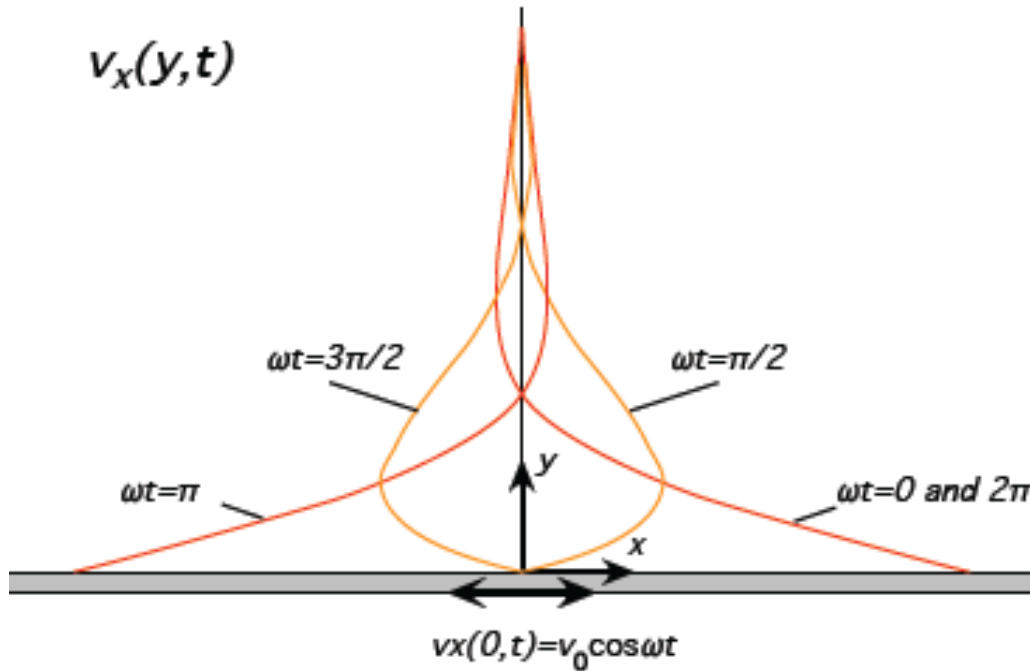


Observações:

- ❑ Exceto para os primeiros instantes de tempo, a série infinita converge rapidamente, isto é, somente os primeiros termos contribuem de forma apreciável.
- ❑ No limite dos instantes de tempo iniciais, essa solução é equivalente a solução de uma única parede colocada em movimento abruptamente. Pois para os primeiros instantes de tempo, o movimento do fluido só ocorre próximo a placa inferior, como se o fluido “não sentisse” a presença da parede em $y=b$.



Exemplo: Escoamento próximo a uma placa oscilante com descolamento $X(t) = X_0 \sin \omega t$ (Problema de Stokes)



$$u(0, t) = \frac{dX}{dt} = \underbrace{X_0 \omega}_{v_0} \cos(\omega t)$$

Como já vimos

$$\vec{V} = u(y, t) \vec{i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano
2. Propriedades constantes ($\rho = \text{cte}$, $\mu = \text{cte}$)
3. 2-D (largura $b \gg \delta$) $\Rightarrow \partial / \partial z = 0$
4. $L \gg \delta \Rightarrow \partial / \partial x = 0$
5. Escoamento horizontal, gravidade vertical
6. $p = p_{\text{atm}} = \text{cte}$
7. laminar



Condições de contorno, $t > 0$

$$1) y=0 \quad ; \quad u = v_o \cos (\omega t)$$

$$2) y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0$$

Deseja-se a **solução periódica permanente**, isto é, após o desaparecimento do transiente inicial logo, a condição inicial não é necessária.

As partículas de fluido estarão sujeitas a oscilações com frequência ω , porém com ângulo de fase e amplitude que são função somente da posição.

Para a obtenção desta solução “**permanente periódica**” é conveniente utilizar uma técnica baseada em números complexos. A solução desejada é a solução assintótica para $t \rightarrow \infty$.

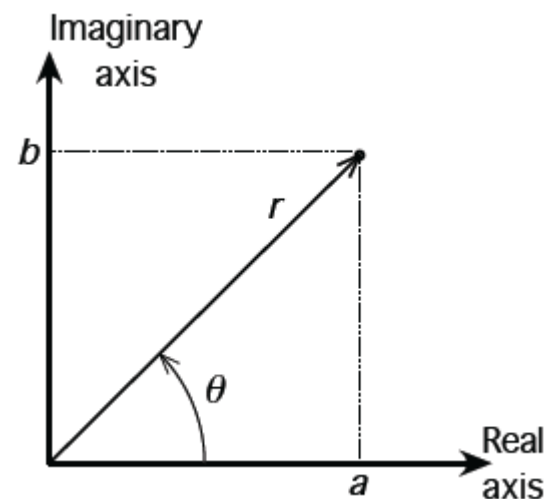
Números Complexos: definições básicas



Um número é complexo quando possui uma parte imaginária, i.e., uma parte proporcional a $i = \sqrt{-1}$. Este número pode ser representado no plano como mostrado na figura.

Observações:

- Representação cartesiana: $a + b i$
- Representação polar: $r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$



- $\Re (a + b i) = a$ é a parte real de $a + b i$
- $\Im \{a + b i\} = b$ é a parte imaginária



➤ $(a + b i)^2 = a^2 - b^2 + 2 a b i$

➤ $(a + b i) (a - b i) = a^2 + b^2$

➤ $(a + b i)^{-1} = (a - b i) / [(a + b i) (a - b i)] = (a - b i) / (a^2 + b^2)$

➤ Para encontrar $(i)^{0,5}$ na forma $a+bi$, proceder como segue

$$\sqrt{i} = a + b i \Rightarrow i = (a + b i)^2 = a^2 - b^2 + 2 a b i$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \quad e \quad 2 a b = 1$$

então
$$\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{i}}{(\sqrt{i})^2} = -\sqrt{i} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i)$$



Voltando ao Escoamento próximo a uma placa oscilante com descolamento
 $X(t) = X_o \sin \omega t$

Condições de contorno, $t > 0$

1) $y=0$; $u = V_o \cos(\omega t) = V_o \Re\{e^{i\omega t}\}$

2) $y \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U = TH$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\nu}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 T = 0 \Rightarrow T = A \exp(-\lambda^2 t)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -\frac{\lambda^2}{\nu} H$$

$$\text{raizes} = \pm i \sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}}$$

$$H = C' \exp\left(i \sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}} y\right) + D' \exp\left(-i \sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}} y\right)$$

$$U = \left[C \exp\left(i \sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}} y\right) + D \exp\left(-i \sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}} y\right) \right] \exp(-\lambda^2 t)$$

$$C = C' A; D = D' A$$

$$y \rightarrow 0; U \rightarrow V_o \cos(\omega t) = V_o \Re[\exp(i\omega t)] \Rightarrow (C + D) \Re(\exp(-\lambda^2 t))$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -i \omega$$

$$C + D = V_o$$



$$\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \sqrt{-i} = \sqrt{-1}\sqrt{i} = i \left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right] = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$$

$$i\sqrt{-i} = i \left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1) \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \left(i\sqrt{\frac{\lambda^2}{\nu}} y \right) = \left(i\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} y \right) = \mp \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)$$

$$U = \left[(V_o - D)\mathbf{exp}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) + D\mathbf{exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) \right] \mathbf{exp}(i\omega t)$$

$$y \rightarrow \infty; U \rightarrow 0 \Rightarrow V_o - D = 0 \quad U = V_o \mathbf{exp}\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) \mathbf{exp}(i\omega t)$$

$$u(y,t) = \Re\{v_o e^{-y(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}} e^{i\omega t}\} = v_o e^{-y\sqrt{\omega/2\nu}} \Re\{e^{-i(y\sqrt{\omega/2\nu} - \omega t)}\}$$

$$u(x,t) = v_o e^{-y\sqrt{\omega/2\nu}} \cos(\omega t - y\sqrt{\omega/2\nu})$$



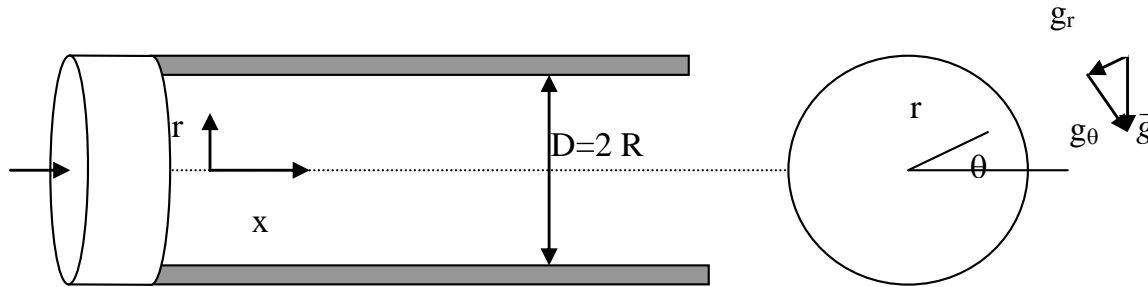
Finalmente a solução é

$$u(x,t) = v_o e^{-y\sqrt{\omega/2\nu}} \cos(\omega t - y\sqrt{\omega/2\nu})$$

Observações:

- ❑ O perfil de velocidade possui a forma de uma oscilação harmônica amortecida, cuja amplitude é $v_o e^{-y\sqrt{\omega/2\nu}}$, na qual uma camada de fluido a uma distância y possui um atraso $y\sqrt{\omega/2\nu}$ com respeito ao movimento da parede.
- ❑ A influência do movimento da placa no fluido encontra-se restrita a $y < 5\sqrt{\omega/2\nu}$
- ❑ Duas camadas de fluidos, separadas uma distância igual a $2\pi/\sqrt{\omega/2\nu}$, oscilam em fase.

Exemplo: Inicialização de Escoamento em Duto Circular

$$\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$$


$$g_r = -g \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad g_\theta = -g \operatorname{cos}\theta$$

Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano
2. Propriedades constantes ($\rho = \text{cte}$, $\mu = \text{cte}$)
3. 2-D (axi-simétrico) $\Rightarrow \partial / \partial \theta = 0$
4. $L \gg R \Rightarrow \partial / \partial x = 0$
5. Escoamento horizontal, gravidade vertical
6. Laminar
7. Fluido em repouso
8. $t \geq 0$, gradiente de pressão imposto

Como já vimos, a equação da continuidade incompressível é $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

o que implica que

$$\vec{V} = u(r, t) \vec{i}$$



Q. M. L - direção x

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{zero}(v=0)} + \underbrace{v\theta \frac{\partial u}{r\partial\theta}}_{\text{zero}(4)} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{zero}(5)} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2}}_{\text{zero}(4)} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{zero}(5)} \right]$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

Condições de contorno : 1) $r=0$ $U=\text{finito}$ 2) $r=1$ $U=0$

Condição inicial: 1) $t=0$ $U=0$

Adimensionalizando $U = \frac{u \mu}{-\partial p / \partial x R^2}$ $\eta = \frac{r}{R}$ $\tau = \frac{t \nu}{R^2}$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$$

Condições de contorno : 1) $\eta=0$ $U=\text{finito}$ 2) $\eta=1$ $U=0$

Condição inicial: 1) $\tau=0$ $U=0$



$$U = U_{\infty}(\eta) + U_t(\tau, \eta)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U_{\infty}}{\partial \eta} \right) + 1 = 0$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U_t}{\partial \eta} \right)$$

Condições de contorno : 1) $\eta=0$ U_{∞} =finito 2) $\eta=1$ $U_{\infty}=0$

1) $\eta=0$ U_t =finito 2) $\eta=1$ $U_t=0$
e inicial 3) $\tau=0$ $U_t = - U_{\infty}$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U_{\infty}}{\partial \eta} \right) + 1 = 0$$

Condições de contorno :

1) $\eta=0$ U_{∞} =finito $\Rightarrow C_1=0$

2) $\eta=1$ $U_{\infty}=0 \Rightarrow C_2=1/4$

$$U_{\infty} = -\frac{\eta^2}{4} + C_1 \ln \eta + C_2$$

$$U_{\infty} = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)$$



$$\frac{\partial U_t}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U_t}{\partial \eta} \right)$$

$$U_t(\tau, \eta) = T(\tau) \Xi(\eta)$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\Xi} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Xi}{d\eta} \right) = -\lambda^2$$

$$\frac{dT}{d\tau} = -\lambda^2 T \quad \Rightarrow \quad T = C_o \mathbf{exp}(-\lambda^2 \tau)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Xi}{d\eta} \right) = -\lambda^2 \Xi$$

Funções de Bessel



Funções de Bessel $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[q(x) + \lambda^2 \omega(x) \right] y = 0$

$$\frac{d}{dx} \left(x^p \frac{d\theta}{dx} \right) + \gamma^2 x^s \theta = 0 \quad p - s \neq 2 \quad \text{Definindo} \quad \begin{cases} \mu = \frac{2}{s - p + 2} \\ \nu = \frac{1 - p}{s - p + 2} \end{cases}$$

Solução Geral: $\theta = x^{\frac{1-p}{2}} Z_\nu \left(|\gamma| \mu x^\mu \right)$

γ	ν	(soluções particulares) Z_ν	
Real	Fracioário Zero ou Inteiro $(\nu = n)$	J_ν $J_{-\nu}$ (ou Y_ν) J_n J_n	Funções de Bessel de 1ª e 2ª espécie
Imaginário	Fracioário Zero ou Inteiro $(\nu = n)$	I_ν $I_{-\nu}$ (ou K_ν) I_n I_n	Funções de Bessel Modificadas de 1ª e 2ª espécie

Obs. Se $p - s = 2 \Rightarrow$ trate-se de equações equidimensional, cuja solução geral é do tipo $\theta = x^r$



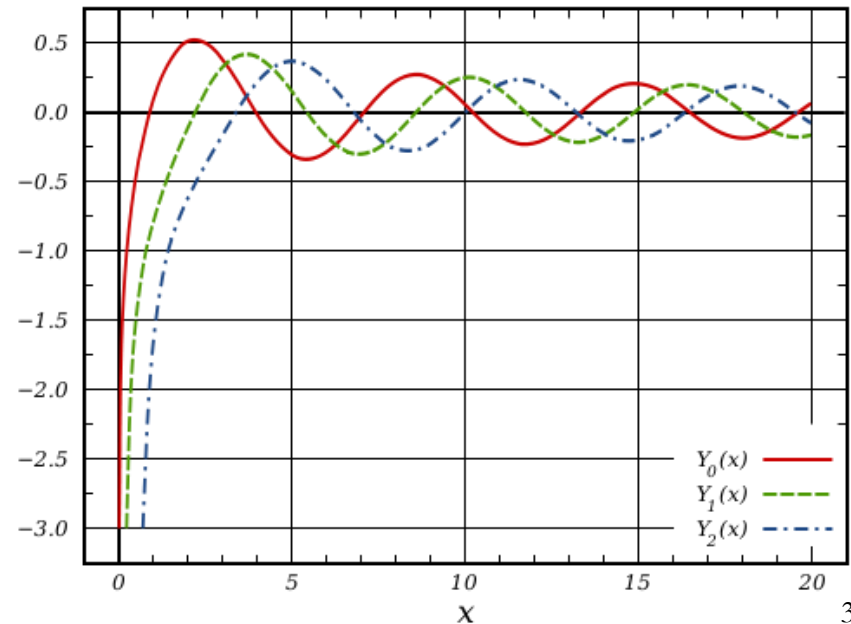
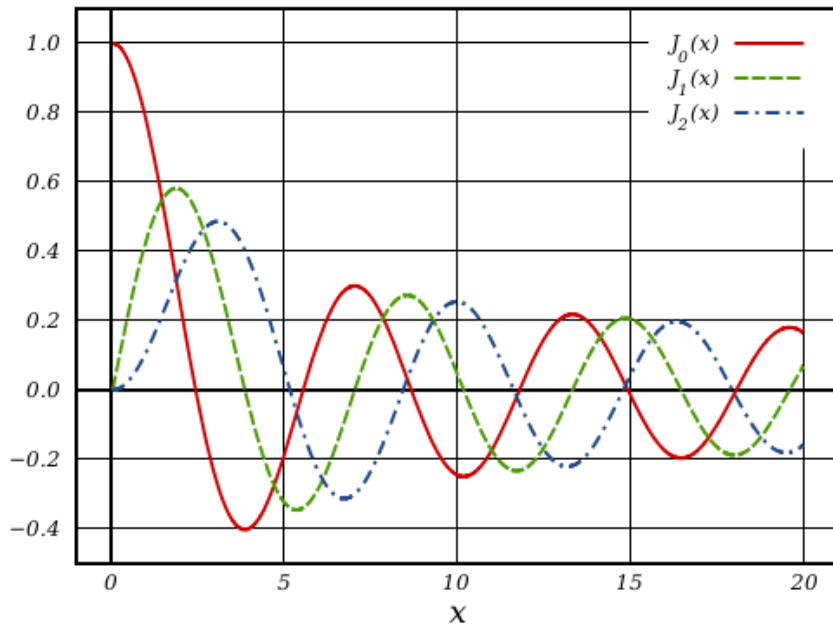
Funções de Bessel

$$J_{\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$Y_{\nu}(mx) = \frac{\cos(\nu\pi) J_{\nu}(mx) - J_{-\nu}(mx)}{\sin(\nu\pi)}$$

onde função Gama: $\left(\begin{array}{l} \Gamma(1) = 0! = 1 \\ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \end{array} \right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n! \\ \Gamma(\nu) \Gamma(\nu-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \end{array} \right.$$

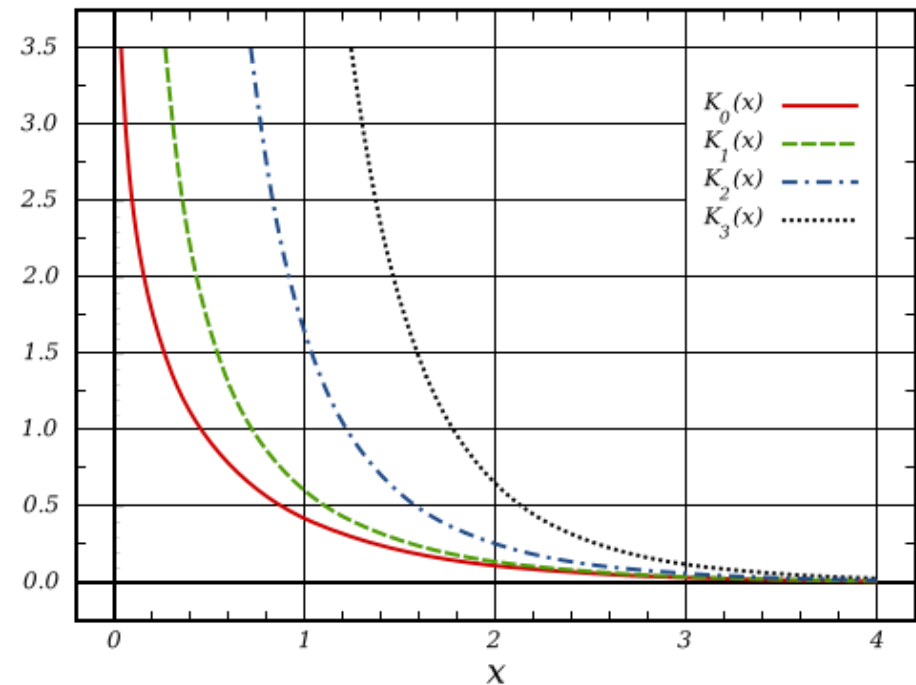
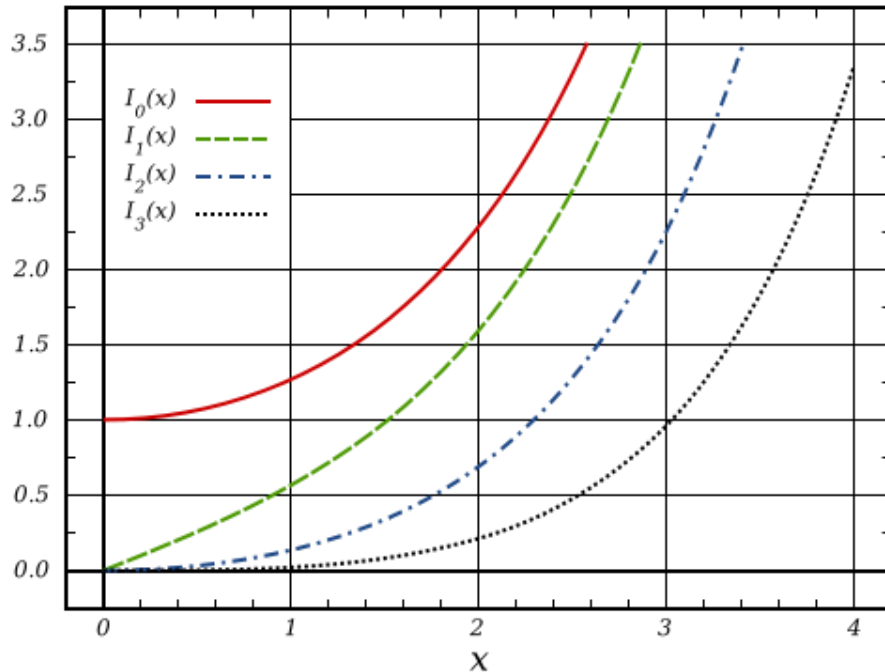




Funções de Bessel Modificada

$$I_{\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$K_{\nu}(mx) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(mx) - I_{\nu}(mx)}{\text{sen}(\nu\pi)}$$





Derivadas das Funções de Bessel:

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu Z_\nu(mx) \right] = \begin{cases} mx^\nu Z_{\nu-1}(mx) & \text{para } Z = J, Y, I \\ -mx^\nu Z_{\nu-1}(mx) & \text{para } Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\nu} Z_\nu(mx) \right] = \begin{cases} -mx^{-\nu} Z_{\nu+1}(mx) & \text{para } Z = J, Y, K \\ mx^\nu Z_{\nu+1}(mx) & \text{para } Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \left[Z_0(mx) \right] = \begin{cases} -m Z_1(mx) & \text{para } Z = J, Y, K \\ m Z_1(mx) & \text{para } Z = I \end{cases}$$

Caso
especial,
para
 $\nu = 0$

$$\frac{d}{dx} \left[Z_\nu(mx) \right] = \begin{cases} m Z_{\nu-1}(mx) - \left(\frac{\nu}{x}\right) Z_\nu(mx) & \text{para } Z = J, Y, K \\ m Z_{\nu-1}(mx) - \frac{\nu}{x} Z_\nu(mx) & \text{para } Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \left[Z_\nu(mx) \right] = \begin{cases} -m Z_{\nu+1}(mx) + \left(\frac{\nu}{x}\right) Z_\nu(mx) & \text{para } Z = J, Y, K \\ m Z_{\nu+1}(mx) + \left(\frac{\nu}{x}\right) Z_\nu(mx) & \text{para } Z = I \end{cases}$$



Voltando ao problema

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Xi}{d\eta} \right) + \lambda^2 \Xi \eta = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^p \frac{d\theta}{dx} \right) + \gamma^2 x^s \theta = 0$$

$$p - s \neq 2$$

Definindo

$$\begin{cases} \mu = \frac{2}{s-p+2} \\ \nu = \frac{1-p}{s-p+2} \end{cases}$$

$$p = 1; \quad s = 1; \quad \mu = 1; \quad \nu = 0; \quad \gamma = \lambda \quad \text{real}$$

função peso $w(\eta) = \eta$

$$\Xi = C_1 J_0(\lambda \eta) + C_2 Y_0(\lambda \eta)$$

Condições de contorno :

$$1) \quad \eta=0 \quad \Xi = \text{finito} \quad \Rightarrow \quad C_2=0$$

$$2) \quad \eta=1 \quad \Xi=0 \quad \Rightarrow \quad J_0(\lambda_n)=0$$

$$U_\tau = T \Xi$$

$$U_\tau = A_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) J_0(\lambda_n \eta)$$

$$U_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) J_0(\lambda_n \eta)$$



Condição inicial : $\tau=0 \quad U_t = -U_\infty$

$$-\frac{1}{4}(1-\eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \eta) \quad A_n = \frac{\int_0^1 -\frac{1}{4}(1-\eta^2) \eta J_0(\lambda_n \eta) d\eta}{\int_0^1 \eta J_0^2(\lambda_n \eta) d\eta}$$

$$A_n = -\frac{J_2(\lambda_n)/(2\lambda_n^2)}{0,5\left([J_0(\lambda_n)]^2 + [J_1(\lambda_n)]^2\right)}$$

$$\text{mas } \frac{J_2(\lambda_n)}{2\lambda_n^2} = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n^3} - \frac{J_0(\lambda_n)}{2\lambda_n^2}$$

$$J_0(\lambda_n) = 0$$

$$A_n = -\frac{J_1(\lambda_n)/\lambda_n^3}{0,5[J_1(\lambda_n)]^2}$$

$$A_n = -\frac{2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$$

$$U = \frac{1}{4}(1-\eta^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp(-\lambda_n^2 \tau) J_0(\lambda_n \eta)$$



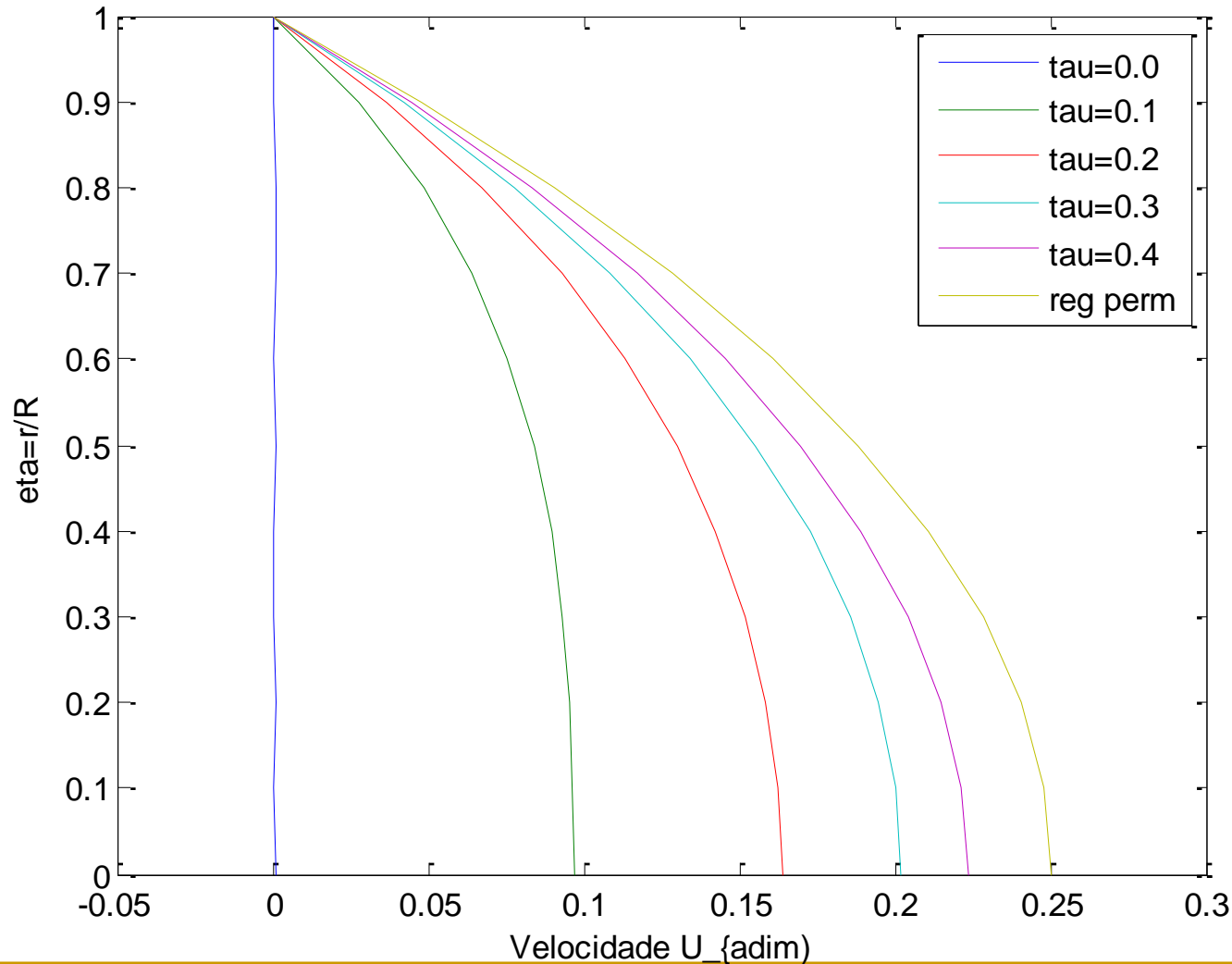
As primeiras raízes da função de Bessel encontram-se na tabela abaixo para valores positivo de n inteiro. Podem ser encontradas em [Mathematica](#) usando o comando [BesselJZero](#) $[n, k]$.

n	$J_0(\lambda_n)$	$J_1(\lambda_n)$	$J_2(\lambda_n)$	$J_3(\lambda_n)$	$J_4(\lambda_n)$	$J_5(\lambda_n)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178



$$U = \frac{1}{4}(1-\eta^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp(-\lambda_n^2 \tau) J_0(\lambda_n \eta)$$

Grafico de V x t





```
clc;
clear;

nn=1;
lambda_old(nn)=1;
for nn=1:1:12;
    dif=1;
    for iter=1:1:100

lambda(nn)=lambda_old(nn)+besselj(0,lambda_old(nn))/besselj(1,lambda_old(nn));
        dif=abs(lambda(nn)-lambda_old(nn));
        lambda_old(nn)=lambda(nn);
    end
    lambda_old(nn+1)=lambda_old(nn)+2.5;
end
lambda
```



```
for i=1:1:5
    tau(i)=0.1*(i-1);
    for j=1:1:11
        eta(j)=0.1*(j-1);
        vel_infty(j)=0.25*(1-eta(j)*eta(j));
        velocidade_t(j)=0;
        for n=1:1:12
            dn=-2/(lambda(n)^3*besselj(1,lambda(n)));
            velocidade_t(j)=velocidade_t(j)+
                dn*exp(-lambda(n)^2*tau(i))*besselj(0,lambda(n)*eta(j));
        end
        vel(l,j)=vel_infty(j)+velocidade_t(j);
    end
end
for j=1:1:11
    vel_1(j)=vel(1,j);
    vel_2(j)=vel(2,j);
    vel_3(j)=vel(3,j);
    vel_4(j)=vel(4,j);
    vel_5(j)=vel(5,j);
end

figure(1)
plot(vel_1 ,eta,vel_2,eta,vel_3,eta,vel_4,eta,vel_5,eta,vel_infty,eta);
legend('tau=0.0','tau=0.1','tau=0.2','tau=0.3','tau=0.4','reg perm') ;
title('Grafico de V x t');
ylabel('eta=r/R');
xlabel('Velocidade U_{adim}');
```