Equações de Conservação

- Teorema de Transporte de Reynolds

- Equação de Conservação de Massa (continuidade)

- Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2ª Lei de Newton)
  - Equação de Navier-Stokes

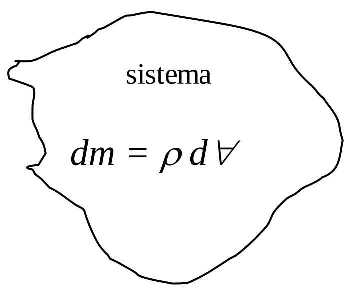
- Equação de Energia Mecânica

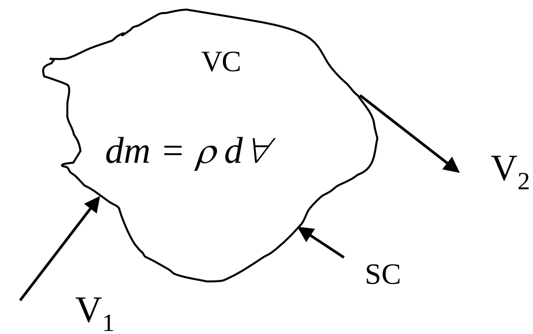
- Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Angular

Teorema de Transporte de Reynolds

- permite transformar as equações para sistema (massa fixa) para volumes de controle (volume fixo)

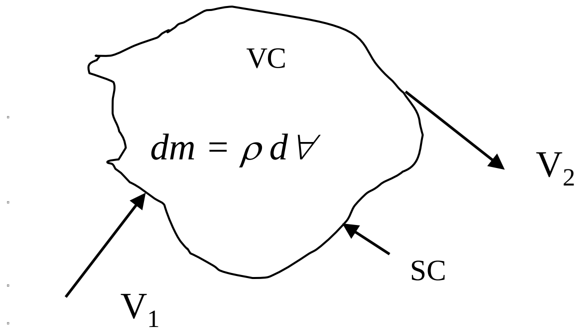
Variação total com o tempo de de uma grandeza de um sistema	=	taxa de variação da grandeza específica no VC	+	fluxo líquido saindo grandeza específica através da SC





- ϕ = grandeza específica ; ρ = massa específica ;
- $d\ \forall$ = volume infinitesimal
- $d\,m$ = massa infinitesimal ; $d\,m = \rho\, d\ \forall$;
- $d\ \Phi$ = grandeza no volume infinitesimal ; $d\ \Phi = \phi\, d\,m = \phi\, \rho\, d\ \forall$

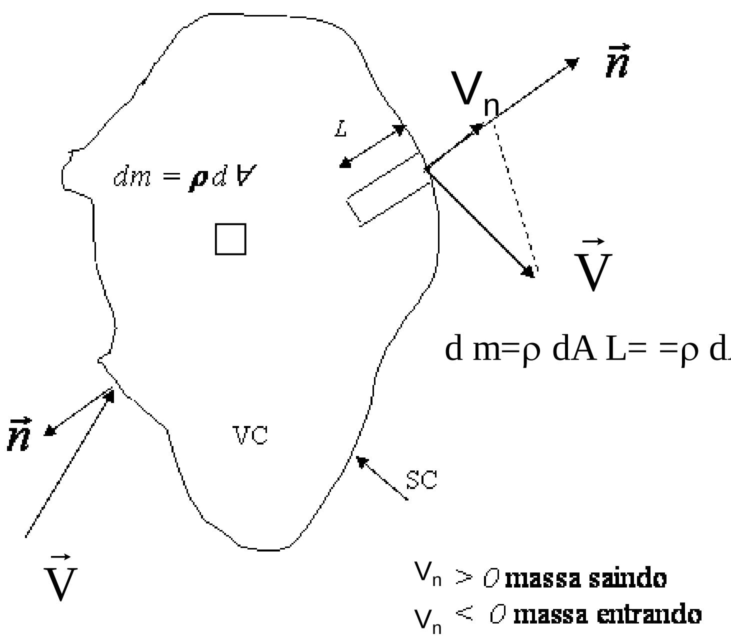
- taxa de acumulação de uma grandeza específica



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \phi \, dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \phi \, \rho \, d\forall$$

- quantidade da grandeza que cruza a superfície:

$$\phi \, d\, m = \phi \;\; \rho \, dA \, L = \; = \phi \, \rho \, dA \, V_n \, dt = \phi \, \rho \, \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA$$



$$d\, m = \rho \; dA \; L = \; = \rho \; dA \; V_n \; dt$$

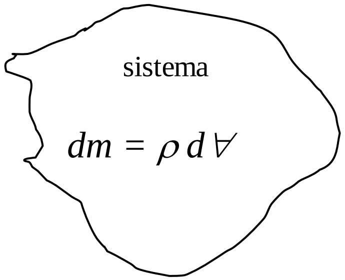
fluxo líquido de massa cruzando a SC

$$\int_{SC} \phi \, \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, d\, A$$

$$\boxed{\left.\frac{d\Phi}{d\,t}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \phi \, \rho \, d\forall + \int_{SC} \phi \, \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, d\, A}$$

Equação de Conservação de Massa

- **Sistema:**



$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_{sistema}} \rho\, d\forall = 0 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0$$

- **Volume de controle:**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \bullet \vec{n}\, dA = 0}$$

A

Variação com o tempo da
da massa do volume de controle

B

Fluxo líquido de massa
através da superfície de controle

Aplicando o teorema de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x)\,dx + \frac{db}{dt} f(b) - \frac{da}{dt} f(a)$$

ao termo A , temos $\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C} \rho\, d\forall = \int_{V.C} \frac{\partial}{\partial t} \rho\, d\forall$

Aplicando o teorema de divergência de Gauss ao termo B, temos

$$\int_{SC} \rho\, \vec{V} \bullet \vec{n}\, d\,A = \int_{VC} \mathrm{div}\,(\,\rho\,\vec{V}\,)\, d\,\forall$$

Somando A com B $\int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\,\rho\,\vec{V}\,)\right] d\,\forall = 0$

Queremos que está equação seja válida para qualquer volume, portanto, dividindo por $d\,\forall$ e aplicando o limite $d\,\forall$ tende a zero, obtemos a equação de conservação de massa diferencial, válida para qualquer ponto

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0} \qquad \textbf{(I)}$$

Variação da massa com o tempo por unidade de volume

Fluxo líquido de massa por unidade de volume

A equação acima pode ser rescrita sabendo que $\mathbf{div}(\rho\vec{V}) = \vec{\nabla} \bullet (\rho\vec{V}) = \rho\vec{\nabla} \bullet \vec{V} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\rho$

como $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$$

Definido o operador : derivada material, ou total ou substantiva $$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} A$$

variação local temporal

variação convectiva

temos $$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0} \qquad \textbf{(II)}$$

Equação de Conservação de Massa ou Continuidade

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\ (\rho \vec{V}) = 0} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u_i)}{\partial\, x_i} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\ \mathbf{div}\ (\vec{V}) = 0}$$

Casos Particulares

1. Regime Permanente: $\mathbf{div}\ (\rho \vec{V}) = 0$

2. Incompressível: $\mathbf{div}\ (\vec{V}) = 0$

- Coordenadas cartesianas: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] = 0$$
- Coordenadas curvilíneas:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_i \frac{\partial}{\partial\, x_i} \bullet e_j (\rho\, u_j) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_i \bullet e_j \frac{\partial(\rho\, u_j)}{\partial\, x_i} + (\rho\, u_j)\, e_i \bullet \frac{\partial\, e_j}{\partial\, x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u_i)}{\partial\, x_i} + (\rho\, u_j)\, e_i \bullet \frac{\partial\, e_j}{\partial\, x_i}$$

- Coordenadas cilíndricas: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{r\ \partial r}(r\rho\ u_r) + \frac{\partial}{r\ \partial \theta}(\rho\ u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\ u_z) \right] = 0$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2a Lei de Newton)

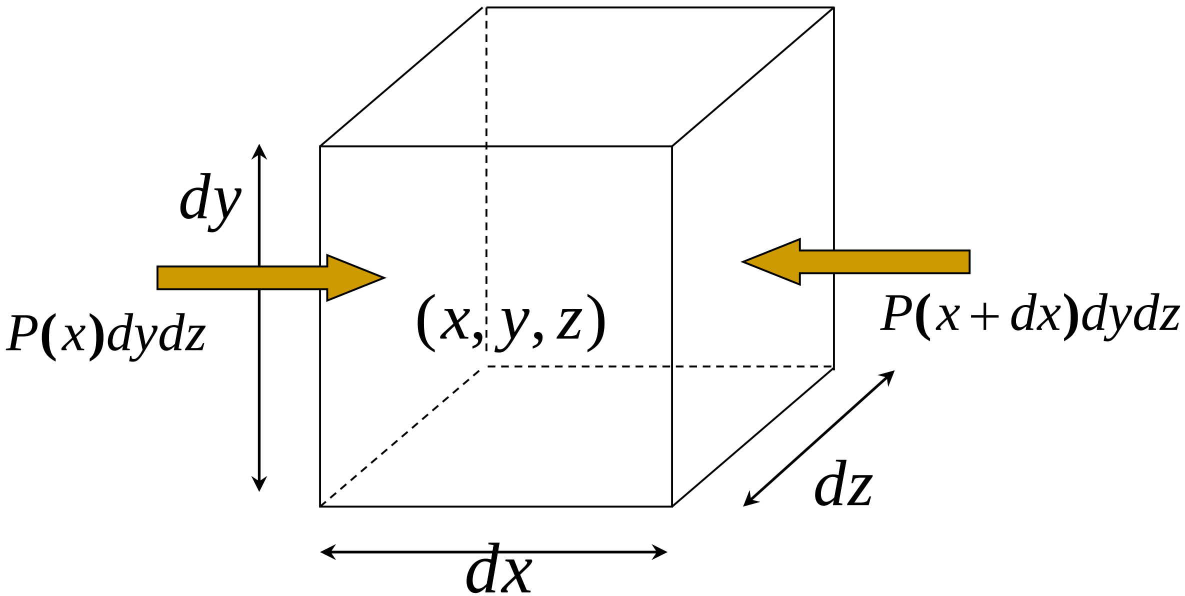
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum d\forall \, \vec{f}_{ext} = \rho \, d\forall \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_S + \vec{f}_c = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

força de corpo: $\vec{f}_C$

força volumétrica,ex: força gravitacional $\boxed{\vec{f}_g = \rho \, \vec{g}}$

força de superfície: $\vec{f}_S = \vec{f}_p + \vec{f}_\mu$

$\vec{f}_p$ - força de pressão: força normal compressiva



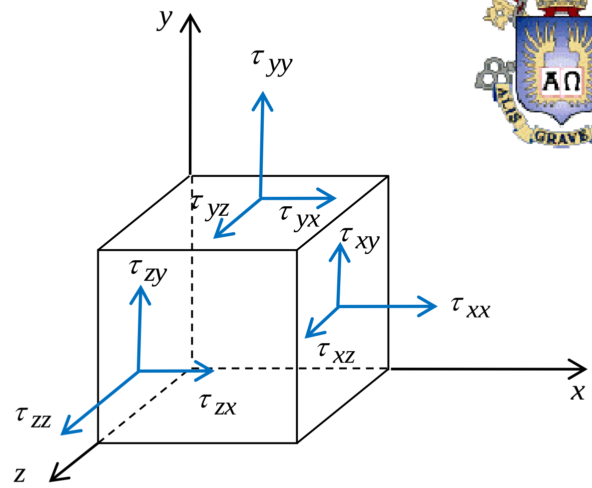
$dF_{p,x} = P\,dy\,dz - (P\,dy\,dz + \partial P/\partial x\,dx\,dy\,dz) = -\,\partial P/\partial x\,d\forall$

$\Rightarrow f_{p,x} = -\,\partial P/\partial x$ logo $f_{p,y} = -\,\partial P/\partial y$ e $f_{p,z} = -\,\partial P/\partial z$

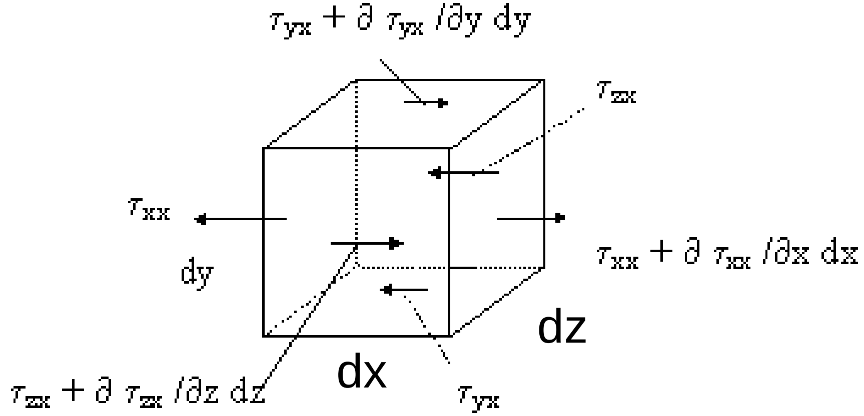
$$\vec{f}_p = -\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_p = -\vec{\nabla} P}$$

$\vec{f}_{\mu}$ **força viscosa**: força definida por um tensor, em cada face possui 3 componentes, dois tangenciais e um normal

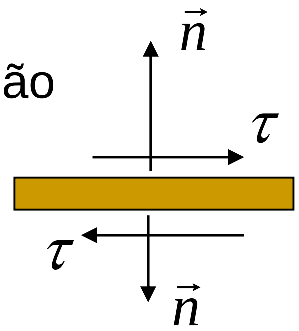
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



- Força de superfície viscosa resultante na direção x



convenção



$$F_{\mu,x} = -\tau_{xx}\Delta y\Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right)\Delta y\Delta z - \tau_{yx}\Delta x\Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\Delta x\Delta z - \tau_{zx}\Delta x\Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\Delta x\Delta y$$

$$F_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \quad \Rightarrow \quad f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

- Procedendo de forma análoga para as outras direções

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_\mu = \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}}$$

$$f_{\mu,z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\vec{f}_\mu = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\bar{f}_\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} & \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} & \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Equação diferencial de quantidade de movimento na forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,\vec{g} - \nabla P + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}$$

- coordenadas cartesianas

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}}$$

Casos Particulares:

- **Equação de Euler (fluido perfeito, não viscoso)**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad} P$$

- **Equação da Hidrostática:**

$$\rho \vec{g} = \mathbf{grad}\ P$$

Para fluidos viscosos, precisamos de uma informação adicional: relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação do elemento de fluido pode-se demonstrar pelo uso da equação conservação de quantidade de movimento angular que o tensor $\underline{\underline{\tau}}$ é simétrico

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Equação Constitutiva para fluidos Newtonianos

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \tau_{xx} = \mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \tau_{yy} = \mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\,\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad \tau_{zz} = \mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\,\nabla \bullet \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{f}_{\mu} = \operatorname{div}\underline{\underline{\tau}} = \operatorname{div}\mu\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \operatorname{div}\left\{\mu\,[\operatorname{grad}\vec{V} + (\operatorname{grad}\vec{V})^{T}] - \frac{2}{3}\mu\,\operatorname{div}\vec{V}\,\underline{\underline{I}}\right\}}$$

Equação de Navier-Stokes: Equação de conservação de quantidade de movimento linear para fluido Newtonianos (coordenadas cartesianas)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

- A equação de Navier-Stokes simplifica bem se a massa específica e a viscosidade foram constante $\vec{f}_{\mu} = \mu \nabla^2 \vec{V}$
  - A maioria dos líquidos podem ser considerados como fluidos incompressíveis ⇒ $\nabla \bullet \vec{V} = 0$
  - A viscosidade da maioria dos gases é aproximadamente constante

Navier-Stokes (propriedades constantes) $\rho \dfrac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$

coordenadas cartesianas

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Navier-Stokes (propriedades constantes) em coordenadas cilíndricas

Direção radial

$$\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\right]=\rho g_r-\frac{\partial P}{\partial r}+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]$$

Direção angular

$$\rho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\right]=\rho g_\theta-\frac{\partial P}{r\partial\theta}+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]$$

Direção axial

$$\rho\left[\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_z}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

Equação da Vorticidade

Tensor vorticidade $$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{V} - (\nabla\vec{V})^T\right]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_x\, \omega_x + \mathbf{e}_y\, \omega_y + \mathbf{e}_z\, \omega_z \Rightarrow$ vetor vorticidade $$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{V}$$

Equação da Vorticidade

- Uma característica essencial do escoamento turbulento é que estes devem ser rotacionais, isto é a vorticidade é não nula. A vorticidade é definida pelo rotacional do vetor velocidade

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V}$$

- sendo igual a duas vezes a rotação do elemento de fluido.
- Em notação indicial $$\xi_k e_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) \times \left(u_j e_j \right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} e_k$$
- onde $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$ sendo $$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & se \quad (i,j,k) \quad \text{são cíclicos} \\ -1 & se \quad (i,j,k) \quad \text{são anti-cíclicos} \\ 0 & se \quad (i,j,k) \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

símbolo de permutação (símbolo Levi-Civita)

- A equação para a vorticidade pode ser derivada, aplicando o rotacional na equação de Navier-Stokes

$$\nabla \times \left(\frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) + \upsilon \nabla \times \left(\nabla^2 \vec{V} \right)$$

- resultando em

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = \upsilon \nabla^2 \vec{\xi} + \vec{\xi} \bullet \nabla \vec{V}$$

- A equação para a evolução de um elemento de linha material infinitesimal é

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \bullet \nabla \vec{V}$$

- Comparando as duas últimas equações, observa-se que para um escoamento não viscoso, o vetor vorticidade se comporta da mesma forma que um elemento de linha material infinitesimal (teorema de Helmholtz)

Equação de Energia Mecânica

- A energia mecânica de um sistema não se conserva, porém esta equação é muito útil em diversas situações.
- Pode ser obtida através do produto escalar do vetor velocidade com a equação de conservação de quantidade de movimento linear

$$\vec{V} \bullet \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}\right] = \vec{V} \bullet \left[\rho\,\vec{g} - \nabla P + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}\right]$$

- Obs: (1) $\vec{V} \bullet \vec{V} = \left|\vec{V}\right|^2 = V^2 \quad ou \quad \vec{V} \bullet \vec{V} = V_i\, V_i$

(2) $$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla \vec{V}\right) + \vec{V}\,\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \vec{V})\right]}_{\text{zero continuidade}} = \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \vec{V}\,\vec{V}\right)$$

- Então, operando o produto escalar

$$\vec{V} \bullet \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}\right] = \vec{V} \bullet \left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \vec{V}\,\vec{V}\right)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) + \nabla \bullet \left(\frac{1}{2}\rho V^2\,\vec{V}\right)\right]$$

$$\vec{V} \bullet \nabla P = \nabla \bullet \left(P\,\vec{V}\right) - P\,\nabla \bullet \vec{V} \qquad\qquad \vec{V} \bullet \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}} = \nabla \bullet \left(\underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V}\right) - \underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$$

Produto escalar de dois tensores (produto duplo):

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = e_i\ \sigma_{ij}\ e_j : e_k\ \tau_{kl}\ e_l = e_i \bullet e_l\ \ e_j \bullet e_k\ \sigma_{ij}\ \tau_{kl} = \delta_{il}\ \delta_{jk}\ \ \sigma_{ij}\ \tau_{kl} = \sigma_{ij}\ \tau_{ji}$$

Para fluido Newtoniano

$$\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V} = \left\{ \mu [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T] - \frac{2}{3} \mu \nabla \bullet \vec{V} \right\} : \nabla \vec{V}$$

$$\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V} = \mu \Phi = \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\Phi = \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right]$$

Φ é sempre positivo, é a função dissipação

$$\Phi = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]$$

Para fluidos Não-newtonianos $\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$ pode ser negativo

Equação de Energia Cinética

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{aumento de}\\ \text{energia}\\ \text{cinética}}} + \underbrace{\nabla \bullet \left(\frac{1}{2}\rho V^2 \vec{V}\right)}_{\substack{\text{fluxo}\\ \text{líquido de}\\ \text{energia}\\ \text{cinética}}} = \underbrace{\rho \vec{V} \bullet \vec{g}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{trabalho}\\ \text{devido a}\\ \text{força}\\ \text{gravita–}\\ \text{cional}}} - \underbrace{\nabla \bullet \left(P \vec{V}\right)}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{trabalho}\\ \text{devido a}\\ \text{pressão}}} + \underbrace{P \nabla \bullet \vec{V}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{conversão}\\ \text{reversível}\\ \text{a}\\ \text{energia}\\ \text{interna}}} + \underbrace{\nabla \bullet (\underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V})}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{trabalho}\\ \text{devido a}\\ \text{forças}\\ \text{viscosas}}} - \underbrace{\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}}_{\substack{\text{taxa de}\\ \text{conversão}\\ \text{irrever–}\\ \text{sível a}\\ \text{energia}\\ \text{interna}}}$$

- $P \nabla \bullet \vec{V}$ pode ser positivo ou negativo, dependendo se o fluido está sofrendo expansão ou compressão. As mudanças de temperatura podem ser grandes em compressores, turbinas ou na presença de ondas de choque.
- $\underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V}$ é sempre positivo para fluidos Newtonianos. Este termo pode ser significativo em sistemas com viscosidades e gradientes de velocidades elevados, como ocorre em lubrificação, extrusão rápida e vôos de alta velocidade.

Equação de Energia Mecânica

- Trabalhando o termo $\rho\vec{V} \bullet \vec{g}$ podemos rescrever a equação para a soma da energia cinética e potencial, gerando a equação de energia mecânica
- Introduzindo a definição de energia potencial potencial por unidade de massa Ψ, definida com $\vec{g} = -\nabla\,\Psi$, temos que

$$\rho\vec{V} \bullet \vec{g} = -\rho\vec{V} \bullet \nabla\Psi = -\nabla \bullet (\rho\vec{V}\;\;\Psi) + \Psi\;\;\nabla \bullet (\rho\vec{V}) =$$

$$= -\nabla \bullet (\rho\vec{V}\;\;\Psi) - \Psi\frac{\partial\rho}{\partial t} == -\nabla \bullet (\rho\vec{V}\;\;\Psi) - \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\Psi\right) + \nabla \bullet \left((\frac{1}{2}\rho V^2) + \rho\Psi)\vec{V}\right) = -\nabla \bullet \left(P\vec{V}\right) + P\,\nabla \bullet \vec{V} + \nabla \bullet (\underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V}) - \underline{\underline{\tau}} : \nabla\vec{V}}$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Angular

- Esta equação pode ser obtida com o produto vetorial do vetor posição ***r*** com a equação de conservação de quantidade de movimento linear

$$\vec{r} \times \left[\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \vec{V} \vec{V} \right) \right] = \vec{r} \times \left[\rho \vec{g} - \nabla P + \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}} \right]$$

$$\frac{\partial \rho [\vec{r} \times \vec{V}]}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \vec{V} [\vec{r} \times \vec{V}] \right) = \vec{r} \times \rho \vec{g} - \nabla \bullet [\vec{r} \times P \, \mathbf{I}] + \nabla \bullet [\vec{r} \times \underline{\underline{\tau}}] - [\boldsymbol{\varepsilon} : \underline{\underline{\tau}}]$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de 3ª. ordem com componentes ε_{ijk} *(símbolo de permutação)*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= +1 \quad se \quad ijk = 123, 231 \text{ ou } 312 \\ &= -1 \quad se \quad ijk = 321, 132 \text{ ou } 213 \\ &= \ \ 0 \quad se \quad \textit{quaisquer dois índices forem} \\ &\qquad\qquad\qquad \textit{diferentes} \end{aligned}$$

Produto vetorial de dois vetores:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk}\, e_i\, v_j\, w_k \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{det}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Produto vetorial de um vetor e tensor:

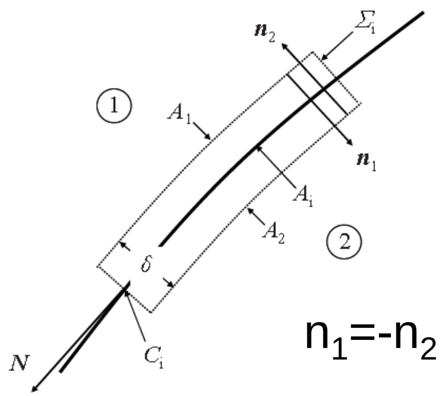
$$\vec{r} \times \underline{\underline{\tau}} = r_i\, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j\, \tau_{jk}\, \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_l\, \mathbf{e}_k\, \varepsilon_{ijl}\, r_i\, \tau_{jk}$$

- **Se τ é simétrico:** $[\boldsymbol{\varepsilon} : \underline{\underline{\tau}}] = 0$
  - não existe conversão de momentum angular macroscópico em momentum angular interno, i.e, as duas formas de momentum se conservam separadamente.

CONDIÇÕES EM INTERFACES

Balanço de massa

$$\dot{m} = \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_\mathrm{i}) \bullet \mathbf{n} = \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_\mathrm{i}) \bullet \mathbf{n}$$



$n_1 = -n_2$

$\dot{m}$ Fluxo de massa na interface, devido a mudança de fase

Velocidade da interface $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{ti} + \mathbf{v}_{ni}$

$\mathbf{v}_{ti} = \mathbf{v}_{si}$ Componente tangencial = componente tangencial da superfície

Para obter o componente normal, vamos considerar que a interface pode ser definida por $S(\mathbf{x}, t)=0$

Em t=t+dt, ainda temos $S(\mathbf{x} + \mathbf{v}_i\, dt, t+dt)=0$

Logo, usando uma expansão em série de Taylor
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}_i \bullet \nabla S = 0 \quad em \quad S = 0$$

O unitário normal de fluido 1 S< 0 fluido 2 S > 0
$$\mathbf{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \qquad \mathbf{v}_{ni} = \mathbf{v}_i \bullet \mathbf{n} = -\frac{1}{|\nabla S|}\frac{\partial S}{\partial t}$$

CONDIÇÕES EM INTERFACES

Para superfície sólida, impermeável $\dot{m} = 0$ $\mathbf{n}\bullet\mathbf{u} = \mathbf{n}\bullet\mathbf{v}_{\mathrm{i}}$

Condição de contorno cinemática $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u}\bullet\nabla S = 0 \quad em \quad S = 0$

Superfícies sólidas para escoamento viscoso: condição de não deslizamento

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}_i) = 0 \quad em \quad S = 0$$

Esta expressão não se aplica, quando existe movimento da linha de contato, porém, ainda não existem modelos bem definidos para essas situações

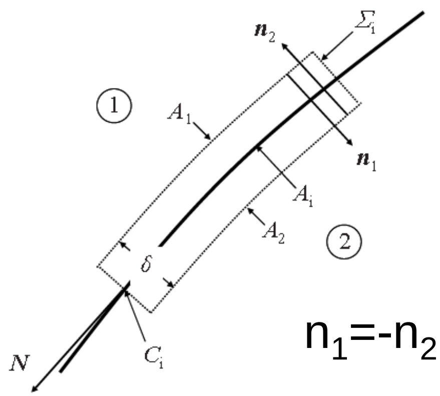
Paredes impermeáveis $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i \quad em \quad S = 0$

Para a interface entre dois fluidos $\mathbf{n}\times(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0$

Na ausência de mudança de fase $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad em \quad S = 0$

CONDIÇÕES EM INTERFACES

Balanço de quantidade de movimento



n_1=-n_2

$$(\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) \bullet \mathbf{n} - \dot{m}\,(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = -\nabla \bullet \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn} \right) \gamma \right] = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn} \right) \bullet \nabla \gamma + \gamma\, \kappa\, \mathbf{n}$$

$$\sigma = -p\,\mathbf{I} + \tau$$

γ é a tensão superficial κ é a curvatura $\kappa = \nabla \bullet \mathbf{n}$

(I – n n) é a projeção do plano tangente à interface

Decompondo nas partes normais e tangencias

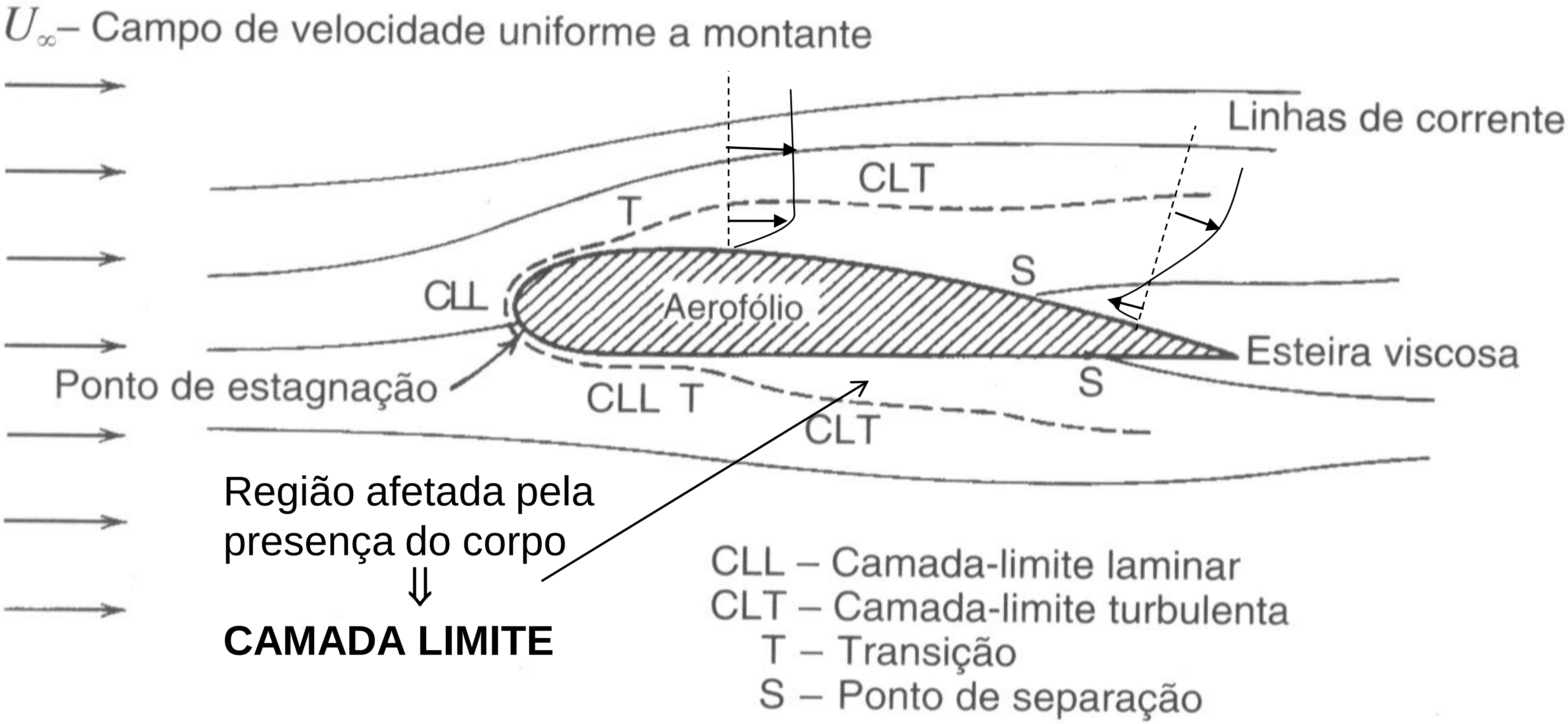
Normal: $-p_2 + p_1 + \mathbf{n} \bullet (\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1) \bullet \mathbf{n} - \dot{m}\,(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \gamma\, \kappa$

Tangencial: $\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1) \bullet \mathbf{n} = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{nn} \right) \bullet \nabla \gamma$

CONDIÇÕES DE CONTORNO

- **Interface fluido-sólido:** a velocidade do líquido é igual a velocidade do sólido
  - condição de **não deslizamento**: velocidades tangenciais iguais
  - condição de **impenetrabilidade**: velocidades normais iguais
- **Interface plana líquido-líquido:** as velocidades e tensões são contínuas através da interface
- **Interface plana líquido-gás:** a tensão cisalhante é nula na interface, uma vez que os gradientes do lado do gás são pequenos. Esta é uma boa aproximação porque $\mu_{gases} << \mu_{liquidos}$.
- Quando as interfaces líquido-liquido ou líquido-gás são **curvas**, a tensão normal não é mais contínua através da interface, e a **tensão superficial** torna-se importante

ESCOAMENTOS EXTERNOS: em geral desejamos determinar as forças que atuam no corpo, isto é, força de arraste e



Região afetada pela presença do corpo

⇓

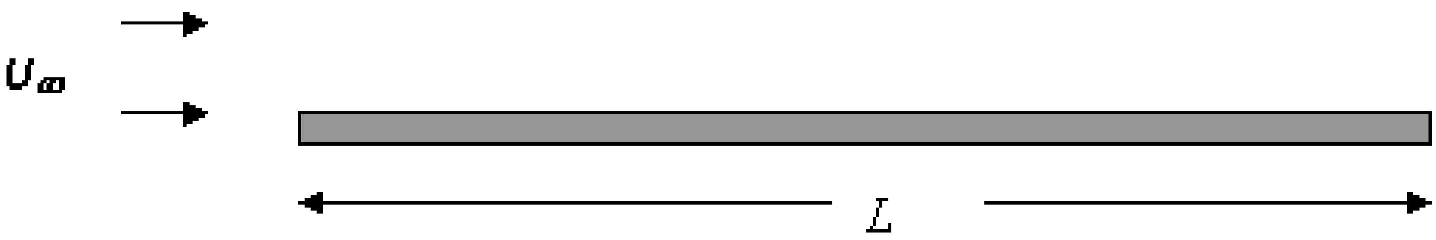
CAMADA LIMITE

Fora da camada limite, o escoamento não é afetado pela presença do corpo ⇒ forças viscosas não são importantes

Quando o escoamento na camada limite é desacelerado devido a uma diferença de pressão, pode ocorrer uma reversão do escoamento e a camada limite separa-se da superfície do corpo, formando a **esteira**

ESCOAMENTOS EXTERNOS

- A velocidade característica é a **velocidade de aproximação do corpo U_∞**
- A dimensão característica é o **comprimento do corpo na direção do escoamento, L**

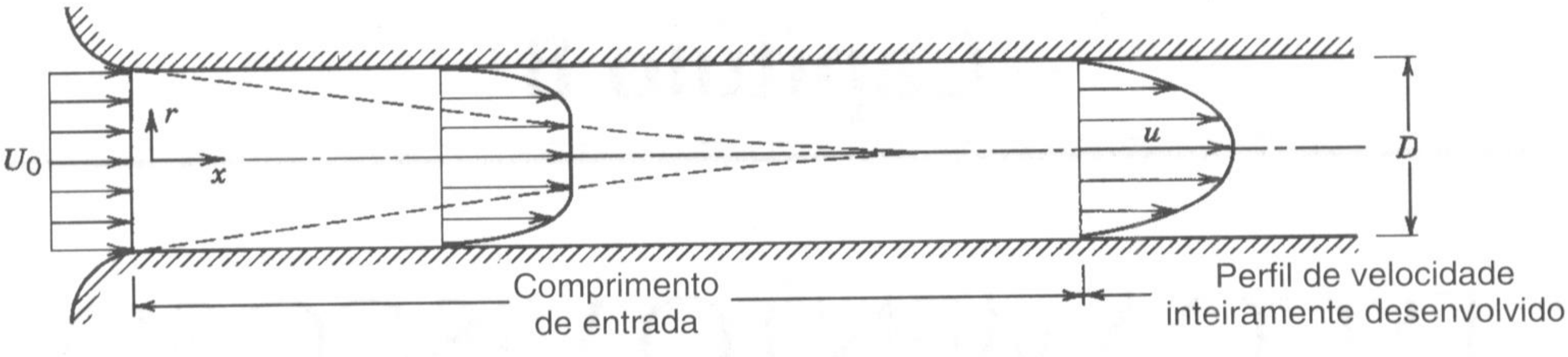


- O número de Reynolds $Re = \dfrac{\rho \, U_\infty \, L}{\mu}$ que caracteriza a transição neste caso é

$Re \leq 5 \times 10^5$ $\Rightarrow$ laminar

$Re > 5 \times 10^5$ $\Rightarrow$ turbulento

- **ESCOAMENTOS INTERNOS:** em geral desejamos buscar a relação entre vazão e queda de pressão.



• Em um escoamento interno, longe da região de entrada, observa-se que o escoamento não apresenta variações na sua própria direção, e a pressão varia linearmente ao longo do escoamento. O escoamento é considerado como ***hidro dinâmicamente desenvolvido***.

• O comportamento na região de entrada de uma tubulação apresenta o mesmo comportamento que o escoamento externo. Portanto, estudaremos escoamentos externos e depois aplicaremos os resultados obtidos para analisar a região de entrada de uma tubulação.

ESCOAMENTOS INTERNOS

- Considerando que o escoamento como ***hidrodinâmicamente desenvolvido***.

- A velocidade característica é a **velocidade média *u_m***
- A dimensão característica é o **diâmetro hidráulico, *D_h***

$$u_m = \frac{Q}{A_T} = \frac{1}{A_T} \int u \; dA$$

$$D_h = \frac{4 \; A_t}{P_m}$$

A_t é a área transversal do escoamento e P_m é o perímetro molhado, o fator 4 é introduzido por conveniência.

O número de Reynolds que caracteriza a transição neste caso é

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho \, u_m \, D_h}{\mu}$$

Re ≤ 2300 ⇒ laminar

Re > 2300 ⇒ turbulento