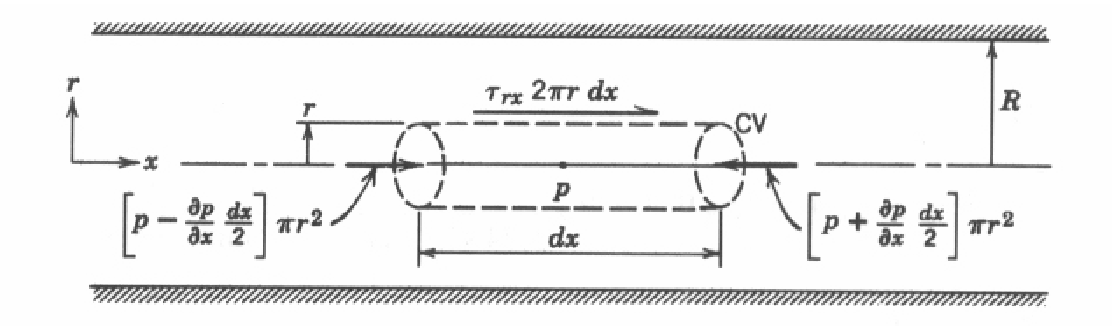
ESCOAMENTO HIDRODINÂMICAMENTE DESENVOLVIDO TURBULENTO

nos escoamentos hidrodinâmicamente desenvolvidos em tubos horizontais, tanto no regime laminar quanto turbulento, a queda de pressão é somente devido às tensões tangenciais nas paredes da tubulação.



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\tau) \;\Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{r}{2}$$

- a tensão na parede é $\tau_s = -\tau(r = R) = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{R}{2}$

- No entanto, o perfil de velocidade varia substancialmente para cada regime de escoamento pois a relação entre a tensão cisalhante e o gradiente de velocidade não é a mesma. Como já foi visto, no regime turbulento

$$\tau = (\mu + \mu_t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \mu_{ef}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \quad ; \quad \mu_{ef} = \mu + \mu_t$$

❑Para avaliar o perfil de velocidade, precisamos de um modelo de turbulência para determinar a viscosidade turbulenta. Por outro lado, podemos utilizar dados empíricos.

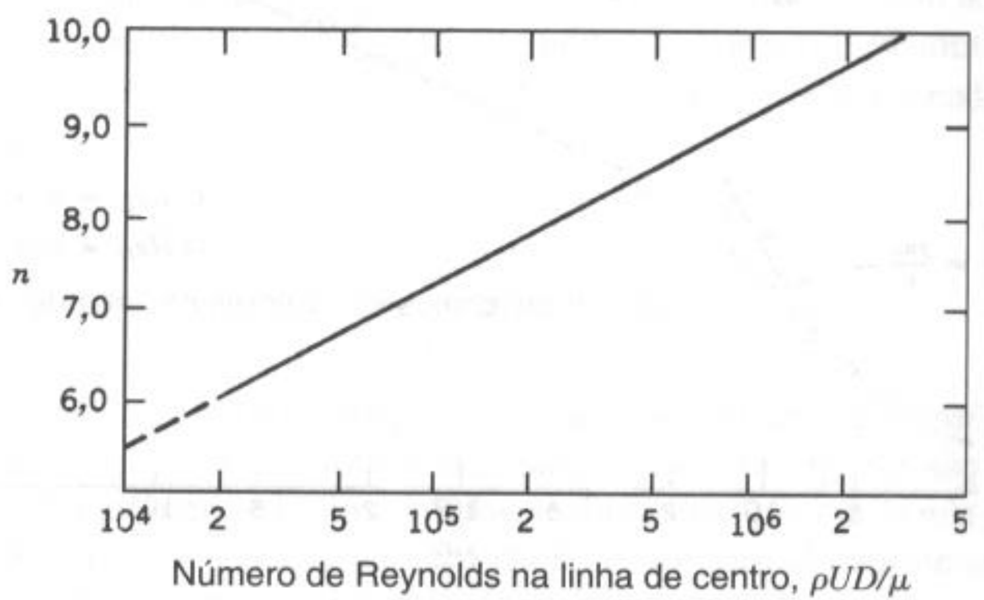
❑Para um tubo liso, o perfil de velocidade pode ser aproximado pela “lei de potências” de forma análoga ao regime turbulento na camada limite

$$\frac{\bar{u}}{\overline{u_{max}}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

❑O expoente *n* depende do número de Reynolds, baseado na velocidade máxima

$$U = \overline{u_{max}}$$

e no diâmetro, de acordo com a figura

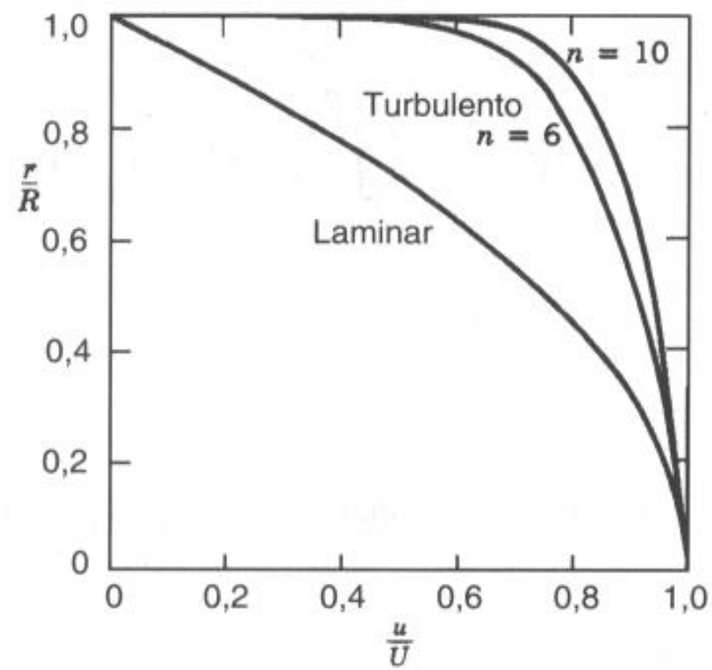


- Conhecido o perfil de velocidade, a velocidade média pode ser facilmente obtida

$$Q = \overline{u_m} \; A_T = \int_{A_T} \bar{u} \; dA_T = \int_0^R \bar{u} \; 2\,\pi\, r\, d\, r \qquad \Rightarrow \frac{\overline{u_m}}{\overline{\overline{u_{max}}}} = \frac{2\;n^2}{(n+1)\;(2n+1)}$$

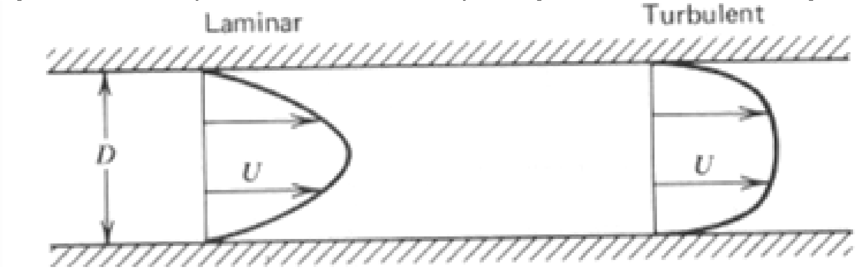
- Naturalmente que a relação entre a velocidade média e máxima depende do expoente *n*. Quanto maior o número de Reynolds, maior é o expoente *n* e mais achatado é o perfil de velocidade, maior é a tensão cisalhante. Note que a relação entre a velocidade média e máxima para o regime laminar em um tudo circular é 1/2.

- A figura ao lado ilustra uma comparação entre o perfil de velocidade no regime laminar e no regime turbulento para diferentes expoentes.



❑Na prática, com muita freqüência, especifica-se o expoente *n* =7 independente do número de Reynolds.

❑Vale ressaltar que a hipótese de velocidade uniforme na seção transversal é uma péssima aproximação no caso de regime laminar. Já para o regime turbulento, é uma aproximação razoável, especialmente para altos Reynolds.



❑O lei 1/n aproxima bem o perfil de velocidade em quase todo o domínio, com exceção da região próximo à parede, não sendo possível estimar o atrito a partir deste perfil.

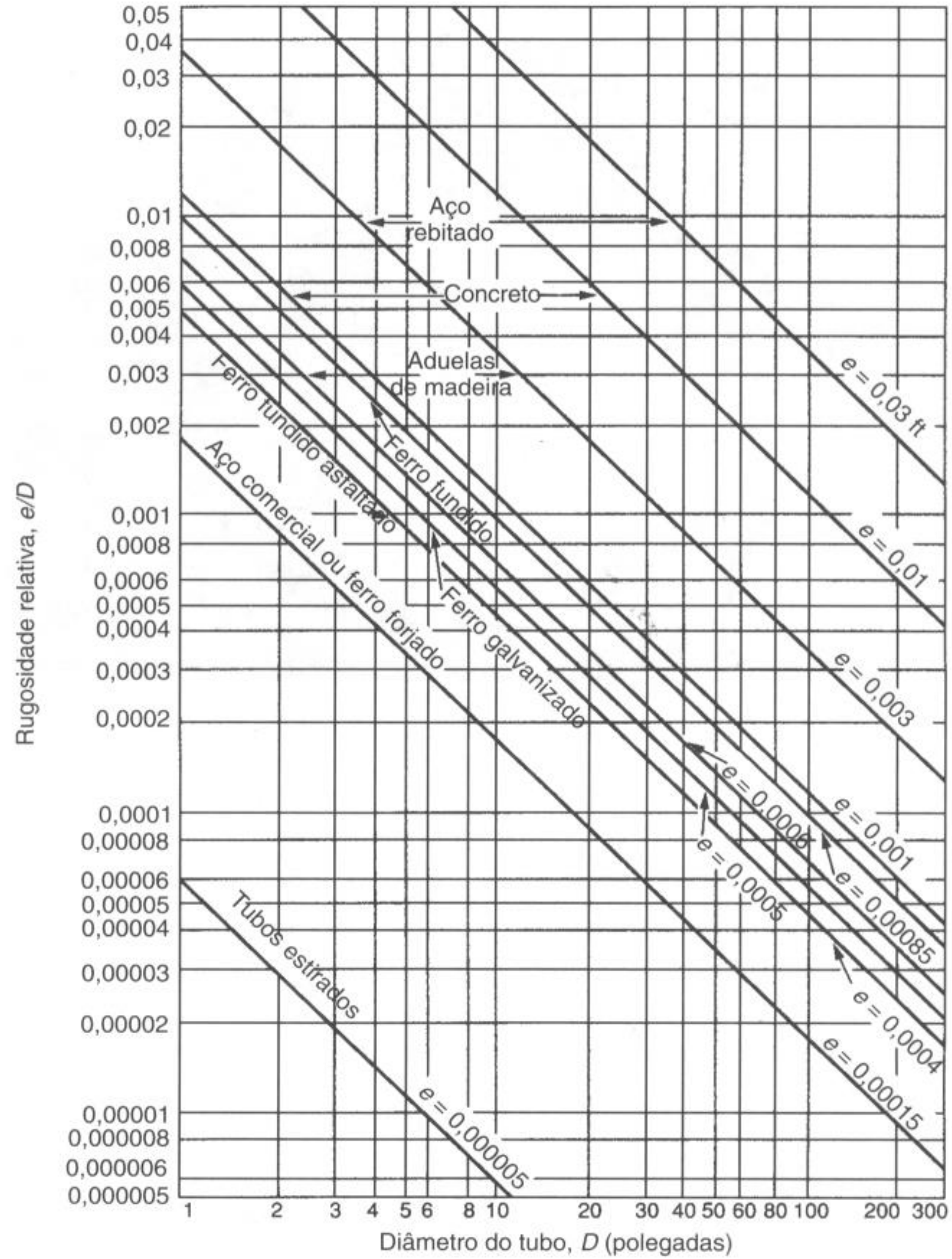
❑Utiliza-se então dados empíricos para estimar o fator de atrito, o qual depende não só do número de Reynolds, mas da rugosidade relativa da tubulação.

$$f = f\,(\mathbf{Re}, \varepsilon / D)$$

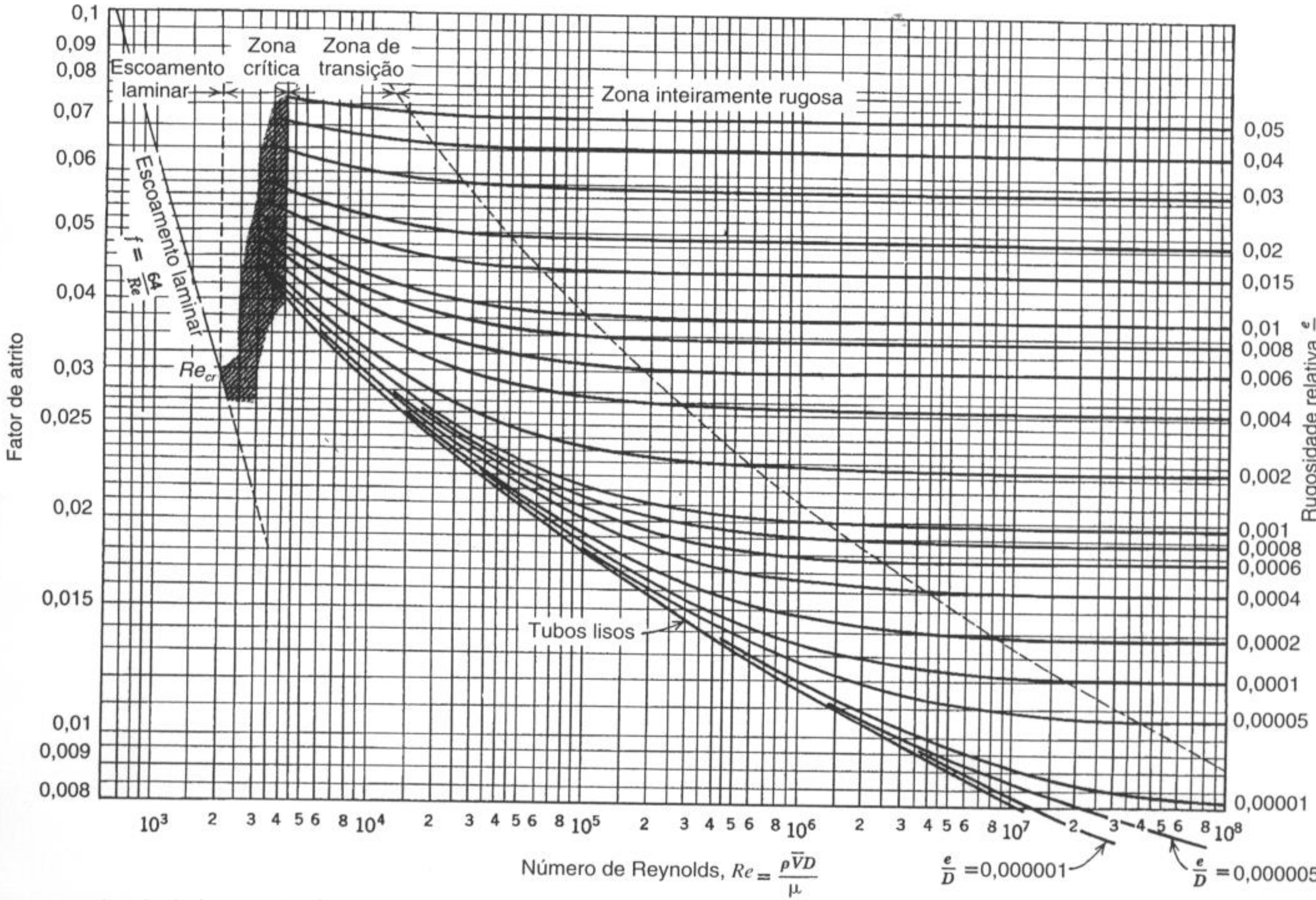
❑O fator de atrito nada mais é do que uma queda de pressão adimensional ou tensão cisalhante na parede adimensional

$$f = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x} D}{\frac{1}{2} \rho \overline{u_m}^2} = \frac{4 \tau_s}{\frac{1}{2} \rho \overline{u_m}^2}$$

A **rugosidade** relativa depende do material da tubulação e do diâmetro da mesma



O **fator de atrito** pode ser avaliado a partir do **diagrama de Moody**



- A representação gráfica é conveniente e facilita a determinação do fator de atrito, no entanto, quando desejamos utilizar de forma sistemática em um programa de computador por exemplo, é desejável, representar a informação do diagrama de Moody por uma correlação.

- A correlação mais utilizada é a fórmula de Colebrook

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2,0 \ \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{\mathrm{Re} \ f^{0,5}} \right)$$

- A correlação de Colebrook é uma equação transcendental, isto é, não é possível explicitar o valor do fator de atrito. É necessário resolver de forma iterativa. Miller recomenda como estimativa inicial para o processo iterativo, a seguinte expressão

$$f_o = 0,25 \left[\log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{5,74}{\mathrm{Re}^{0,9}} \right) \right]^{-2}$$

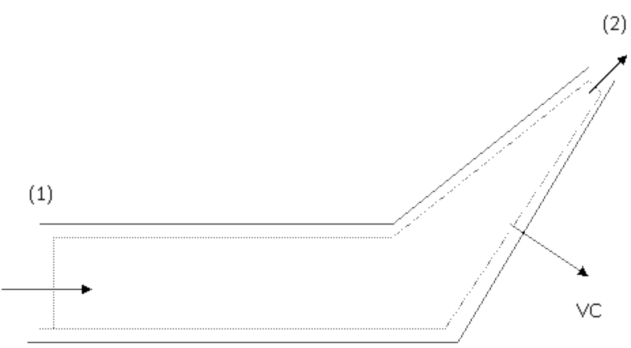
- Com essa inicialização, obtém-se um resultado dentro de 1% com apenas uma iteração.

Perda de Carga

- A perda de carga de um escoamento em uma tubulação, está associada com a perda de energia do escoamento, isto é, a conversão irreversível de energia mecânica em energia térmica. Podemos utilizar a equação da energia para avaliar a perda de carga

$$\dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_t - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho\, \vec{V} \bullet \vec{n}\, d\, A$$

$$e = i + \frac{V^2}{2} + gz$$



Hipóteses:

1. Propriedades constantes (ρ=cte, μ=cte)
2. Regime permanente $\Rightarrow \partial / \partial t = 0$
3. não existe outras formas de trabalho $\dot{W}_{outros} = 0$
4. o volume de controle é coincidente com fronteiras sólidas e perpendicular às fronteiras onde existe fluxo de massa, logo não existe contribuição do trabalho viscoso: $\dot{W}_{\mu} = 0$
5. pressão e energia interna uniformes na seção transversal

- Com essas hipóteses a equação da energia se reduz a

$$\dot{Q} - \dot{W}_e = \dot{m}\left(i_2 - i_1\right) + \dot{m}\left[\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right] + \dot{m}\, g\,\mathbf{(}z_2 - z_1\mathbf{)} +$$

$$+ \int_{A_2} \frac{V_2^2}{2} \rho V_2\, dA_2 - \int_{A_1} \frac{V_1^2}{2} \rho V_1\, dA_1$$

- Vimos que o perfil de velocidade não é uniforme na seção transversal, e que a forma do perfil depende do regime de escoamento, se é laminar ou turbulento. Podemos substituir o perfil de velocidade adequado e fazer a integral. O resultado pode ser representado por

$$\int_0^R \rho \frac{V^3}{2}\, 2\, \pi\, r\, dr = \dot{m}\, \alpha \frac{\overline{V}^2}{2} \qquad \alpha = \frac{\int_0^R \rho\, V^3\, 2\, \pi\, r\, dr}{\dot{m}\, \overline{V}^2} \quad ; \qquad \dot{m} = \rho\, \overline{V}\, A$$

No caso de regime laminar, onde $V = \frac{\bar{V}}{2}\left[1-\frac{r^2}{R^2}\right]$, α= 2,0

Já para regime turbulento, onde $\bar{u} = \frac{\bar{V}}{2\; n^2 /[(n+1)\;(2n+1)]}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n}$,

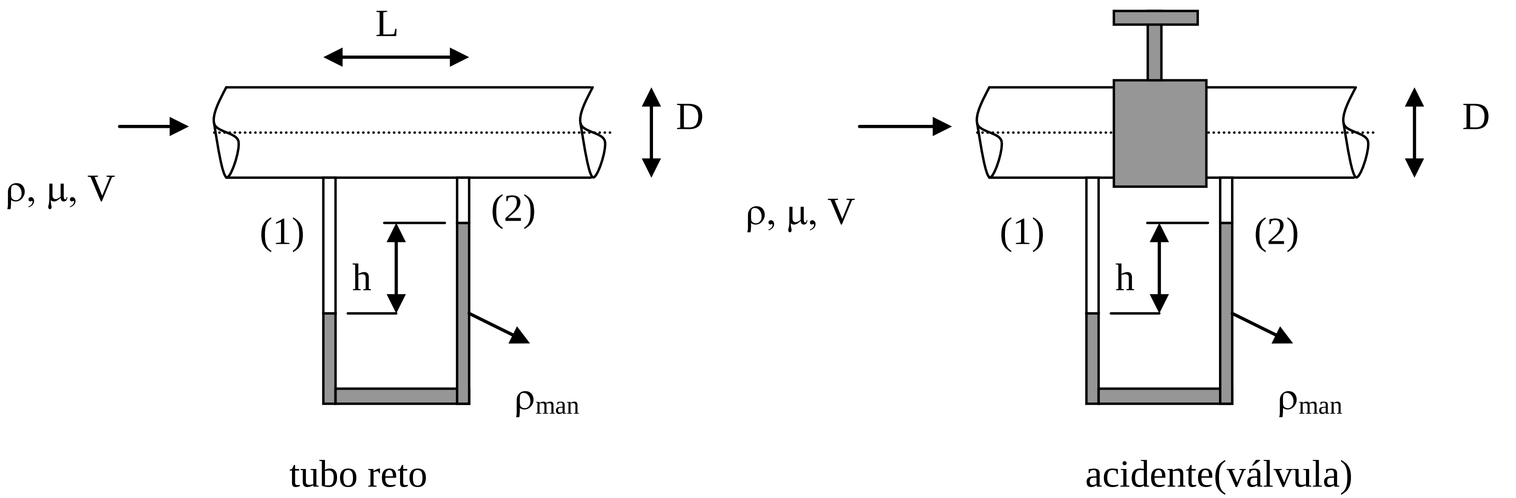
$$\alpha = \left\{\frac{(n+1)\;(2n+1)}{2\; n^2}\right\}^3 \frac{2\; n^2}{(n+3)\;(2n+3)]}$$

Reescrevendo a equação da energia, temos

$$\frac{-\dot{W}_e}{\dot{m}\; g} = \left[\frac{p_2}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}\right] + (z_2 - z_1) + \left[\frac{V_2^2}{2\; g}-\frac{V_1^2}{2\; g}\right] + \underbrace{\left\{\frac{1}{g}\left[(i_2 - i_1) - \frac{\delta Q}{dm}\right]\right\}}_{h_{L_{12}}}$$

Na equação acima γ é o peso específico, $\gamma = \rho\, g$. O último termo, $h_{L_{12}}$ é a perda de carga entre as seções (1) e (2) e possui unidade de comprimento.

A perda de carga pode ser facilmente medida em laboratório através da medida da diferença de pressão entre duas seções com o mesmo diâmetro, logo mesma velocidade, na mesma cota de altura e sem trabalho de eixo



$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_{L_{12}}$$

No caso de tubulações, sabendo da definição de fator de atrito *f*, podemos relacioná-lo com o termo de perda de carga

$$f = \frac{-\dfrac{\partial p}{\partial x} D}{\dfrac{1}{2} \rho V^2} = \frac{-\dfrac{p_2 - p_1}{L} D}{\dfrac{1}{2} \rho V^2} = \frac{h_{L_{12}} \dfrac{D}{L}}{\dfrac{V^2}{2 g}} \qquad \boxed{h_{L_{12}} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2 g}}$$

No caso de acidentes, obstáculos, (válvulas, joelhos, etc), sabemos que

$$\frac{h_{L_{12}}}{\frac{V^2}{2}} = função(\mathrm{Re}, \ \mathrm{geometria})$$

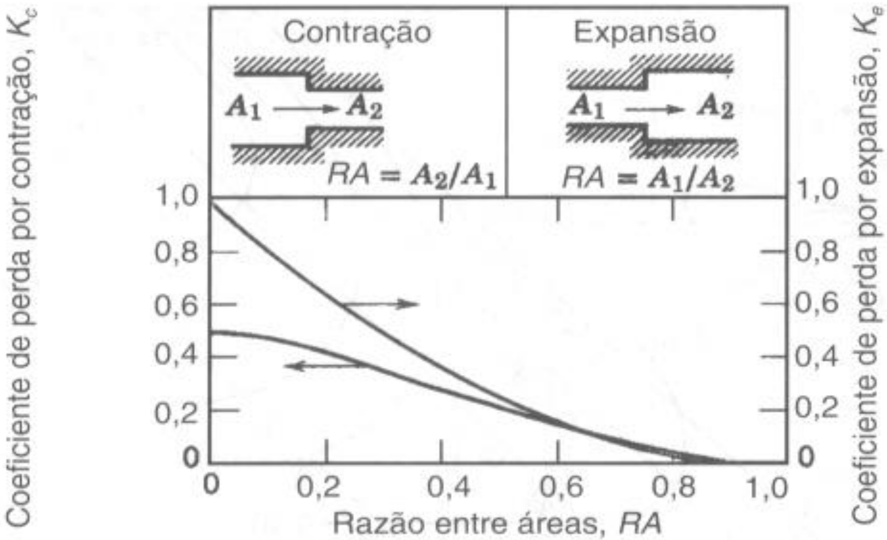
Podemos tabelar a perda de carga localizada de duas formas. A primeira utiliza uma expressão análoga a de tubulações, baseada no mesmo fator de atrito e velocidade médias. Tabela-se a perda de carga em função de um comprimento equivalente L_{eq}. Isto é, a perda de carga no obstáculo, é equivalente a perda de carga em uma tubulação de comprimento L_{eq}

$$\boxed{h_{L_{AC}} = f \ \frac{L_{eq}}{D} \ \frac{V^2}{2\ g}}$$

Podemos também tabelar a perda de carga de obstáculos, em função de uma constante adimensional, como

$$\boxed{h_{L_{AC}} = k \ \frac{V^2}{2\ g}}$$

Perdas de carga localizadas (acidentes):



$$h_{L_{AC}} = k \frac{V^2}{2\,g}$$

ou

$$h_{L_{AC}} = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{V^2}{2\,g}$$

Tipo de Acessório	Comprimento Equivalente[a] L_e/D
Válvulas (inteiramente abertas)	
Válvula de gaveta	8
Válvula globo	340
Válvula em ângulo	150
Válvula de esfera	3
Válvula de retenção: tipo globo	600
: tipo em ângulo	55
Válvula de pé com crivo: de disco móvel	420
: de disco articulado	75
Cotovelo padronizado: 90°	30
: 45°	16
Curva em U, configuração apertada	50
Tê padronizado: escoamento direto	20
: escoamento pelo ramal	60

Exercício 1: Deseja-se bombear água a 20 C [ρ = 1000 kg/m^3; μ = 0,001 Pa s] em um tubo circular liso. O diâmetro interno é D = 3 cm. A tubo possui L = 20 m de comprimento. Deseja-se uma vazão de $\dot{m}$ = 0,4 kg/s. Qual a potência de bombeamento necessária?

$$Pot = F\,V = \Delta P\,A\,V = \Delta P\,\dot{\forall}$$

$$f = \frac{\left(-\dfrac{dp}{dx}\right) D_h}{\dfrac{1}{2}\rho V_m^2} \Rightarrow \left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\Delta P}{L} = f\,\frac{1}{D}\,\frac{\rho V_m^2}{2}$$

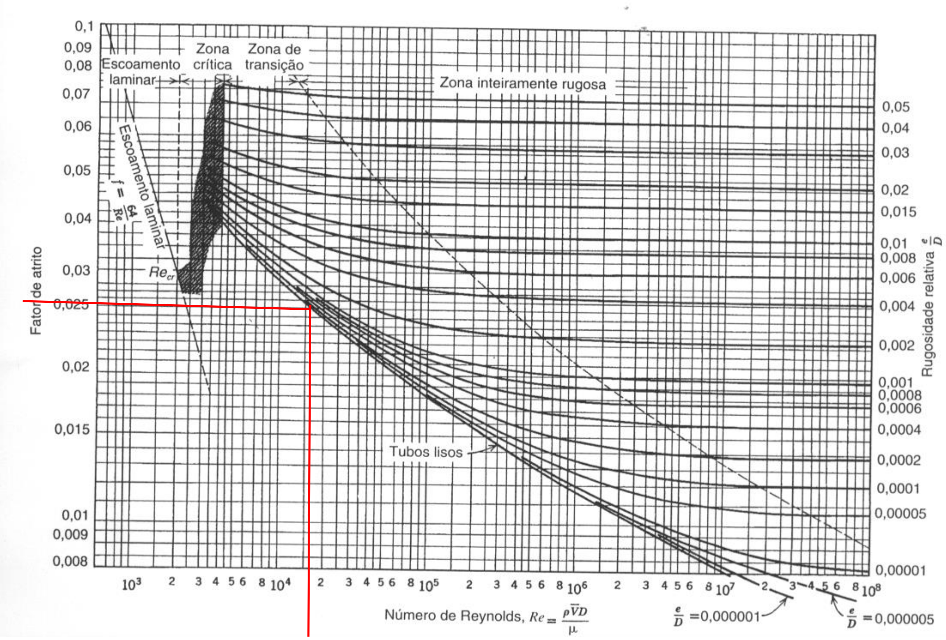
$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} = \frac{\dot{m}\,D}{A_t\,\mu} = \frac{4\,\dot{m}}{\pi\,D\,\mu} = 1{,}6\times 10^4 > 2300$$

$$\mathbf{Re} = 1{,}6\times 10^4 \Rightarrow f = 0{,}025$$

$$\dot{\forall} = \frac{\dot{m}}{\rho} = 4\times 10^{-4}\,\frac{m^3}{s}$$

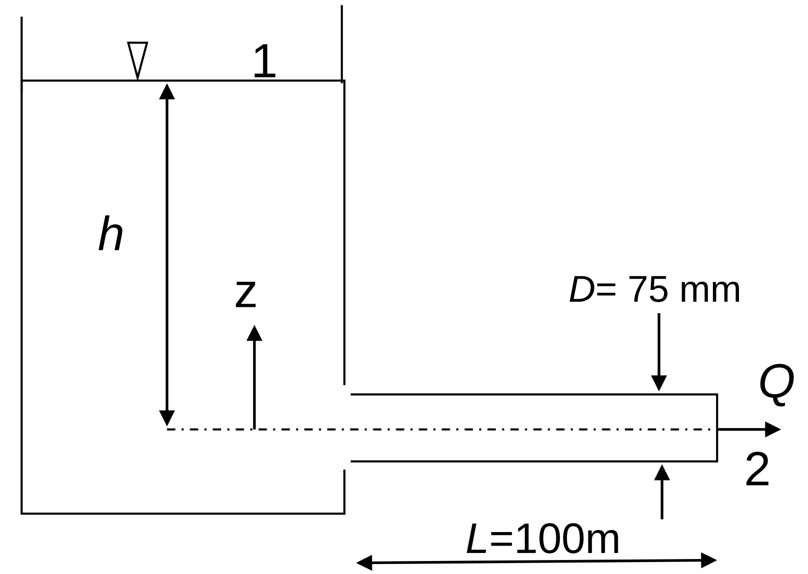
$$V_m = \frac{\dot{\forall}}{A_t} = \frac{4\,\dot{\forall}}{\pi\,D^2} = 0{,}566\; m/s$$

$$Pot = \Delta P\,\dot{\forall} = f\,\frac{L}{D}\frac{\rho\,V_m^2}{2}\,\dot{\forall} = 1{,}067 W$$



Exercício 2: Determine o nível *h* do reservatório para manter a vazão indicada:

- Tubulação lisa: $\varepsilon=0$
- Q= 0,03 m^3/s
- D = 75 mm
- Entrada do tubo: k = 0,5
- Saída: p_{atm}
- Viscosidade: $\mu = 10^{-3}$ kg/(ms)
- Massa específica: $\rho = 10^3$ kg/m^3



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\, \vec{V}\bullet\vec{n}\, dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \;\; ; \rho = cte \;\; ; \;\; Q=V_1 A_1 = V_2 A_2 \;\; ; \;\; V_1 = V_2\frac{A_2}{A_1}\approx 0 \;\; ; \;\; V_2=\frac{Q}{A_2}=6{,}79\frac{m}{s}$$

$$-\cancel{\frac{\dot{W}_e}{\dot{m}\, g}} = \left[\cancel{\frac{p_2}{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2}\right] - \left[\cancel{\frac{p_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1\right] + h_{L_{1,2}}$$

$$h_{L_{tubo}} = f\frac{L}{D}\frac{V_m^2}{2g} \qquad \dot{W}_e = 0 \qquad p_2 = p_1 = P_{atm}$$

$$z_2 = 0 \;\; ; \;\; z_1 = h$$

$$h_{L_{AC}} = k\frac{V_m^2}{2g} \qquad h_{L_{1,2}} = h_{L_{tubo}} + h_{L_{entrada}}$$

$$h = \frac{V_2^2}{2g} + h_{L_{1,2}} = \frac{V_2^2}{2g}\left(1+k+f\frac{L}{D}\right)$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} = 5{,}09\times 10^5 > 2300$$

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0\log\left[\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\, f^{0,5}}\right]$$

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0\ \log\left[\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\ f^{0,5}}\right]$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} = 5{,}09 \times 10^5 \quad ; \quad \varepsilon = 0 \qquad \frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0\ \mathbf{log}\left[\frac{2{,}51}{509000\ f^{0,5}}\right]$$

•estimativa inicial de Miller

$$f_o = 0{,}25\left[\log\left(\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7} + \frac{5{,}74}{\mathrm{Re}^{0,9}}\right)\right]^{-2} \qquad f_o = 0{,}25\left[\mathbf{log}\left(\frac{5{,}74}{509000^{0,9}}\right)\right]^{-2} = 0{,}01305$$

•segunda iteração:

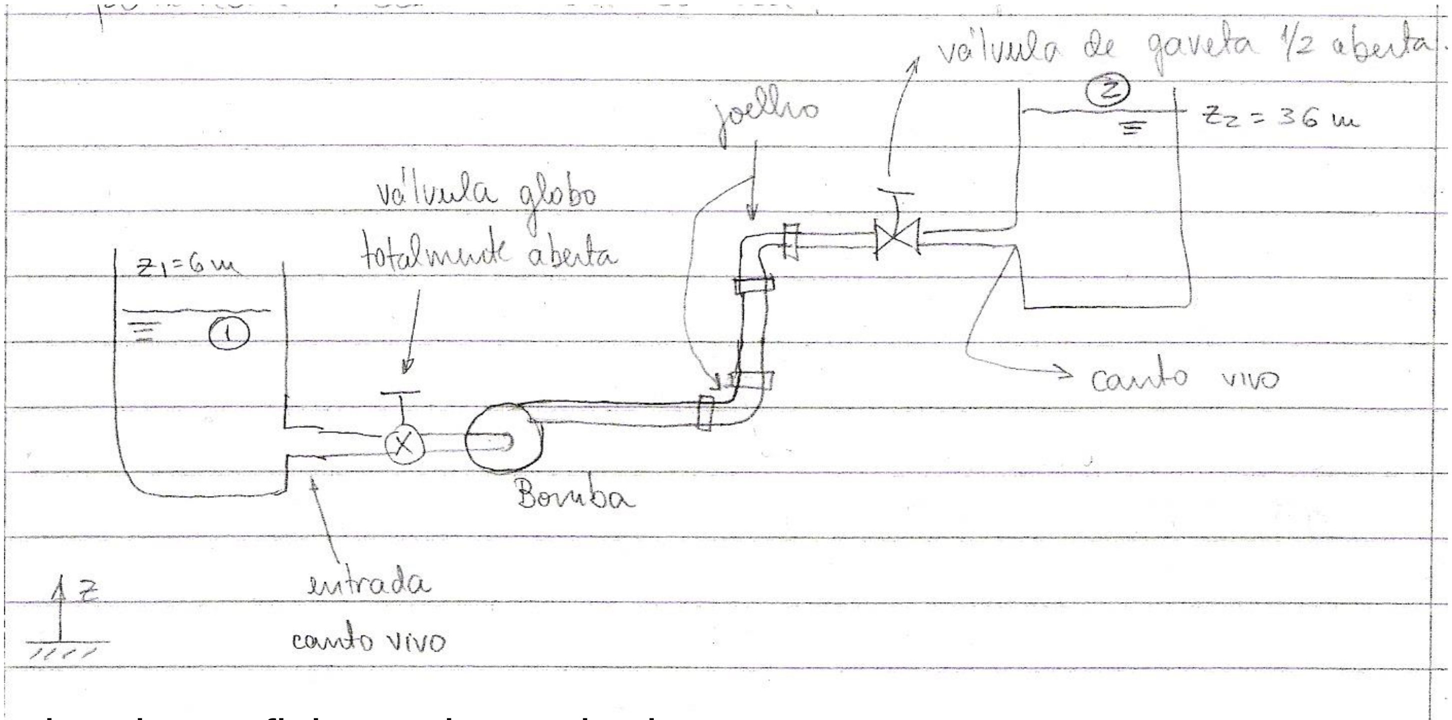
$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0\ \mathbf{log}\left[\frac{2{,}51}{509000 \times 0{,}01305^{0,5}}\right] \Rightarrow f = 0{,}01312$$

•terceira iteração:

$$\frac{1}{f^{0,5}} = -2{,}0\ \mathbf{log}\left[\frac{2{,}51}{509000 \times 0{,}01312^{0,5}}\right] \Rightarrow f = 0{,}01311 \quad \textit{convergiu}$$

$$h = \frac{V_2^2}{2\,g} + h_{L_{1,2}} = \frac{V_2^2}{2\,g}\left(1 + k + f\,\frac{L}{D}\right) = \frac{6{,}79^2}{2 \times 9{,}81}\left(1 + 0{,}5 + 0{,}01311\,\frac{100}{0{,}075}\right) = 44{,}6\ m$$

Exercício 3: Água com ρ = 1000 kg/m3 e $\nu=\mu/\rho$ = 1 x 10^{-6} m^2/s é bombeada entre dois reservatórios com a vazão Q = 5,6 x 10^{-3} m^3/s através de uma tubulação de L=120 m e D= 50 mm de diâmetro. A rugosidade relativa do tubo é ε / D=0,001. Calcule a potência necessária da bomba.



<u>Dados de coeficiente de perda de carga:</u>

•Entrada canto vivo: k=0,5

•Saída canto vivo: k=1,0

•Válvula globo aberta: k=1,0

•Joelho a 90º: k=0,9

•Válvula de gaveta ½ aberta: k=0,1

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\, \vec{V}\bullet\vec{n}\, dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \;;\; \rho = cte \;;\; Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V_t A_t \;;\; V_t = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2{,}85\frac{m}{s} \;;\; V_1 = V_2 \approx 0$$

$$\dot m = \rho\, Q$$

$$-\frac{\dot W_e}{\dot m\, g} = \left[\cancel{\frac{p_2}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2\right] - \left[\cancel{\frac{p_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1\right] + h_{L_{1,2}}$$

$$p_2 = p_1 = P_{atm} \;;\; z_1 = 6\,m \;;\; z_2 = 36\,m \;;\; z_2 - z_1 = H = 30m$$

$$h_{L_{1,2}} = h_{L_{tubo}} + \sum h_{L_{AC}} = f\,\frac{L}{D}\frac{V_t^2}{2\,g} + \sum k_{ac}\frac{V_t^2}{2\,g}$$

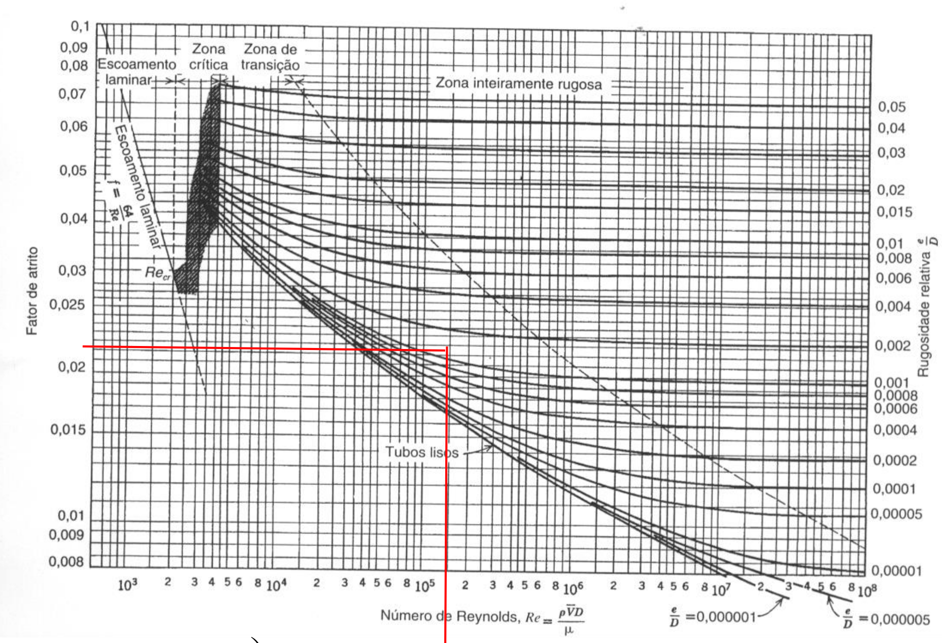
$$-\dot W_e = \rho\, Q\, g\left(H + h_{L_{1,2}}\right) = \rho\, Q\, g\left(H + \left[f\,\frac{L}{D} + \sum k_{ac}\right]\frac{V_t^2}{2\,g}\right)$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_t D}{\mu} = 1{,}41\times 10^5$$

$$\varepsilon / D = 0.001$$

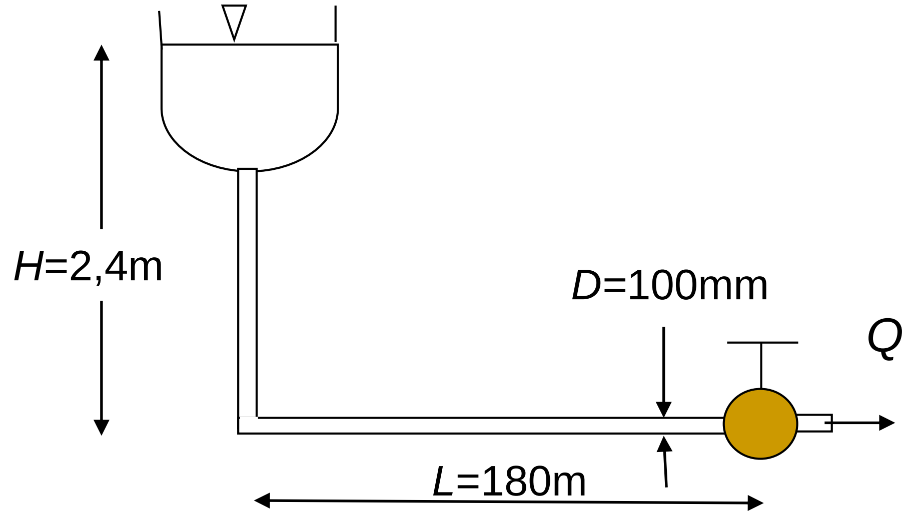
$$\Rightarrow f = 0{,}021$$

Bomba: trabalho é fornecido: <0



$$\dot W_b = -\dot W_e = 10^3 \times 5{,}6\times 10^{-3}\left(30 + \left[0{,}01\frac{120}{0{,}075} + 0{,}5 + 1{,}0 + 1{,}0 + 2\times 0{,}9 + 0{,}1\right]\frac{2{,}85^2}{2}\right) = 654\, W = 0{,}87\, HP$$

Exercício 4: Considere a instalação da figura ao lado. O tubo possui uma rugosidade relativa de ε/D = 0,001 e possui um diâmetro D= 100 mm. Determinar a vazão máxima da instalação. Considerar as perdas localizadas somente na válvula de gaveta.



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\,\vec{V}\bullet\vec{n}\,dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \quad ;\rho = cte \quad ; \quad Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad ; \quad V_1 = V_2\frac{A_2}{A_1}\approx 0$$

$$-\cancel{\frac{\dot{W}_e}{\dot{m}\, g}} = \left[\cancel{\frac{p_2}{\rho\, g}} + \frac{V_2^2}{2\, g} + \cancel{z_2}\right] - \left[\cancel{\frac{p_1}{\rho\, g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2\, g}} + z_1\right] + h_{L_{1,2}}$$

$$h_{L_{tubo}} = f\frac{L}{D}\frac{V_m^2}{2g} \qquad \dot{W}_e = 0 \qquad p_2 = p_1 = P_{atm}$$

$$z_2 = 0 \quad ; \quad z_1 = H$$

$$h_{L_{AC}} = f\frac{L_{eq}}{D}\frac{V_m^2}{2g} \qquad h_{L_{1,2}} = h_{L_{tubo}} + h_{L_{valvula}}$$

$$H = \frac{V_2^2}{2\,g} + h_{L_{1,2}} = \frac{V_2^2}{2\,g}\left(1 + f\frac{L + L_{eq}}{D}\right) \qquad V_2 = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{\left(1 + f\frac{L+L_{eq}}{D}\right)}}$$

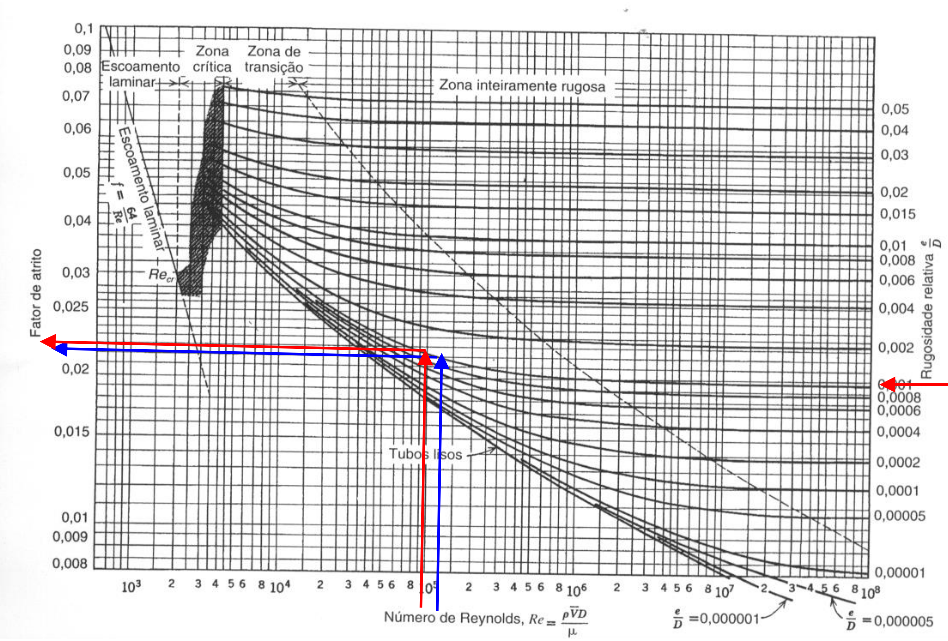
$$\frac{1}{f^{\,0,5}} = -2{,}0\,\log\left[\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\; f^{\,0,5}}\right]$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu}$$

Não conhece a vazão, não tem como calcular o Reynolds, para determinar f

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{(1+f\dfrac{L+L_{eq}}{D})}}$$

Tipo de Acessório	Comprimento Equivalente[a] L_e/D
Válvulas (inteiramente abertas	
Válvula de gaveta	8
Válvula globo	340



$$V_2 = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{(1+f\dfrac{L+L_{eq}}{D})}} = \sqrt{\frac{47{,}088}{1+f(\dfrac{180}{0{,}1}+8)}} == \sqrt{\frac{47{,}088}{1+f1808}}$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} = 10^5 V_m$$

Estimativa inicial: fluido ideal sem perda ou um valor de f típico (0,02):

$$f = 0{,}02 \rightarrow V_2 = 1{,}26 m/s$$

$$\mathbf{Re} = 1{,}26 \times 10^5$$

2ª estimativa inicial: $\mathbf{Re} = 1{,}26 \times 10^5$ $\quad f = 0{,}022 \rightarrow V_2 = 1{,}075 m/s$ $\quad \mathbf{Re} = 1{,}075 \times 10^5$

3ª estimativa inicial: $\mathbf{Re} = 1{,}075 \times 10^5$ $\quad f = 0{,}023 \rightarrow V_2 = 1{,}052 m/s$ $\quad$ convergiu