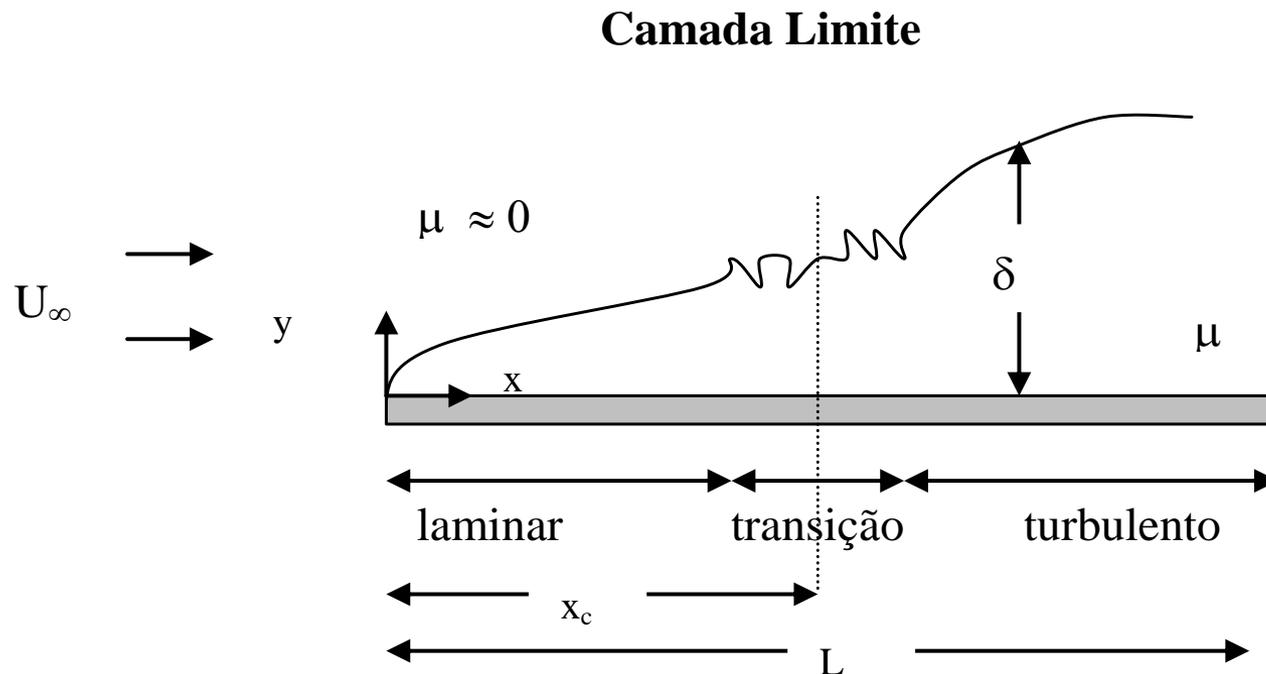


# ESCOAMENTO EXTERNO

- Analisando escoamentos externos, observa-se gradientes acentuados de velocidade, somente em uma região muito próxima as superfícies sólidas. Esta região é chamada de região da *camada limite*. Fora dessa região, pode-se aplicar a equação de Euler.

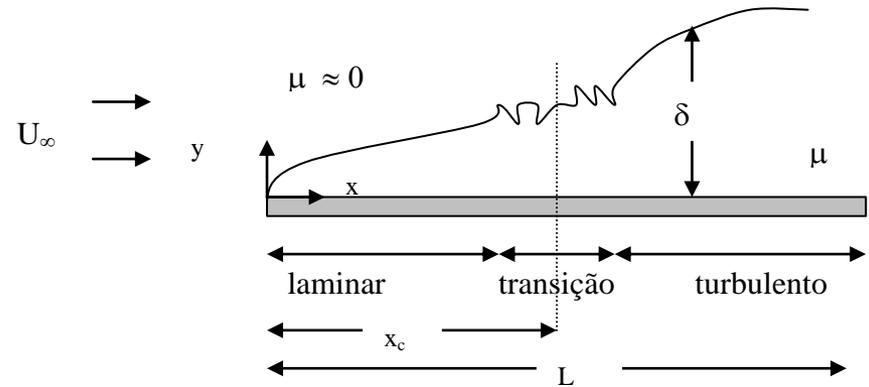


□  $\delta =$  **espessura da camada limite**, região próxima à superfície sólida, onde a velocidade varia de zero a  $0,99 U_\infty$

Como o regime de escoamento varia ao longo da superfície, define-se então

**número de Reynolds local:**

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$$



O número de Reynolds reinante na coordenada onde ocorre a transição de regime laminar para turbulento é chamado de **número de Reynolds crítico:**

$$Re_c = \frac{\rho U_\infty x_c}{\mu}$$

Se  $Re_x \leq Re_c$  regime laminar  
Se  $Re_x > Re_c$  regime turbulento

Como já visto, em geral, considera-se o número de Reynolds crítico como

$$Re_c = 5 \times 10^5$$

# EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE

- Em 1904, Prandtl simplificou as equações de Navier-Stokes, através de uma análise de ordem de grandeza, derivando as equações da *camada limite*

## Hipóteses:

1. Fluido Newtoniano  $\Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$
2. Propriedades constantes  $\Rightarrow \rho$  e  $\mu$  constantes
3. Regime laminar
4. Regime permanente  $\Rightarrow \partial/\partial t=0$
5. Bi-dimensional  $\Rightarrow w=0$  ;  $\partial/\partial z=0$
6.  $\delta \ll L$

• Vamos fazer uma análise de ordem de grandeza. Sabemos que a ordem de grandeza de:

•  $u$  é  $U_\infty$  ;      •  $x$  é  $L$  ;      •  $y$  é  $\delta$

• **Continuidade:**  $\rho = \text{cte} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U_\infty}{L}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{V_\infty}{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{zero}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_\infty = \frac{\delta}{L} U_\infty \quad \text{logo } \boxed{v \lll u}$$

- **Quantidade de movimento linear**

- **direção x**

Eq. (I)

$$\left( \underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{zero(4)}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L}} + \underbrace{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\rho U_\infty \frac{\delta U_\infty}{L \delta}} + \underbrace{\rho w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{zero(5)}} \right) = \underbrace{\rho g_x}_{\text{zero}} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{U_\infty}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{U_\infty}{\delta^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{zero}} \right)$$

Analisando a equação acima, pode-se concluir que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0$

$$\rho U_\infty \frac{U_\infty}{x} \approx \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \delta \cong \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} \Rightarrow \text{Variação da espessura ao longo da superfície como esperado: } \delta \approx x^{0,5}$$

$$\frac{\delta}{x} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty x}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} \cong \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

- direção y

(II)

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{zero}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}}_{\rho U_{\infty} \frac{\delta U_{\infty}}{L}} + \underbrace{\rho v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\rho U_{\infty} \frac{\delta U_{\infty} \delta / L}{\delta}} + \underbrace{\rho w \frac{\partial v}{\partial z}}_{\text{zero}} =$$

$$- \rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\frac{U_{\infty} \delta / L}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\frac{U_{\infty} \delta / L}{\delta^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{\text{zero}} \right)$$

Analisando a equação acima, pode-se concluir novamente que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0$$

Observa-se também que os termos convectivos e viscosos da equação (II) são muito menores do que estes termos da equação (I), isto é

$$\text{eq (II)} \approx \frac{\delta}{L} \text{ eq(I)} \quad \text{isto é} \quad \text{eq v} \ll \text{eq. u}$$

$$\text{logo} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx -\rho g \quad \Rightarrow \quad p \approx -\rho g y + C \quad \text{onde } y_{\max} = \delta$$

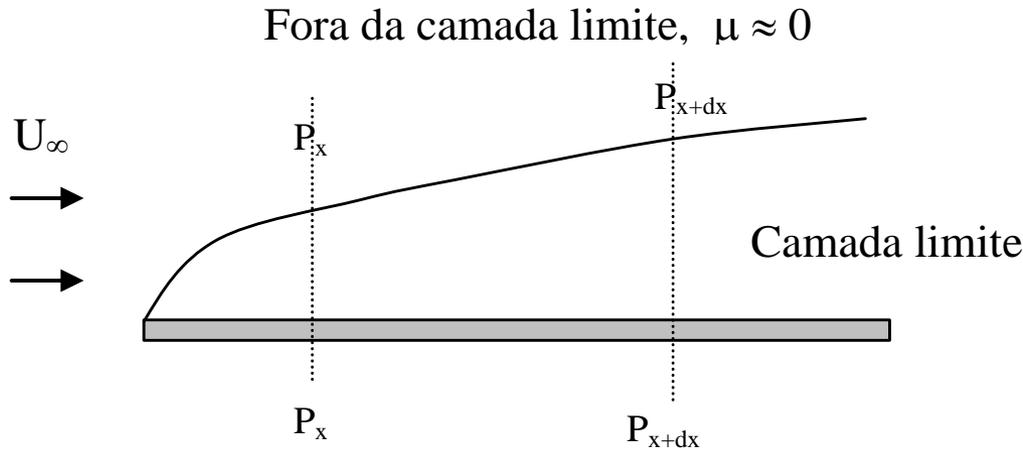
A pressão só varia devido ao peso da coluna de fluido, pode-se então introduzir a seguinte aproximação

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} \approx \text{zero}}$$

Esta conclusão é muito conveniente, pois se a pressão não varia com  $y$ , então para uma determinada coordenada  $x$ , a pressão dentro da camada limite é igual a pressão fora da camada limite

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \text{zero}$$

Esta conclusão é muito conveniente, pois se a pressão não varia com  $y$ , então para uma determinada coordenada  $x$ , a pressão dentro da camada limite é igual a pressão fora da camada limite



$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{\text{dentro CL}} \approx \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{\text{fora CL}}$$

Fora da camada limite, a **equação de Bernoulli** (para fluidos não viscosos) é válida

$$p + \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} = \text{cte} \quad \text{logo} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_{\infty} \frac{d U_{\infty}}{d x} \right]$$

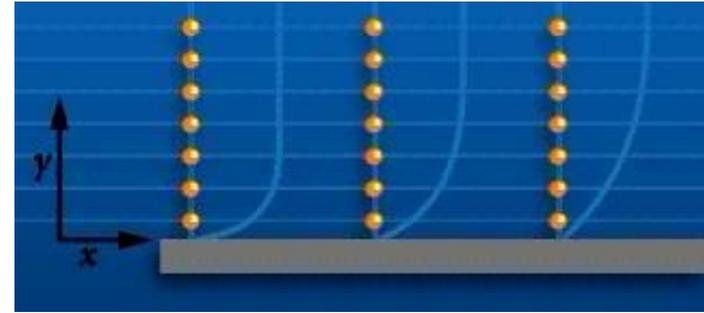
# Equações da Camada Limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_{\infty} \frac{d U_{\infty}}{d x}$$

➤ Observa-se que o perfil de velocidade é similar, isto é, o perfil de velocidade adimensional é o mesmo em qualquer coordenada  $x$ .



$$\frac{u}{U_\infty} = \text{função}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Vimos que

$$\delta \cong \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

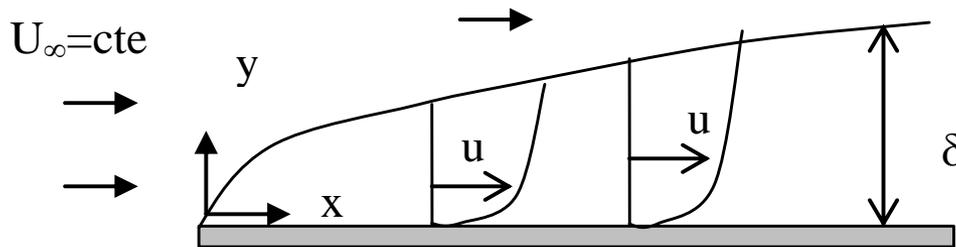
$$\eta \approx \frac{y}{\delta}$$

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$\eta = \frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}$$

- Apesar da grande simplificação obtida, ainda temos algumas dificuldades para resolver esta equação.
- A solução das equações da camada limite pode ser obtida através da integração das equações de conservação na região da camada limite. Pode-se utilizar
  - Um procedimento rigoroso associado a um método numérico. Solução “exata” de Blasius
  - Uma análise aproximada, onde as equações de conservação são integradas na região da camada limite.

# A solução “exata” para uma placa plana obtida por Blasius em 1908.



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Condições de contorno:

1.  $x = 0 \quad \rightarrow \quad u = U_\infty$
2.  $y = 0 \quad \rightarrow \quad u = v = 0$
3.  $y \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad u = U_\infty \quad (y = \delta \quad \rightarrow \quad u = 0,99 U_\infty)$

- Inicialmente, a função de corrente será utilizada, para eliminarmos uma equação, pois a continuidade fica automaticamente satisfeita

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

- Substituindo na equação de quantidade de movimento obtém-se uma única equação diferencial parcial de 3ª ordem

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Observa-se que o perfil de velocidade é similar, isto é, o perfil de velocidade adimensional é o mesmo em qualquer coordenada  $x$ . Propõe-se uma mudança de variáveis, visando transformar a equação acima numa equação diferencial ordinária.

$$\frac{u}{U_\infty} = \text{função} \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad \text{sendo} \quad \delta \cong \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\text{Define-se} \quad \eta \approx \frac{y}{\delta} \quad \text{então} \quad \eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$\text{A função de corrente é adimensionalizada com} \quad f = \frac{\psi}{v \sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\text{Introduzindo as variáveis} \quad \eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x} \quad \text{e} \quad f = \frac{\psi}{v \sqrt{\text{Re}_x}}$$

na equação de quantidade de movimento, obtêm-se

$$\boxed{2 \frac{d^3 f}{d \eta^3} + f \frac{d^2 f}{d \eta^2} = 0} \quad (*)$$

Para especificar as condições de contorno para essa equação, deve-se relacionar os componentes de velocidade  $u$  e  $v$  com  $f$  e  $\eta$ .

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x} \quad \psi = f v \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \bigg|_x \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( v \sqrt{\text{Re}_x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x} = U_\infty f' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u}{U_\infty} = f'}$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \bigg|_\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \bigg|_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \\ &= -\left[ f v \sqrt{\frac{U_\infty}{v}} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} + \left( v \sqrt{\text{Re}_x} \frac{df}{d\eta} \right) y \sqrt{\frac{U_\infty}{v}} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^{3/2}} \right] = \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{U_\infty}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left[ \eta \frac{df}{d\eta} - f \right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{v}{U_\infty / \sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1}{2} \left[ \eta f' - f \right]}$$

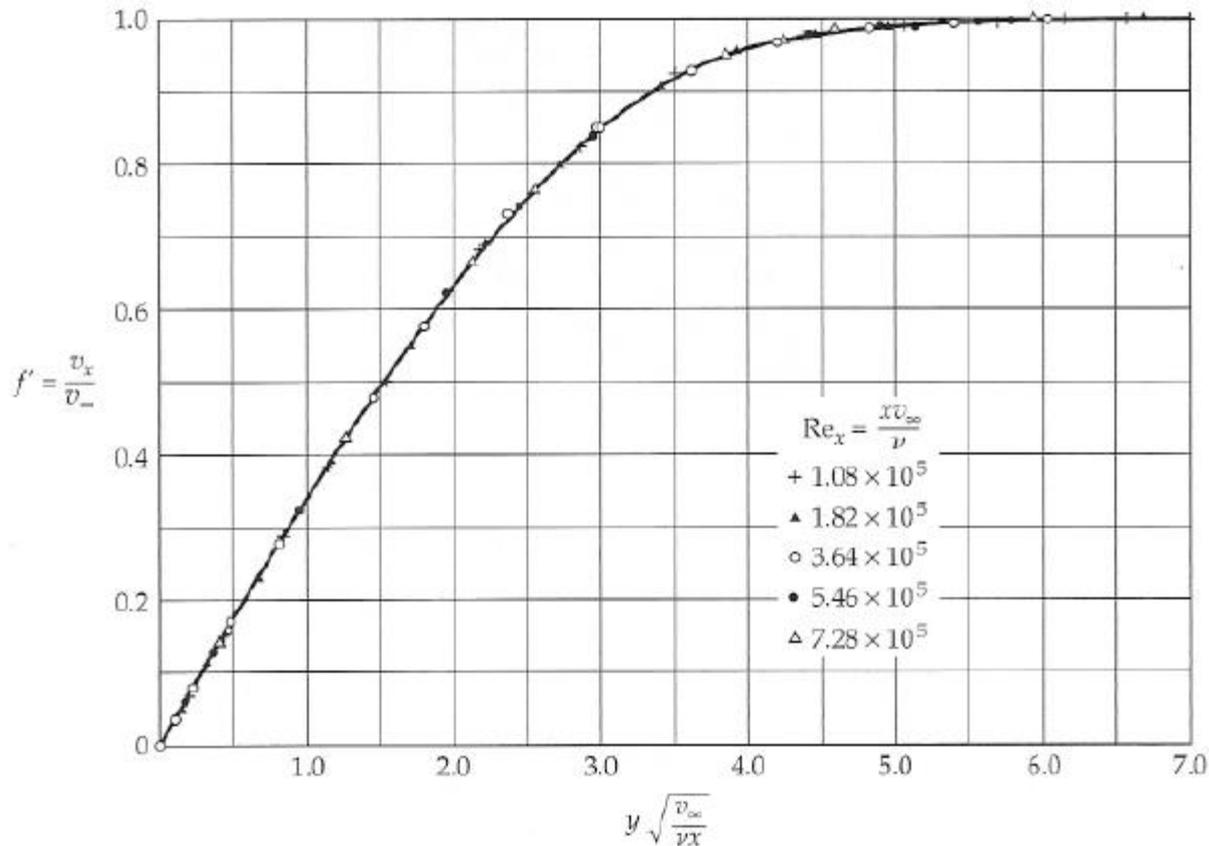
A equação pode ser resolvida por um método numérico de integração de equações diferenciais ordinárias, como por exemplo, o método de Runge-Kutta.

**Quadro 9.1** A Função  $f(\eta)$  para a Camada-limite Laminar ao Longo de uma Placa Plana a Incidência Zero

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$
0	0	0	0,3321
0,5	0,0415	0,1659	0,3309
1,0	0,1656	0,3298	0,3230
1,5	0,3701	0,4868	0,3026
2,0	0,6500	0,6298	0,2668
2,5	0,9963	0,7513	0,2174
3,0	1,3968	0,8460	0,1614
3,5	1,8377	0,9130	0,1078
4,0	2,3057	0,9555	0,0642
4,5	2,7901	0,9795	0,0340
5,0	3,2833	0,9915	0,0159
5,5	3,7806	0,9969	0,0066
6,0	4,2796	0,9990	0,0024
6,5	4,7793	0,9997	0,0008
7,0	5,2792	0,9999	0,0002
7,5	5,7792	1,0000	0,0001
8,0	6,2792	1,0000	0,0000

$$\frac{v}{U_\infty / \sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1}{2} \left[ \eta f'' - f \right]$$

- Note que  $f'$  corresponde a velocidade axial adimensional.
- Observa-se excelente concordância com dados experimentais para uma grande faixa de número de Reynolds



- Outros resultados importantes a serem obtidos da tabela, são: tensão cisalhante na parede e determinação da espessura da camada limite.

## Espessura da Camada Limite

A espessura da camada limite é definida como a coordenada  $y$  onde  $u = 0,99 U_\infty$ .

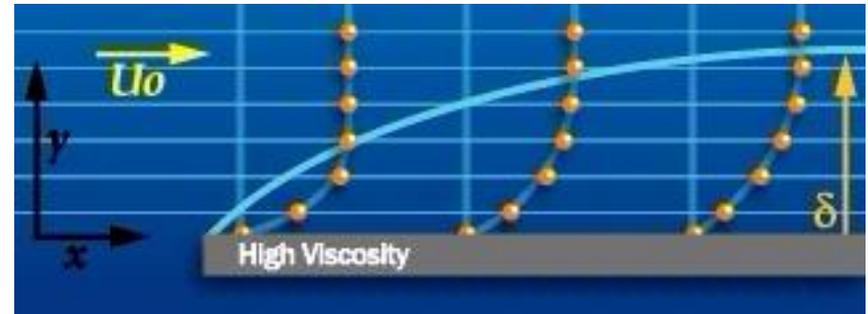
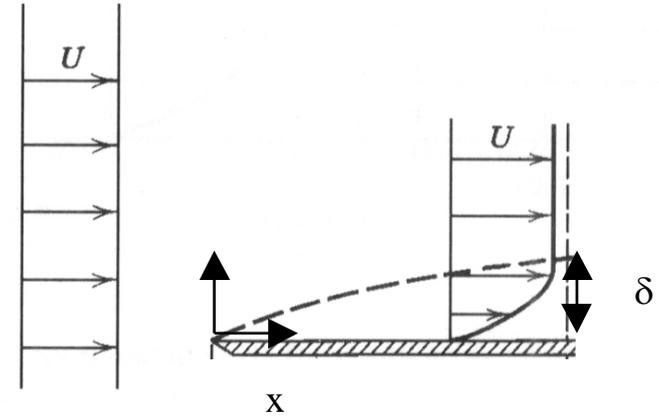
Pela tabela vemos que  $f'' = u/U_\infty = 0,99$  quando  $\eta = 5$ , logo sabendo que

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{Re_x} \quad \rightarrow \quad 5 = \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_x}$$

$$\delta = \frac{5 x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta \approx x^{0,5}$$

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$$



□ A figura ilustra o perfil dos componentes  $u$  e  $v$  adimensionais em função de  $\eta$

$$\frac{u}{U_\infty} = f'$$

$$\frac{v}{U_\infty / \sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1}{2} \left[ \eta f' - f \right]$$

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$$

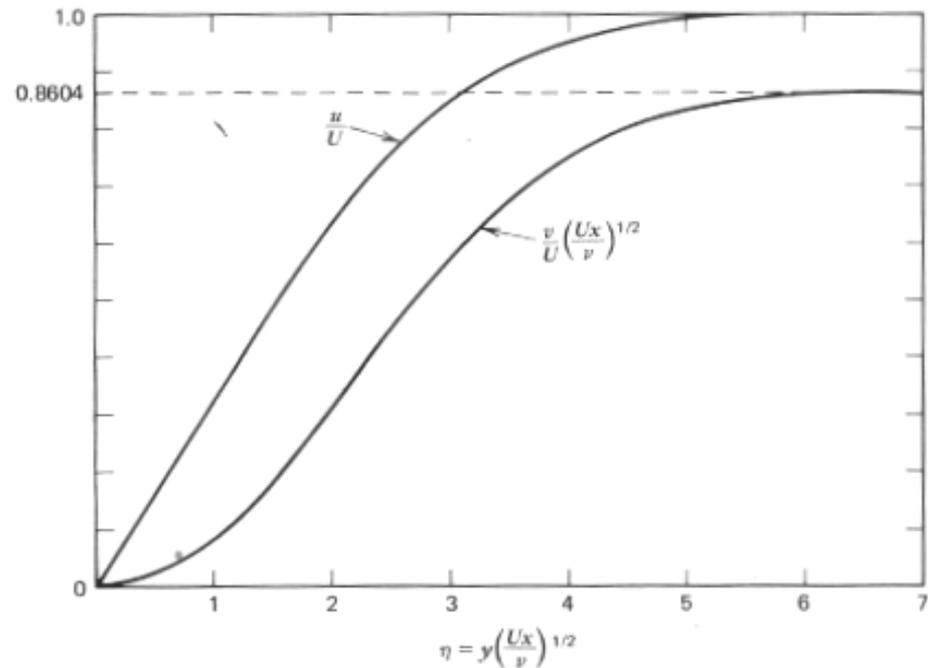


Figure 7-2 Velocity profiles in a laminar boundary layer on a flat plate.

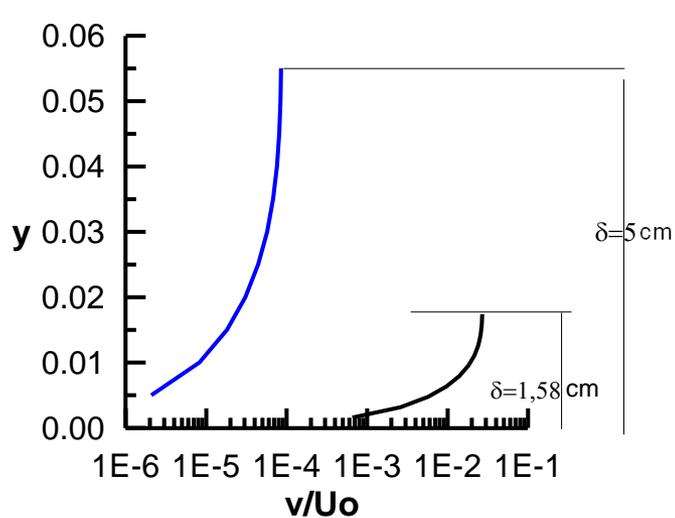
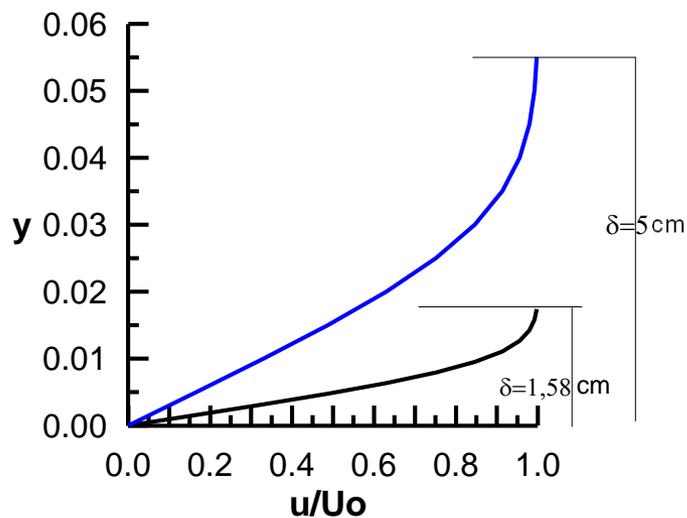
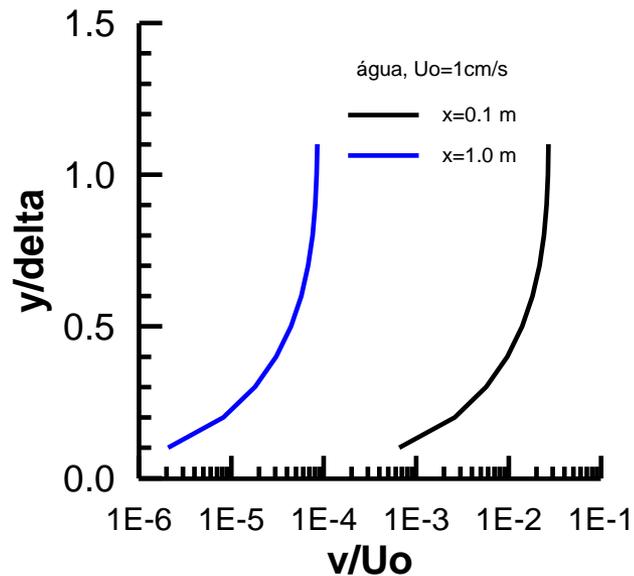
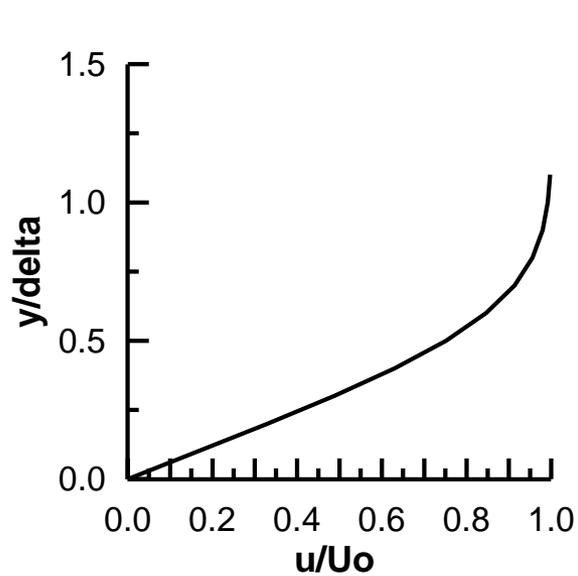
□ Note que existe fluxo de massa através da linha que delimita a região da camada limite, o componente vertical da velocidade em  $y = \delta$  é

$$\square \eta = 5,0 \quad \rightarrow \quad f' = 0,9915 \quad \text{e} \quad f = 3,2833 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{U_\infty / \sqrt{\text{Re}_x}} = 0,837$$

Para água [ $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu=0.001 \text{ kg/(ms)}$ ] com velocidade  $U_0=1 \text{ cm/s}$

$x=0,1 \text{ m}$  ;  $Re_x=10^3$  ;  $\delta= 1,58 \text{ cm}$

$x=1 \text{ m}$  ;  $Re_x=10^4$  ;  $\delta= 5 \text{ cm}$



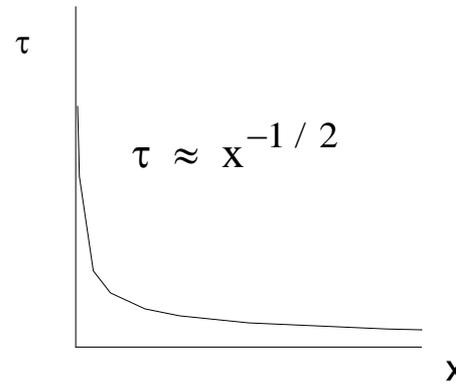
## Tensão Cisalhante ao Longo da Placa

A tensão cisalhante na superfície é definida como  $\tau_s(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$

em termos nas novas coordenadas, podemos rescrever a tensão como

$$\tau_s(x) = \mu \frac{U_\infty}{x / \sqrt{\text{Re}_x}} \left. \frac{d f'}{d \eta} \right|_{\eta=0} = \rho U_\infty^2 \left( \frac{\mu}{\rho U_\infty x} \right)^{1/2} \underbrace{\left. \frac{d^2 f}{d \eta^2} \right|_{\eta=0}}_{0,332}$$

$$\tau_s(x) = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



**Coefficiente de Atrito Local:** tensão cisalhante adimensional  $C_f(x) = \frac{\tau_s(x)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$

Para placa plana no regime laminar ( $\text{Re}_x \leq \text{Re}_c$ )

$$C_f(x) = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

**Força total na placa**  $\rightarrow F = \overline{\tau_s} A_s = \int \tau_s(x) d A_s$

A tensão média é  $\overline{\tau_s} = \frac{1}{A_s} \int \tau_s(x) d A_s$  podendo ser obtida a partir do

coeficiente local de atrito  $\overline{\tau_s} = \frac{1}{A_s} \int C_f(x) \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 d A_s$

para  $U_\infty = \text{constante}$   $\overline{\tau_s} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \frac{1}{A_s} \int C_f(x) d A_s$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\tau_s}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{1}{A_s} \int C_f(x) d A_s \Rightarrow \overline{C_{fL}} = \frac{1}{A_s} \int C_f(x) d A_s$$

$$\overline{C_{fL}} = \frac{\overline{\tau_s}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \text{ é o } \mathbf{Coeficiente de Atrito Médio}$$

Para uma placa plana de comprimento L e largura b, a área superficial é  $A_s = b L$  e o elemento de área superficial é  $d A_s = b dx$ . O coeficiente de atrito médio neste caso é

$$\overline{C_{fL}} = \frac{1}{A_s} \int C_f(x) d A_s = \frac{1}{b L} \int_0^L \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} b dx \Rightarrow \boxed{\overline{C_{fL}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}}$$

## Perfil Aproximado de Velocidade

Como os resultados de Blasius encontram-se em forma de tabela, não são muito convenientes para estimar a velocidade. Pode-se, então utilizar um perfil aproximado.

Supõe-se que o perfil de velocidade é dado por uma função arbitrária, e os coeficientes desta função são determinados de forma a satisfazer as condições de contorno conhecidas para a velocidade.

Por exemplo: Vamos supor que para o **regime laminar** de escoamento o perfil de velocidade adimensional  $u/U_\infty$  pode ser dado por um perfil cúbico de  $\eta = y/\delta$

$$\frac{u}{U_\infty} = a + b \frac{y}{\delta} + c \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 + d \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

Devemos determinar as constantes a, b, c e d de tal forma que o perfil acima satisfaça as seguintes condições de contorno para a velocidade u

$$\frac{u}{U_\infty} = a + b \frac{y}{\delta} + c \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$1. \quad y = 0 \rightarrow u = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$2. \quad y = \delta \rightarrow u = U_\infty \quad \Rightarrow \quad 1 = b + c + d \quad (*)$$

$$3. \quad y = \delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \left[ \frac{b}{\delta} + \frac{2c}{\delta} \frac{y}{\delta} + \frac{3d}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] \Rightarrow b = -2c - 3d \quad (+)$$

$$4. \quad y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty \left[ \frac{2c}{\delta^2} + \frac{6d}{\delta^2} \frac{y}{\delta} \right] \Rightarrow c = 0$$

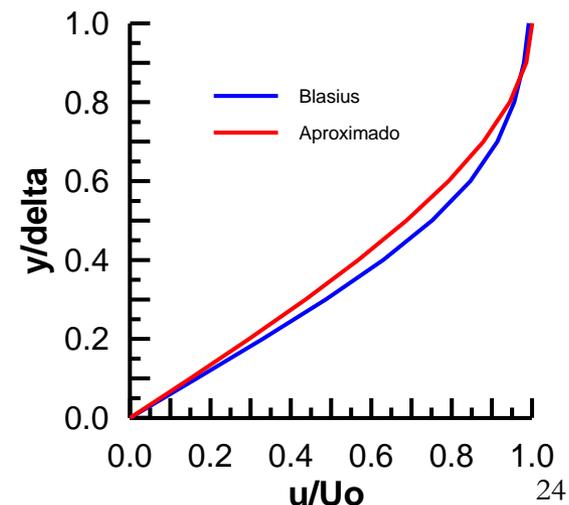
$$\left( \text{em } y = 0 \Rightarrow \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{zero}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{zero}} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Resolvendo as equações (\*) e (+), obtemos

$d = -1/2$  e  $b = 3/2$ , sendo o perfil aproximado

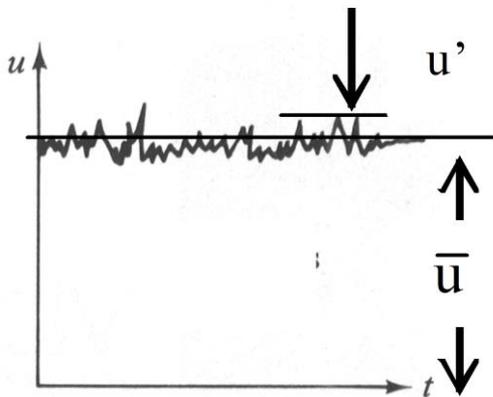
$$\boxed{\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3}$$

Perfil de Eckert



# ESCOAMENTO TURBULENTO

□ O escoamento turbulento é governado pelas mesmas equações que o escoamento laminar. No entanto, rigorosamente falando, este é sempre tridimensional e transiente.



Observa-se, no entanto, que o escoamento pode ser descrito por um valor médio  $\bar{u}$  e mais uma flutuação  $u'$  (muitas vezes da ordem de 1% de  $\bar{u}$ )

$$u = \bar{u} + u'$$

- ❑ Para o engenheiro, muitas vezes é suficiente conhecer o comportamento do valor médio.
- ❑ Note que com relação ao valor médio, podemos fazer a hipótese de regime permanente, pois  $\partial \bar{u} / \partial t = 0$
- ❑ Observamos ainda que se o vetor velocidade é dado por

$$\vec{V} = (\bar{u} + u') \vec{i} + (\bar{v} + v') \vec{j} + w' \vec{k}$$

podemos fazer a hipótese de 2-D com relação aos valores médios. Dessa forma, podemos simplificar bastante o problema. Desejamos então determinar o campo médio de velocidades. Neste caso, é preciso obter equações de conservação para essa grandeza. A expressão  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$  é introduzida nas equações de conservação e uma média no tempo é realizada  $\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \text{equação } dt$  resultando em

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(-\rho u' v')}$$

Note que a equação obtida é semelhante a equação utilizada para obter a solução do regime laminar, porém, temos um termo novo  $-\overline{\rho u' v'}$ . Podemos reescrever esta equação como

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\tau_s} + \underbrace{(-\rho u' v')}_{\tau_t} \right]$$

O termo  $-\overline{\rho u' v'}$  é chamado de *tensão de Reynolds* ou tensão turbulenta. Como este termo envolve flutuações, não sabemos como avaliá-lo. Introduzimos um **modelo de turbulência**. Dentre os modelos mais populares, temos os modelos baseados na hipótese de Boussinesq, os quais fazem uma analogia entre a tensão laminar e turbulenta, definindo a tensão turbulenta como

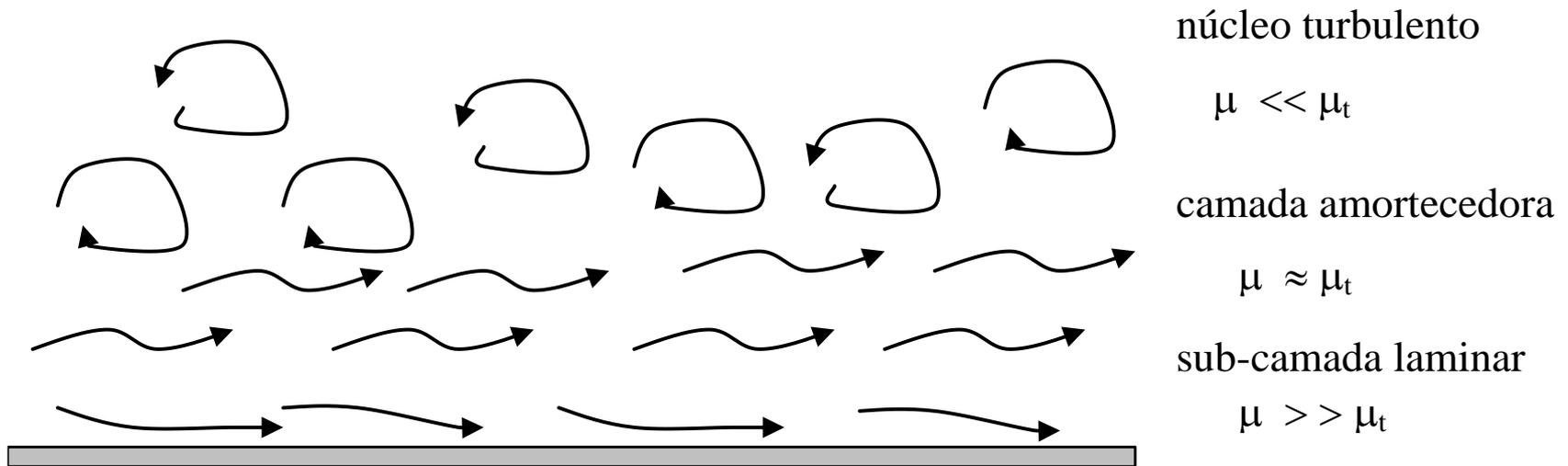
$$-\overline{\rho u' v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

onde  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta, a qual depende do escoamento, não é uma propriedade do fluido.

Definimos a tensão como sendo  $\tau = \tau_\ell + \tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Rightarrow$

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_{\text{ef}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad ; \quad \mu_{\text{ef}} = \mu + \mu_t$$

Analisando o escoamento próximo à parede, observamos

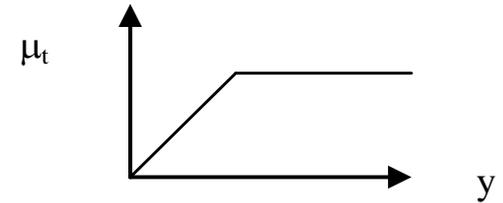


Próximo a parede, a viscosidade turbulenta é desprezível e a tensão cisalhante na parede é dada por

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Para resolver as equações de conservação, precisamos definir como a viscosidade turbulenta varia com o escoamento. Existem diversos modelos, cada um deles com um grau de complexidade diferente, e com uma abrangência diferente. Os mais populares são:

- modelo de comprimento de mistura de Prandtl:  $\mu_t = K y$
- modelo de duas equações diferenciais  $\kappa$ - $\varepsilon$  (energia cinética turbulenta - dissipação)
- modelos anisotrópicos
- modelo de tensões de Reynolds
- etc.



Uma vez selecionado um modelo, a equação de conservação de quantidade de movimento linear pode ser resolvida.

Para a obtenção da solução é conveniente adimensionalizar a equação de conservação. Introdz-se uma velocidade de referência chamada de *velocidade de atrito*  $u^*$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}$$

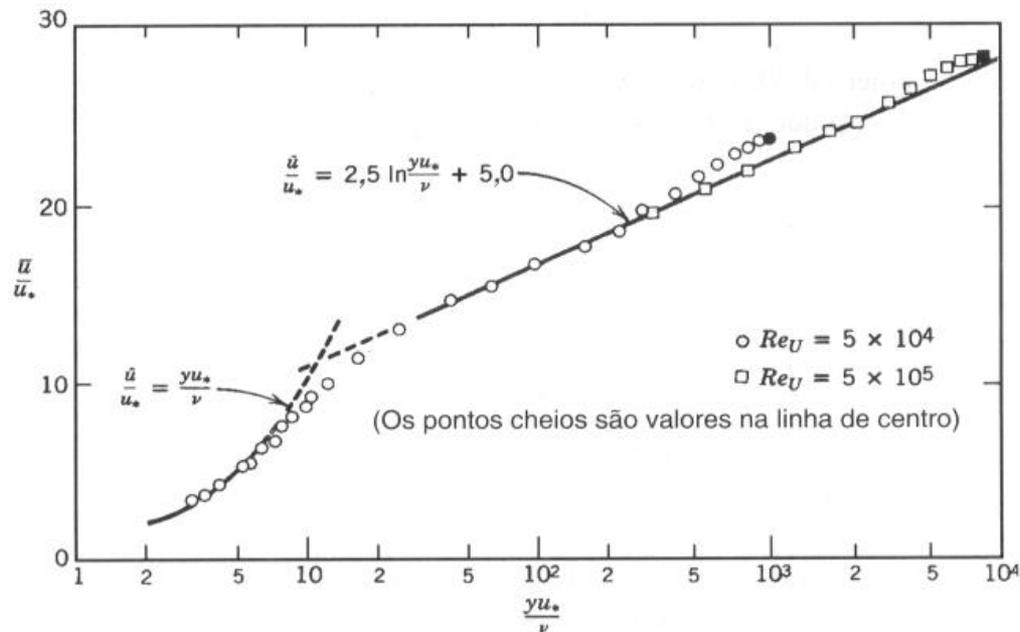
A velocidade e a coordenada são adimensionalizados com

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u^*} \quad ; \quad y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$$

A equação de quantidade de movimento pode ser resolvida para a região da camada limite, resultando nas seguintes expressões

- sub-camada laminar  $u^+ = y^+$  para  $y^+ \leq 5$
- núcleo turbulento  $u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,0$  para  $y^+ \geq 50$

A figura abaixo ilustra os perfis acima, juntamente com os dados experimentais. Note que na região entre  $5 \leq y^+ \leq 50$ , correspondente a região amortecedora, os pontos experimentais não coincidem com nenhuma das duas curvas, pois é uma região de transição, mais difícil de ser modelada.



As expressões anteriores são de difícil utilização, pode-se então utilizar um perfil mais simples, obtido empiricamente para avaliar a velocidade na região da camada limite no regime turbulento

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

Infelizmente, este perfil não é adequado para avaliar a tensão cisalhante na parede, pois prevê  $\partial \bar{u} / \partial y = \infty$  na parede. Recomenda-se a utilização do seguinte perfil empírico

$$\tau_s = 0,0233 \rho U_\infty^2 \left( \frac{v}{U_\infty \delta} \right)^{1/4} \quad \text{para } Re_x > 5 \times 10^5$$

A espessura da camada limite pode ser estimada a partir da seguinte correlação empírica

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,381}{Re_x^{1/5}} - \frac{10\,270}{Re_x} \quad \text{para } Re_x > 5 \times 10^5$$

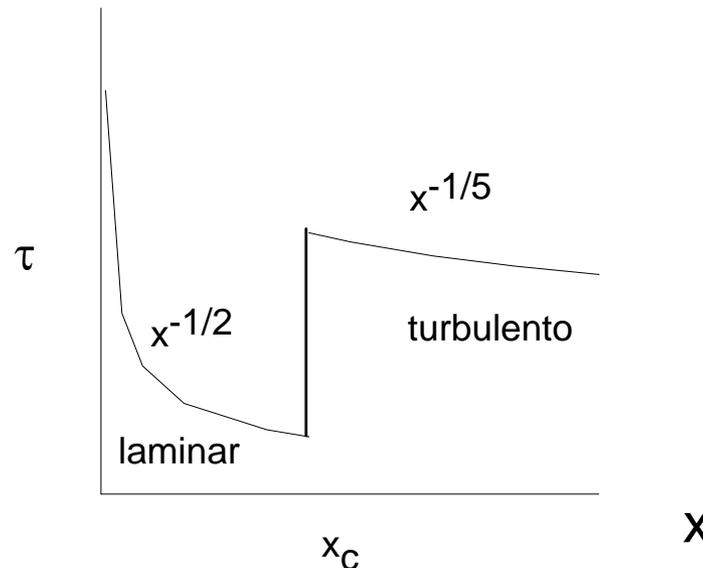
O coeficiente de atrito local pode ser obtido, sendo igual a

$$C_f(x) = \frac{\tau_s(x)}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

$$C_f(x) = \frac{0,0592}{Re_x^{1/5}}$$

$$\text{para } 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$$

A variação da tensão ao longo da superfície encontra-se ilustrada na figura abaixo. Para determinar a força resultante em uma placa é preciso levar em consideração que na parte anterior da placa,  $x < x_c$  o regime é laminar e a tensão cai com  $x^{-1/2}$ , e em  $x_c$  ocorre uma mudança de regime, a transferência de quantidade de movimento cresce, e a tensão cisalhante cresce substancialmente, passando a cair com  $x^{-1/5}$ .



A força sobre a placa é

$$F = \overline{\tau_s} A_s = \int \tau_s(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_{A_s} C_f(x) d A_s = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^L C_f(x) b dx =$$
$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} \left[ \int_0^{x_c} C_{f_{\text{lam}}}(x) b dx + \int_{x_c}^L C_{f_{\text{turb}}}(x) b dx \right] = \frac{\rho U_\infty^2}{2} \overline{C_{f_L}} A_s$$

$$\overline{C_{f_L}} = \frac{1}{L} \left[ \int_0^L C_{f_{\text{turb}}}(x) dx - \int_0^{x_c} [C_{f_{\text{turb}}}(x) - C_{f_{\text{lam}}}(x)] dx \right]$$

$$\overline{C_{f_L}} = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1740}{\text{Re}_L}$$

$$\text{para } 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^7$$

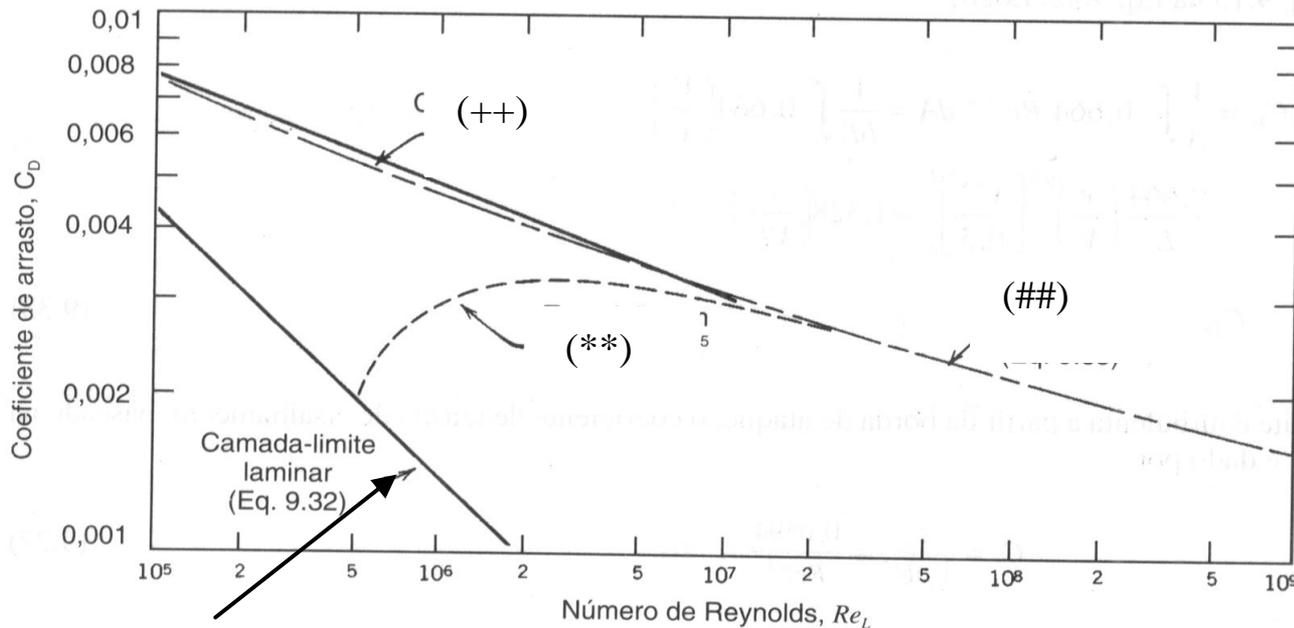
$$\overline{C_{f_L}} = \frac{0,455}{(\log \text{Re}_L)^{2,58}} - \frac{1610}{\text{Re}_L}$$

$$\text{para } 5 \times 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^9 \quad (**)$$

Se  $x_c \ll L$ , a camada limite sobre a placa é praticamente toda turbulenta, pode-se então aproximar o coeficiente de atrito médio para

Se  $x_c \ll L$  então  $\overline{Cf}_L = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}}$  para  $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$  (++)

Se  $x_c \ll L$  então  $\overline{Cf}_L = \frac{0,455}{(\log Re_L)^{2,58}}$  para  $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^9$  (##)



**Fig. 9.8** Variação de coeficiente de arrasto com o número de Reynolds para uma placa plana lisa paralela ao escoamento.

$$\overline{Cf}_L = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}$$

**Exemplo 2.** Deseja-se colocar um tubo de pitot a 10 cm da extremidade dianteira de um pequeno dirigível, na parte inferior. A velocidade do dirigível varia entre 40 Km/h e 160 Km/h e a temperatura do ar é 0 °C. Qual deve ser o comprimento da haste do tubo de pitot?

**Solução:** ar 0 °C  $\Rightarrow \rho = 1,13 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 1,7 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$

$$\mathbf{Re}_x = \frac{\rho U_{\infty} x}{\mu} \qquad \mathbf{Re}_{x,\max} = \frac{\rho U_{\infty,\max} x}{\mu} = 2,95 \times 10^5 < \mathbf{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (laminar)}$$

$$\delta_{\max} = \frac{5x}{\sqrt{\mathbf{Re}_{x,\min}}} \qquad \mathbf{Re}_{x,\min} = \frac{\rho U_{\infty,\min} x}{\mu} = 7,38 \times 10^4$$

$$\delta_{\max} = \frac{5x}{\sqrt{\mathbf{Re}_{x,\min}}} = 1,84 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,84 \text{ mm}$$

$$\boxed{h \geq \delta_{\max} \Rightarrow h = 2 \text{ mm}}$$

**Exemplo 3.** Considere ar-padrão escoando sobre uma placa plana de largura  $b = 2\text{m}$ , com uma velocidade de corrente livre igual a  $U_\infty = 4,3 \text{ m/s}$ .

1. Para  $x = 0,5 \text{ m}$  determine a espessura da camada-limite.
2. Nesta mesma coordenada, estime a distância da superfície na qual  $u = 0,3 U_\infty$ .
3. Repita os cálculos para a extremidade da placa, sabendo que a mesma, possui comprimento igual a  $L = 1\text{m}$
4. Determine a força de arraste total devido ao atrito superficial.
5. Determine a força de arraste que atua na primeira metade da placa.

**Solução:** ar  $\Rightarrow \rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$

1. 
$$\text{Re}_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} = 1,43 \times 10^5 < \text{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (laminar) } \quad \delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 6,60 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2. 
$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad 0,3 = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \Rightarrow \eta = 0,2 \Rightarrow y = 0,2\delta = 1,32 \text{ mm}$$

3. 
$$\text{Re}_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = 2,87 \times 10^5 < \text{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (laminar) } \quad \delta = \frac{5L}{\sqrt{\text{Re}_L}} = 9,34 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad 0,3 = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \Rightarrow \eta = 0,2 \Rightarrow y = 0,2\delta = 1,87 \text{ mm}$$

**Exemplo 3.** Considere ar-padrão escoando sobre uma placa plana de largura  $b = 2\text{m}$ , com uma velocidade de corrente livre igual a  $U_\infty = 4,3 \text{ m/s}$ .

1. Para  $x = 0,5 \text{ m}$  determine a espessura da camada-limite.
2. Nesta mesma coordenada, estime a distância da superfície na qual  $u = 0,3 U_\infty$ .
3. Repita os cálculos para a extremidade da placa, sabendo que a mesma, possui comprimento igual a  $L = 1\text{m}$
4. Determine a força de arraste total devido ao atrito superficial.
5. Determine a força de arraste que atua na primeira metade da placa.

**Solução:**

$$4. \quad F = \int \tau_s(x) dA = \overline{\tau_s} A_s \quad \overline{\tau_s} = \overline{Cf_L} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad ; \quad F = \overline{\tau_s} (b L)$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = 2,87 \times 10^5 < \text{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (laminar) } \quad \overline{Cf_L} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} = 2,48 \times 10^{-3}$$

$$\overline{\tau_s} = \overline{Cf_L} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 2,48 \times 10^{-3} \times \frac{1,2}{2} \times 4,3^2 = 2,75 \times 10^{-2} \text{ Pa} \Rightarrow F = \overline{\tau_s} (b L) = 0,055 \text{ N}$$

5.

$$F_{L/2} = \int \tau_s(x) dA = \overline{\tau_{sL/2}} A_s = \overline{Cf_{L/2}} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (b \frac{L}{2}) \quad \overline{Cf_{L/2}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_{L/2}}} = 3,51 \times 10^{-3}$$

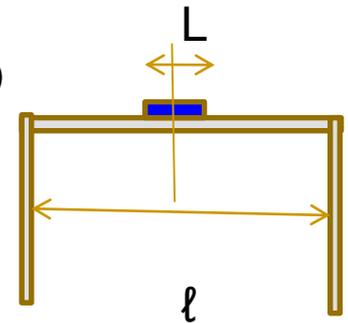
$$\overline{\tau_{sL/2}} = \overline{Cf_{L/2}} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 3,89 \times 10^{-2} \text{ Pa} \Rightarrow F_{L/2} = \overline{\tau_{sL/2}} (b \frac{L}{2}) = 0,039 \text{ N}$$

Note que a força que atua na 1ª metade da placa é mais do que a metade da força que atua na placa inteira.

**Exemplo 4.** Qual a velocidade mínima do ar soprando sobre um papel para arrastá-lo sobre uma mesa, sabendo que o mesmo encontra-se no centro da mesa. Sabe-se que o papel possui dimensões iguais a: largura  $b = 20$  cm, comprimento  $L = 30$  cm e espessura  $t = 0,5$  mm. As propriedades do ar são: massa específica  $\rho = 1,2$  Kg/m<sup>3</sup>; e viscosidade absoluta  $\mu = 1,5 \cdot 10^{-5}$  Kg/(m s). A massa do papel é 2 g e o coeficiente de atrito entre o papel e a mesa é  $\eta = 0,2$ . A mesa possui 2,0 m de comprimento.

**Solução:**  $F \geq F_a = \eta \text{ Peso} = \eta m g$        $F = \overline{Cf_{papel}} \frac{1}{2} \rho V^2 (L b)$

$$\overline{Cf_{papel}} V^2 \geq \frac{2 \eta m g}{\rho (L b)}$$



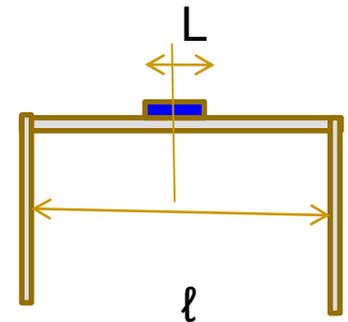
$$\overline{Cf_{papel}} = \frac{1}{L} \int_{\frac{\ell-L}{2}}^{\frac{\ell+L}{2}} Cf(x) dx = \frac{1}{L} \int_{\frac{\ell-L}{2}}^{\frac{\ell+L}{2}} \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} dx = \frac{1}{L} \frac{0,664}{\sqrt{\frac{\rho V}{\mu}}} \int_{\frac{\ell-L}{2}}^{\frac{\ell+L}{2}} x^{-0,5} dx$$

$$\overline{Cf_{papel}} = \frac{1}{L} \frac{0,664}{\sqrt{\frac{\rho V}{\mu}}} \frac{1}{0,5} \left[ x^{0,5} \right]_{\frac{\ell-L}{2}}^{\frac{\ell+L}{2}} = \frac{1}{L} \frac{1,328}{\sqrt{\frac{\rho V}{\mu}}} \left[ \left( \frac{\ell+L}{2} \right)^{0,5} - \left( \frac{\ell-L}{2} \right)^{0,5} \right]$$

**Exemplo 4.** Qual a velocidade mínima do ar soprando sobre um papel para arrastá-lo sobre uma mesa, sabendo que o mesmo encontra-se no centro da mesa. Sabe-se que o papel possui dimensões iguais a: largura  $b = 20$  cm, comprimento  $L = 30$  cm e espessura  $t = 0,5$  mm. As propriedades do ar são: massa específica  $\rho = 1,2$  Kg/m<sup>3</sup>; e viscosidade absoluta  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Kg/(m s). A massa do papel é 2 g e o coeficiente de atrito entre o papel e a mesa é  $\eta = 0,2$ . A mesa possui 2,0 m de comprimento.

**Solução:**

$$\overline{C_{f_{papel}}} V^2 \geq \frac{2 \eta m g}{\rho (L b)} \quad V^{3/2} > \frac{\frac{2 \eta m g}{1,328 \rho b} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}}{\left[ \left( \frac{\ell}{2} + \frac{L}{2} \right)^{0,5} - \left( \frac{\ell}{2} - \frac{L}{2} \right)^{0,5} \right]}$$



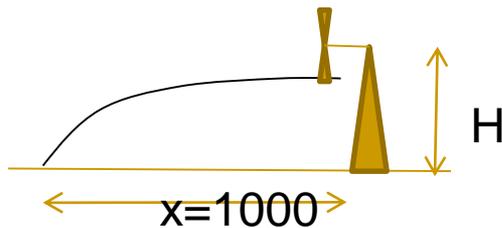
$$V \geq 9,57 \text{ m/s}$$

Verificando regime de escoamento

$$\mathbf{Re}_{\frac{\ell+L}{2}} = \frac{\rho V \frac{\ell+L}{2}}{\mu} = 4,98 \times 10^5 < \mathbf{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (laminar)}$$

**Exemplo 5.** Deseja-se instalar um cata-vento para gerar energia elétrica em um platô, o qual recebe um vento de 30 Km/h. Determine a altura do suporte das pás do cata-vento, de forma a obter o rendimento máximo. Sabe-se que as pás possuem 3 m de comprimento e que o cata-vento está localizado a 1000 m do início de um platô.

$$\text{Ar: } \rho = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad ; \quad \mu = 1,7 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$$



$$H - \ell \geq \delta_{\text{max}} \Rightarrow H \geq \delta_{\text{max}} + \ell$$

$$\text{Re}_x = \frac{\rho U_{\infty} x}{\mu} \quad \text{Re}_x = \frac{\rho U_{\infty} x}{\mu} = 5,88 \times 10^7 > \text{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (turbulento)}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,381}{\text{Re}_x^{1/5}} - \frac{10\,270}{\text{Re}_x} \quad \delta = 6,54 \text{ m} \Rightarrow H \geq 9,54 \text{ m} \Rightarrow H = 10 \text{ m}$$

**Exemplo 6.** Um novo trem aerodinâmico viaja a uma velocidade média de 172 Km/h. Calcule a potência necessária para vencer a resistência superficial ao longo do teto e lados de um trem de 10 vagões. Os vagões possuem 25 m de comprimento, 3,4 m de largura e 4,5 m de altura. O ar está a 5 °C.



$$Pot = F_A U \quad F_A = \overline{Cf_L} \frac{1}{2} \rho U^2 [L \times (2H + W)]$$

$$\text{Ar: } \rho = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad \mu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)} \quad \mathbf{Re}_x = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = 9,56 \times 10^8 > \mathbf{Re}_c = 5 \times 10^5 \text{ (turbulento)}$$

para  $5 \times 10^5 \leq \mathbf{Re}_x \leq 10^9$

$$\overline{Cf_L} = \frac{0,455}{(\log \mathbf{Re}_L)^{2,58}} - \frac{1610}{\mathbf{Re}_L} = 0,00158 - 1,68 \times 10^{-6} = 0,00158$$

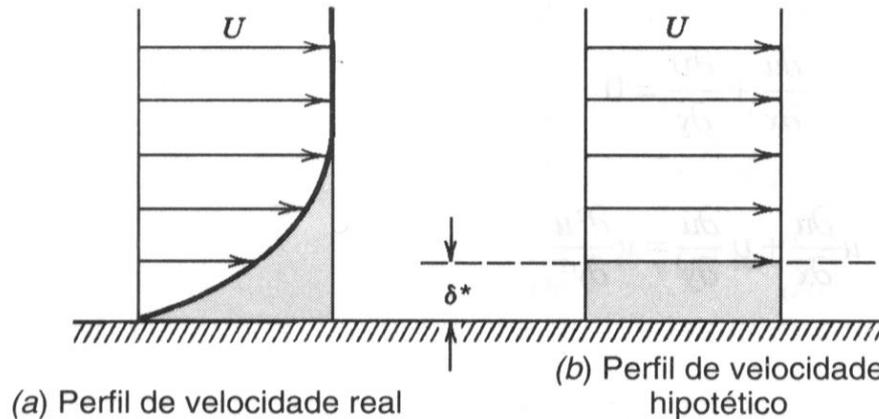
$$F_A = 6,71 \times 10^3 \text{ N} \Rightarrow Pot = 3,21 \times 10^5 \text{ W} = 430 \text{ HP}$$

Note que  $x_c = \mathbf{Re}_c \mu / (\rho U) = 0,131 \text{ m} = 13,1 \text{ cm} \ll L$  (região laminar desprezível)

# Espessura de Deslocamento, $\delta^*$

- A região da camada limite, é a região onde a velocidade apresenta gradientes acentuados, variando de zero a 99% de  $U_\infty$ . Como a velocidade tende assintoticamente para  $U_\infty$  é difícil avaliar experimentalmente a espessura  $\delta$ . Uma outra grandeza relacionada com a camada limite, mais fácil de ser avaliada experimentalmente é a espessura de deslocamento  $\delta^*$ .
- Sabemos que o efeito das forças viscosas na camada limite é retardar o escoamento. A vazão em massa adjacente a uma superfície sólida é inferior à aquela que passaria pela mesma região na ausência da camada limite. Se as forças viscosas estivessem ausentes, a velocidade numa seção seria  $U_\infty$ . A **espessura de deslocamento**  $\delta^*$  é a distância da qual a fronteira sólida teria que ser deslocada num escoamento sem atrito para fornecer o mesmo déficit de vazão em massa que existe na camada limite. Deslocando a fronteira de uma distância  $\delta^*$ , resultaria em uma deficiência de vazão em massa de  $\rho U_\infty \delta^* b$ , onde  $b$  é a largura da superfície.

Queremos que a vazão real seja igual a vazão na ausência da camada limite, dessa forma, conforme a figura abaixo



$$\dot{m} = \int_0^{\infty} \rho u b \, dy = \int_{\delta^*}^{\infty} \rho U b \, dy = \int_0^{\infty} \rho U b \, dy - \underbrace{\int_0^{\delta^*} \rho U b \, dy}_{\dot{m}_{\text{deficit}}}$$

onde

$$\dot{m}_{\text{deficit}} = \rho U \delta^* b = \int_0^{\infty} \rho (U - u) b \, dy = \int_0^{\delta} \rho (U - u) b \, dy - \underbrace{\int_{\delta}^{\infty} \rho (U - u) b \, dy}_{\text{zero}}$$

então

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \, dy$$

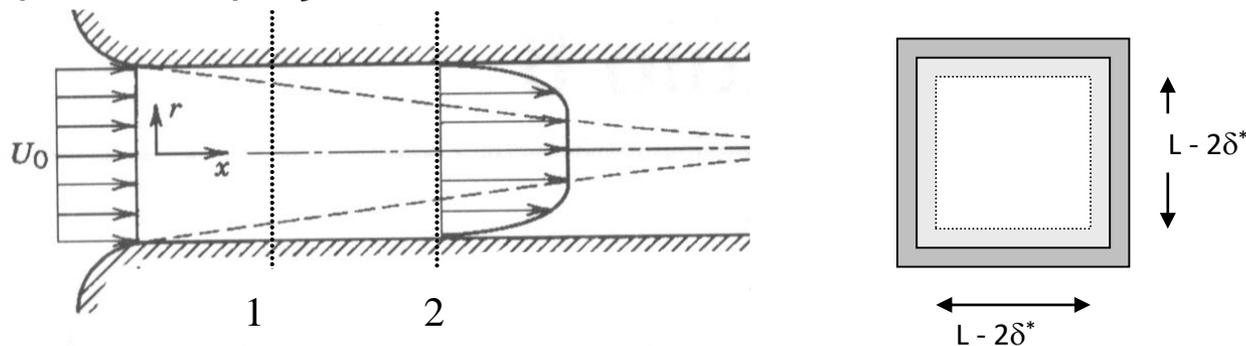
# Espessura de Quantidade de Movimento, $\theta$

- De forma análoga ao déficit de vazão em massa devido ao efeito viscoso na camada limite, existe uma redução do fluxo de quantidade de movimento numa seção em comparação a um escoamento não viscoso.
- A **espessura de quantidade de movimento**  $\theta$  é definida com a espessura da camada de fluido com velocidade  $U_{\infty}$ , para a qual o fluxo de quantidade de movimento é igual ao déficit do fluxo de quantidade de movimento através da camada. Desta forma

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

**Exemplo .** Um túnel de vento de laboratório tem seção de teste quadrada, com 305 mm de lado. Os perfis de velocidade de camada limite são medidos em duas seções, e as espessuras de deslocamento são avaliadas a partir dos perfis medidos. Na seção (1), onde a velocidade de corrente livre é  $U_1 = 26$  m./s, a espessura de deslocamento é  $\delta_1^* = 1,5$  mm. Na seção (2), localizada a jusante da seção (1),  $\delta_2^* = 2,1$  mm.. Calcule a variação da pressão estática entre as seções (1) e (2). Expresse o resultado como uma fração da pressão dinâmica de corrente livre na seção (1). Admita condições atmosféricas-padrão.

Solução: Na região central, onde não existe gradiente de velocidade, pode-se aplicar a equação de Bernoulli



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + g z_2 \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho U_1^2 / 2} = \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^2 - 1$$

Como a massa deve se conservar, pode-se aplicar a equação da continuidade

$$U_1 (L - 2 \delta_1^*)^2 = U_2 (L - 2 \delta_2^*)^2 \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho U_1^2 / 2} = \left( \frac{L - 2 \delta_1^*}{L - 2 \delta_2^*} \right)^4 - 1 = 0,0161$$