Introdução à Análise Diferencial dos Movimentos dos Fluidos

- Teorema de transporte
  - Equação de conservação de massa (continuidade)

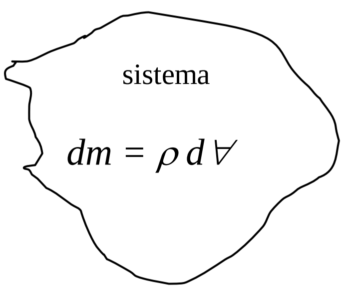
- Definições auxiliares:
  - Função corrente
  - Derivada material
    - Aceleração
  - Rotação de fluidos

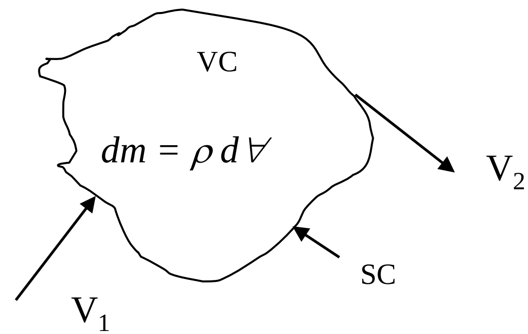
- **Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2ª Lei de Newton)**
  - Equação constitutiva para fluidos Newtonianos
    - Equação de Navier-Stokes

Teorema de Transporte de Reynolds

- permite transformar as equações para sistema (massa fixa) para volumes de controle (volume fixo)

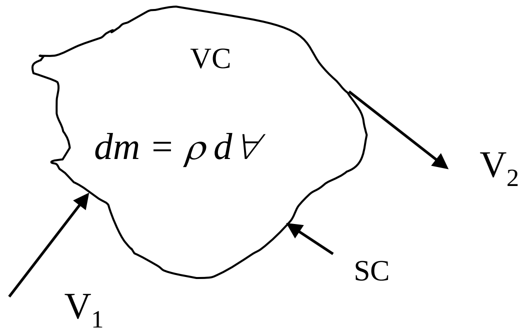
Variação total com o tempo de de uma grandeza de um sistema	=	taxa de variação da grandeza específica no VC	+	fluxo líquido saindo grandeza específica através da SC





- ϕ = grandeza específica ; ρ = massa específica ;
- $d\forall$ = volume infinitesimal
- $d\,m$ = massa infinitesimal ; $d\,m = \rho \, d\forall$;
- $d\,\Phi$ = grandeza no volume infinitesimal ; $d\,\Phi = \phi \, d\,m = \phi \, \rho \, d\forall$

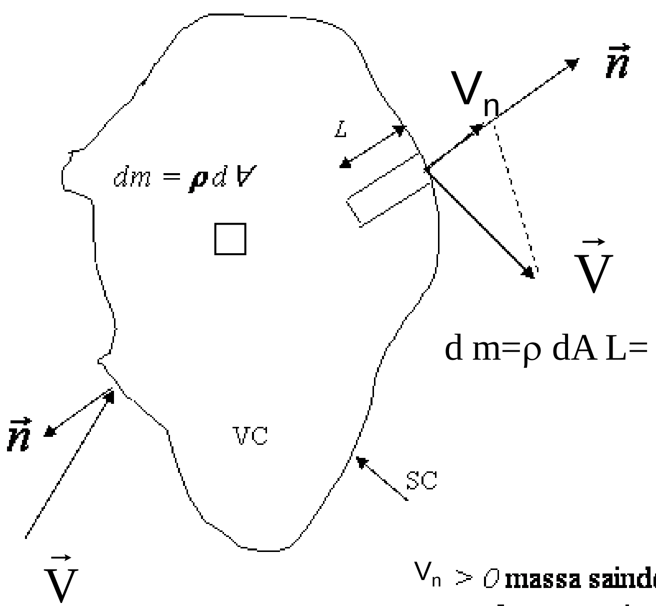
- taxa de acumulação de uma grandeza específica



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \phi\, dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \phi\, \rho\, d\forall$$

- quantidade da grandeza que cruza a superfície:

$$\phi\, d\, m = \phi\;\; \rho\, dA\, L = \;=\phi\, \rho\, dA\, V_n\, dt = \phi\, \rho\, \vec{V} \bullet \vec{n}\; dA\; dt$$



$d\,m = \rho\; dA\; L = \;= \rho\; dA\; V_n\; dt$

$V_n > 0$ massa saindo

$V_n < 0$ massa entrando

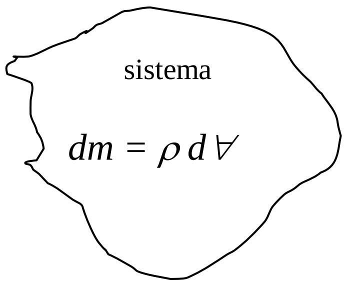
fluxo líquido de massa cruzando a SC

$$\int_{SC} \phi\, \rho\, \vec{V} \bullet \vec{n}\, d\, A$$

$$\boxed{\left.\frac{d\Phi}{d\,t}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial\, t}\int_{VC} \phi\, \rho\, d\forall + \int_{SC} \phi\, \rho\, \vec{V} \bullet \vec{n}\, d\, A}$$

Equação de Conservação de Massa

- **Sistema:**



$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_{sistema}} \rho \, d\forall = 0 \Rightarrow \frac{d\,m}{d\,t} = 0$$

- **Volume de controle:**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, d\, A = 0}$$

A

Variação com o tempo da
da massa do volume de controle

B

Fluxo líquido de massa
através da superfície de controle

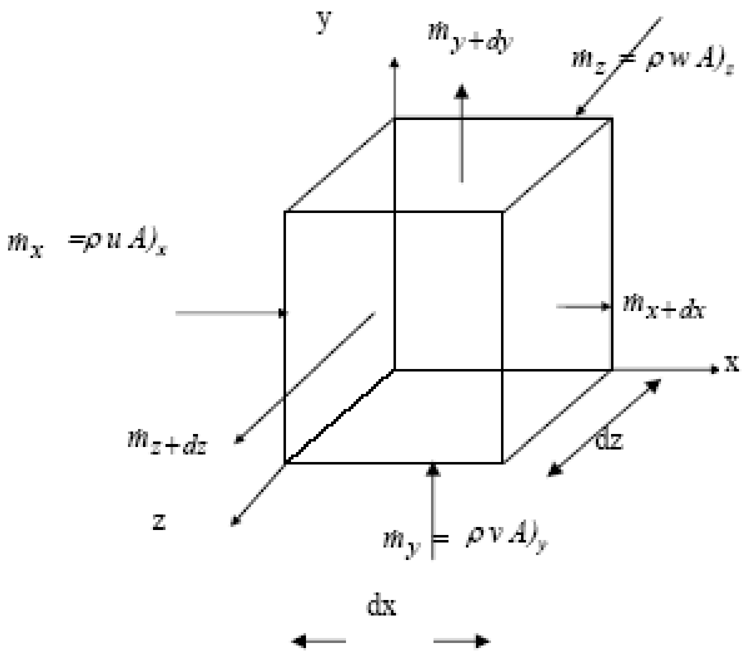
Continuidade - coordenadas cartesianas:

Massa = $\rho \, d\forall = \rho \, dx \, dy \, dz$; *Taxa de acumulação de massa com o tempo:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz$$

Fluxo líquido de massa saindo direção x:

$$\dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_x = \left(\dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx \right) - \dot{m}_x = \frac{\partial (\rho \, u \, dy \, dz)}{\partial x} dx = \frac{\partial (\rho \, u)}{\partial x} d\forall$$



direção y: $\dot{m}_{y+dy} - \dot{m}_y = \frac{\partial (\rho \, v)}{\partial y} d\forall$

direção z: $\dot{m}_{z+dz} - \dot{m}_z = \frac{\partial (\rho \, w)}{\partial z} d\forall$

continuidade em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

8

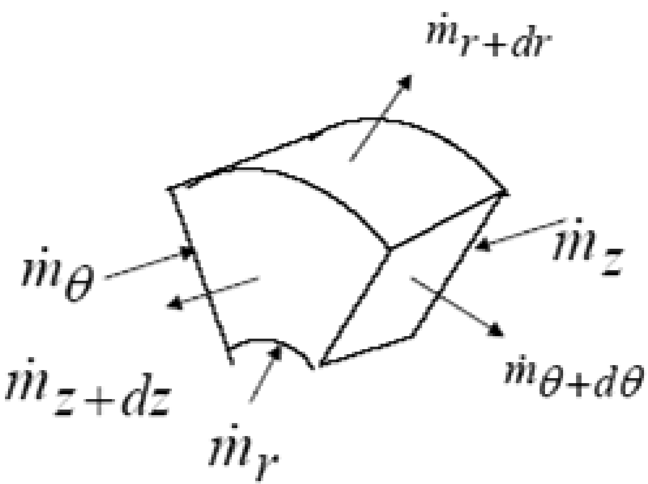
Continuidade - coordenadas cilíndricas:

Massa = $\rho \, d\forall$; *Taxa de acumulação de massa com o tempo:* $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \, d\forall$

$$d\forall = r \, d\theta \, dr \, dz$$

Fluxo líquido de massa saindo direção r:

$$\dot m_{r+dr} - \dot m_r = \left(\dot m_r + \frac{\partial \dot m_r}{\partial r} dr \right) - \dot m_r = \frac{\partial \left(\rho \, u_r \, r \, d\theta \, dz \right)}{\partial r} dr = \frac{\partial \left(\rho \, u_r \, r \right)}{\partial r} \frac{d\forall}{r}$$



direção θ:

$$\dot m_{\theta+d\theta} - \dot m_\theta = \frac{\partial \left(\rho \, u_\theta \, dr \, dz \right)}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial \left(\rho \, u_\theta \right)}{\partial \theta} \frac{d\forall}{r}$$

direção z:

$$\dot m_{z+dz} - \dot m_z = \frac{\partial \left(\rho \, u_z \, r \, d\theta \, dr \right)}{\partial z} dz = \frac{\partial \left(\rho \, u_z \right)}{\partial z} d\forall$$

continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \, r \rho u_r}{r \, \partial r} + \frac{\partial \rho u_\theta}{r \, \partial \theta} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0$$

- Observações preliminares:

  - Produto interno

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad \vec{A} \bullet \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \mathbf{cos}\,\theta$$

– Gradiente $\mathbf{grad}\, B = \vec{\nabla}\, B = \dfrac{\partial\, B}{\partial\, x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial\, B}{\partial\, y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial\, B}{\partial\, z}\vec{e}_z$

– Divergente $\mathbf{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \dfrac{\partial\, A_x}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, A_y}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, A_z}{\partial\, z}$

$$\mathbf{div}\,\vec{A} = \lim_{\forall \to 0}\left[\frac{1}{\forall}\int_S \vec{A} \bullet d\vec{S}\right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \qquad \textbf{(I)}$$

Variação da massa com o tempo por unidade de volume

Fluxo líquido de massa por unidade de volume

A equação acima pode ser rescrita sabendo que $\mathbf{div}(\rho\vec{V}) = \vec{\nabla} \bullet (\rho\vec{V}) = \rho\vec{\nabla} \bullet \vec{V} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\rho$

como $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$$

Definido o operador : derivada material, ou total ou substantiva $$\frac{D A}{D t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} A$$

variação local temporal

variação convectiva

temos $$\frac{D \rho}{D t} + \rho \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0 \qquad \textbf{(II)}$$

Equação de Conservação de Massa ou Continuidade

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\rho\,\vec{V}) = 0}$$

ou

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathbf{div}\,(\,\vec{V}\,) = 0}$$

Casos Particulares

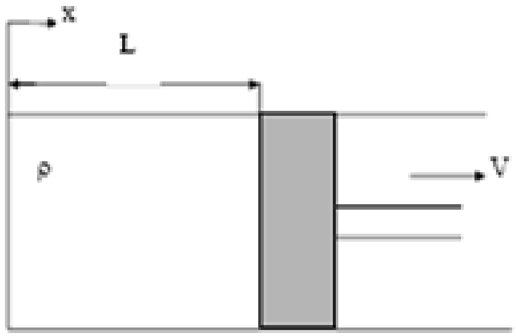
1. Regime Permanente: $\mathbf{div}\,(\rho\,\vec{V}) = 0$

2. Incompressível: $\mathbf{div}\,(\,\vec{V}\,) = 0$

Exemplo 5.1 : Sabe-se que o escoamento plano [$\vec{V} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j}$] de um fluido incompressível, em regime permanente, possui o componente x da velocidade igual a $u(x) = U_o x$. Determine o componente vertical v, sabendo que em y=0, v=0.

continuidade: $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0}$$

Exemplo 5.2: Considere o amortecedor a gás da figura. Inicialmente a distância do pistão a cabeça do cilindro é $L = L_o$ = 0,15m, e a massa específica $\rho=\rho_o$=18 kg/m^3. O pistão então começa a se locomover com velocidade constante V = 12 m/s. Determine a taxa de variação da massa específica com o tempo no instante inicial e a variação da massa específica com o tempo.



Função Corrente para Escoamento Incompressível Bi-dimensional

- continuidade $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ ou $\dfrac{\partial\, r\, u_r}{r\, \partial r} + \dfrac{\partial u_\theta}{r\, \partial \theta} = 0$

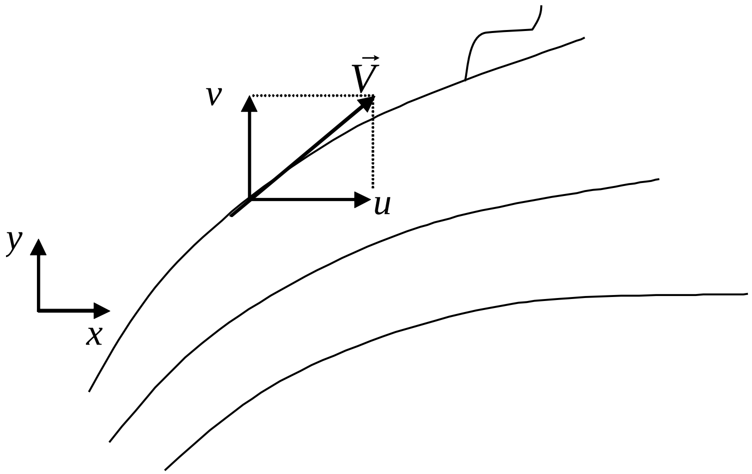
Definição: função de corrente $\psi \quad \Rightarrow$

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad \text{ou} \quad \boxed{u_r = \frac{\partial \psi}{r\, \partial \theta} \quad , \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}}$$

substituindo na continuidade: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$ sempre verdade

- **<u>Linha de corrente:</u>** Linha imaginária num campo de escoamento tal que em um determinado instante de tempo, o vetor velocidade em qualquer ponto é tangente a esta linha em cada ponto

- Obs: Para um escoamento em regime permanente, as linhas de corrente correspondem às trajetórias das linhas



$$\tan\theta = \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$$

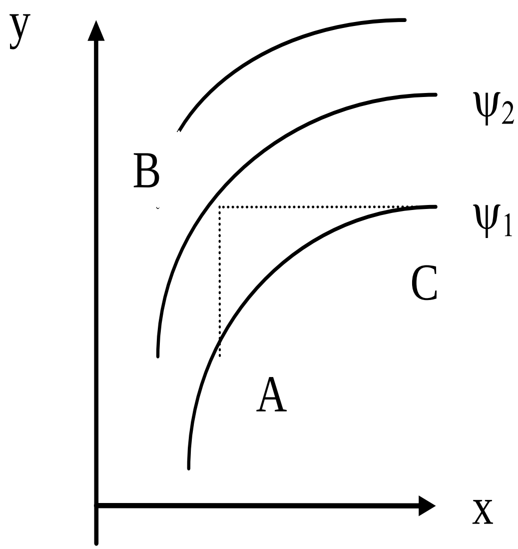
$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow$ Equação da linha de corrente

$$\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} \Rightarrow u\,dy - v\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0$$

Vazão Volumétrica Q



$Q_{AB} = Q_{BC}$

$$\frac{Q_{AB}}{\ell} = \int_{y_1}^{y2} u\, dy = \int_{y1}^{y2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\psi 1}^{\psi 2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

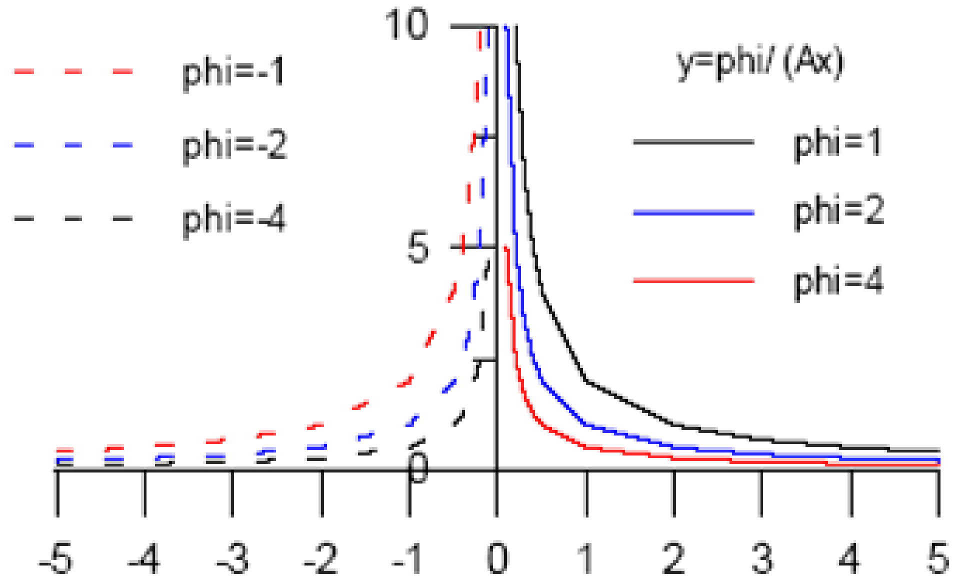
$$\frac{Q_{BC}}{\ell} = \int_{x_1}^{x2} v\, dx = -\int_{x1}^{x2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\int_{\psi 2}^{\psi 1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Exemplo : Dado $\vec{V} = Ax\,\vec{i} - Ay\,\vec{j}$, com $A = 2\ s^{-1}$, determine a função de corrente e trace o gráfico correspondente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \int u\,dy + f(x) \Rightarrow \psi = \int Ax\,dy + f(x) = A\,x\,y + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow -Ay = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow Ay = \frac{\partial}{\partial x}\left[A\,x\,y + f(x)\right] = Ay + f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0) \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow \psi = cte + A\,x\,y \Rightarrow \psi = A\,x\,y$$



Exercício 5.22 O escoamento incompressível em torno de um cilindro circular de raio *a* é representado pela função de corrente $\psi = U\, r \,\textbf{sen}\, \theta - (U\, a^2 \,\textbf{sen}\, \theta) / r$. Obtenha uma expressão para o campo de velocidade.

$$u_r = \frac{\partial \psi}{r\, \partial \theta} = \left(U \cos\theta - U \cos\theta \frac{a^2}{r^2} \right) = U \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(-U \,\text{sen}\theta - U \,\text{sen}\theta \frac{a^2}{r^2} \right) = -U \,\text{sen}\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Determine os pontos de estagnação (onde $\left| \vec{V} \right| = 0$, isto é $u_r = 0$ e $u_\theta = 0$)

$u_r = 0$ quando $r = a$, e $\forall\theta$ em $r = a$, $u_\theta = -2\, U \,\text{sen}\, \theta$ logo $u_\theta = 0$, em $\theta =$ e $\theta = \pi$

mostre que nos pontos de estagnação $\psi = 0$.

$$\psi(a, \pi) = U\, a \;\textbf{sen}\, \pi - U\, a^2 \;\textbf{sen}\, \pi / a = 0$$

Aceleração:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad + \quad \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, \vec{V}}$$

aceleração local temporal | **aceleração convectiva**

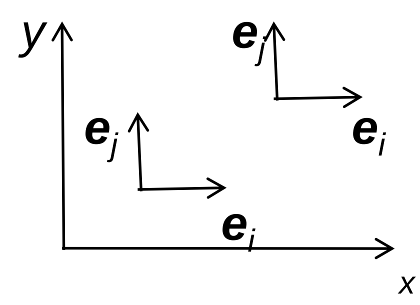
Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad , \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$



Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, \vec{V}$$

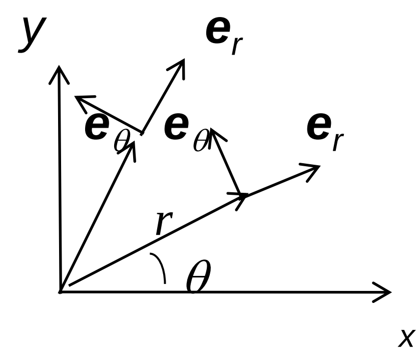
aceleração local temporal

aceleração convectiva

Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z \,,$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$$



centrífuga

$$a_r = \frac{D u_r}{D t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}$$

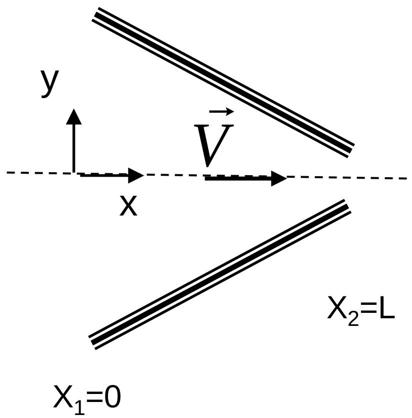
coriolis

$$a_\theta = \frac{D u_\theta}{D t} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{D u_z}{D t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\, u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r\,\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- Exercício: Considere o escoamento unidimensional, permanente, incompressível, através do duto plano e convergente mostrado. O campo de velocidade é dado por $\vec{V} = V_1[1+(x/L)]\,\vec{i}$

  Determine o componente *x* da aceleração de uma partícula movendo-se no campo de escoamento.



$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \bullet \vec{\nabla}\vec{V} \qquad \vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$$

regime permanente: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

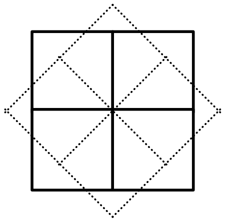
1-D: $\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x \quad ; \quad a_y = a_z = 0$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \vec{V} \bullet \vec{\nabla} u = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad a_x = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\boxed{a_x = V_1\left[1+\frac{x}{L}\right]\frac{V_1}{L}}$$

Rotação:

A rotação $\vec{\omega}$ de uma partícula de fluido é definida como a velocidade angular média de quaisquer duas linhas mutuamente perpendiculares, que se cruzam no centro da partícula..

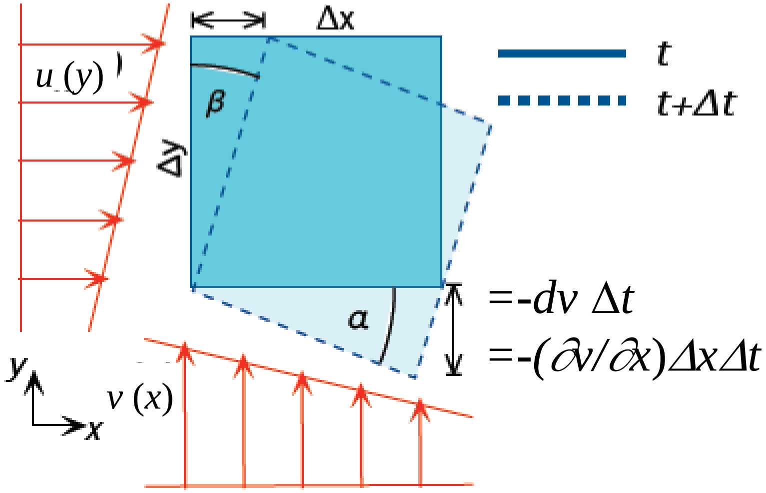


$$\vec{\omega} = \omega_x \, \vec{i} + \omega_y \, \vec{j} + \omega_z \, \vec{k}$$

$$\Delta \theta_{yx} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \approx \frac{1}{2}(\tan\alpha + \tan\beta) = -\frac{dv \, \Delta t}{\Delta x} + \frac{du \, \Delta t}{\Delta y}$$

$$\dot{\theta}_{yx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta_{yx}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\omega_z$$

$=du\,\Delta t=(\partial u/\partial y)\Delta y \Delta t$



$$\log o \quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad e \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \mathbf{det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \quad , \quad \text{rotacional } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

vorticidade: $\vec{\xi} = 2\,\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (2a Lei de Newton)

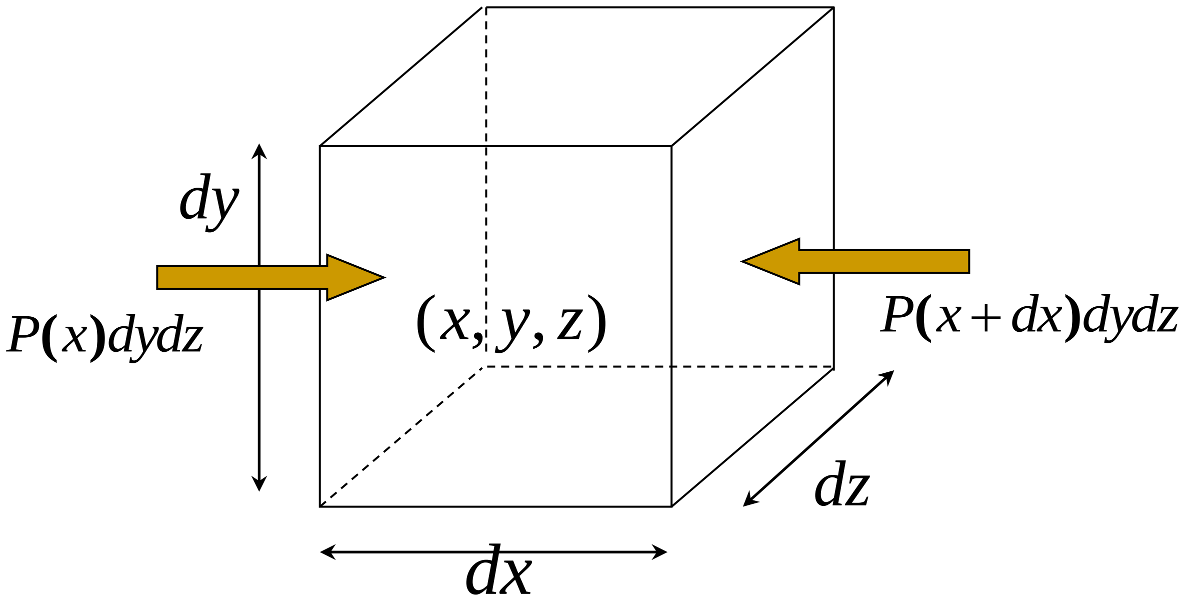
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \sum d\forall \, \vec{f}_{ext} = \rho d\forall \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_S + \vec{f}_c = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

força de corpo: $\vec{f}_C$

força volumétrica,ex: força gravitacional $\boxed{\vec{f}_g = \rho \vec{g}}$

força de superfície: $\vec{f}_S = \vec{f}_p + \vec{f}_\mu$

$\vec{f}_p$ - força de pressão: força normal compressiva



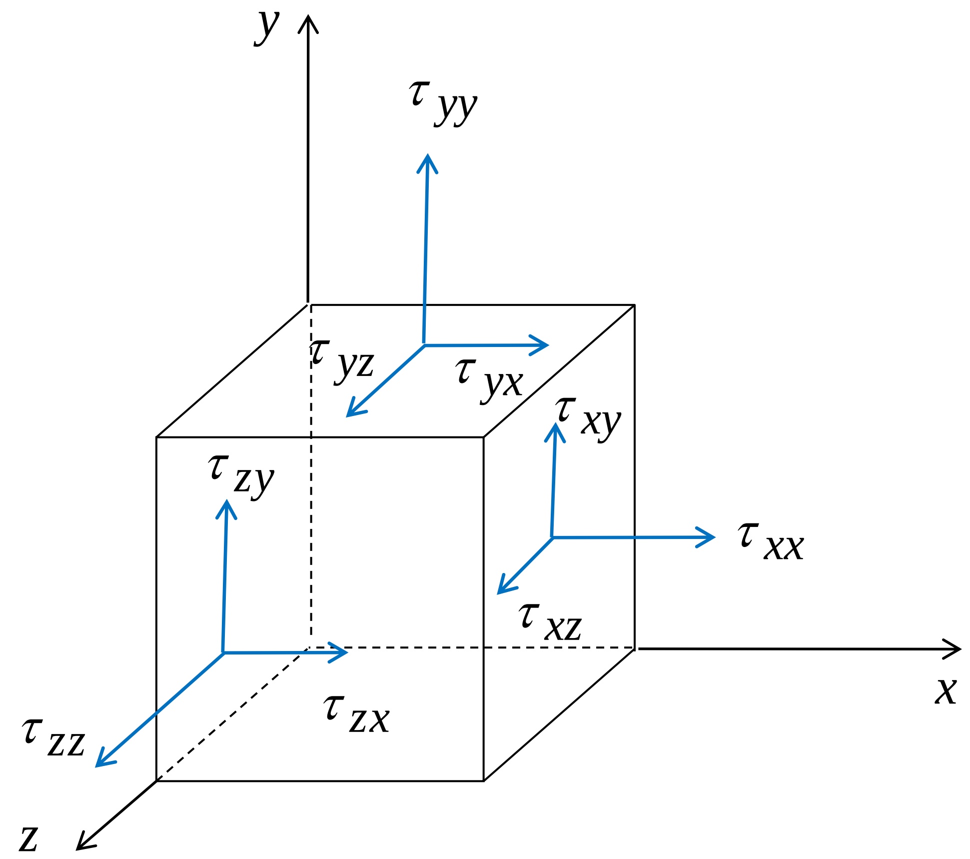
$$dF_{p,x} = P\,dy\,dz - (P\,dy\,dz + \partial P/\partial x\,dx\,dy\,dz) = -\,\partial P/\partial x\,d\forall$$

$$\Rightarrow f_{p,x} = -\,\partial P/\partial x \quad \text{logo} \quad f_{p,y} = -\,\partial P/\partial y \quad \text{e} \quad f_{p,z} = -\,\partial P/\partial z$$

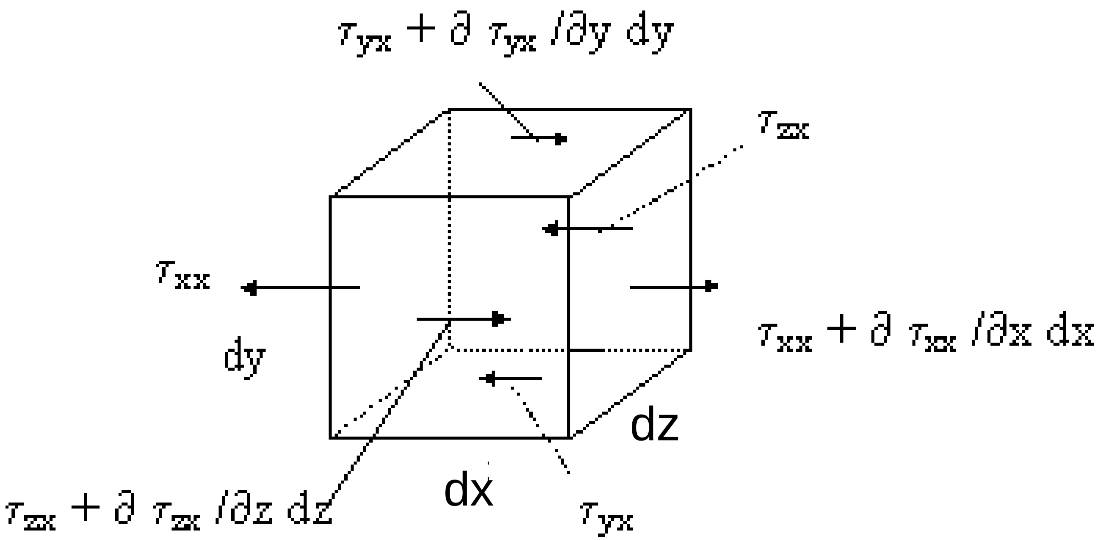
$$\vec{f}_p = -\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_p = -\vec{\nabla} P}$$

$\vec{f}_\mu$ **força viscosa**: força definida por um tensor, em cada face possui 3 componentes, dois tangenciais e um normal

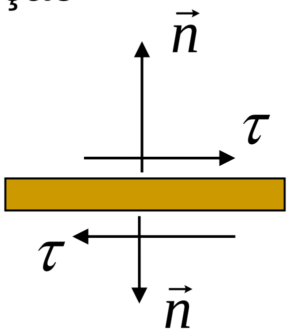
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



- Força de superfície viscosa resultante na direção x



convenção



$$F_{\mu,x} = -\tau_{xx}\Delta y \Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right)\Delta y \Delta z$$

$$- \tau_{yx}\Delta x \Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right)\Delta x \Delta z$$

$$- \tau_{zx}\Delta x \Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right)\Delta x \Delta y$$

$$F_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

- Procedendo de forma análoga para as outras direções

$$f_{\mu,x} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{\mu,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\vec{f}_\mu = \nabla \bullet \underline{\underline{\tau}}}$$

$$f_{\mu,z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\vec{f}_\mu = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\tau}} = \left(\frac{\partial}{\partial\, x} \quad \frac{\partial}{\partial\, y} \quad \frac{\partial}{\partial\, z} \right) \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\vec{f}_\mu = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

pode-se demonstrar pelo uso da equação conservação de quantidade de movimento angular que o tensor $\underline{\underline{\tau}}$ é simétrico

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Equação diferencial de quantidade de movimento na forma vetorial

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\, \vec{g} - \nabla P + \nabla \bullet \underset{=}{\tau}$$

- coordenadas cartesianas

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Casos Particulares:

- **Equação de Euler (fluido perfeito, não viscoso)**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad}\, P$$

- **Equação da Hidrostática:**

$$\rho \vec{g} = \mathbf{grad}\ P$$

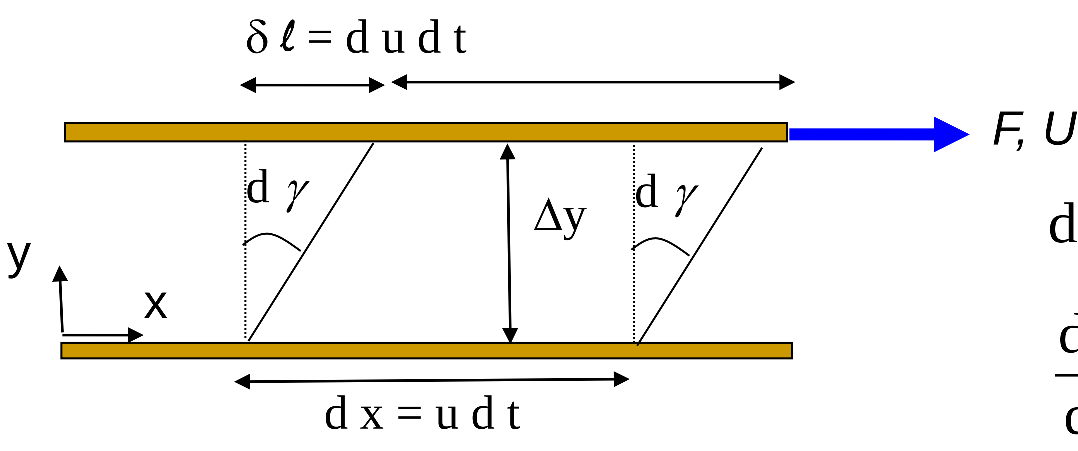
Para fluidos viscosos, precisamos de uma informação adicional: relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação do elemento de fluido

Equações Constitutivas

Descrevem o comportamento do material $\Rightarrow$ qual a resposta desta material (taxa deformação) para um determinado esforço

Fluidos Newtonianos: tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação

Considere o escoamento entre 2 placas



Taxa de deformação

$$d\gamma \cong \tan(d\gamma) = \frac{\sin(d\gamma)}{\cos(d\gamma)} = \frac{du\,dt}{dy}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Lei da viscosidade de Newton: $$\tau_{xy} = \frac{F}{A_y} = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{U}{\Delta y}$$

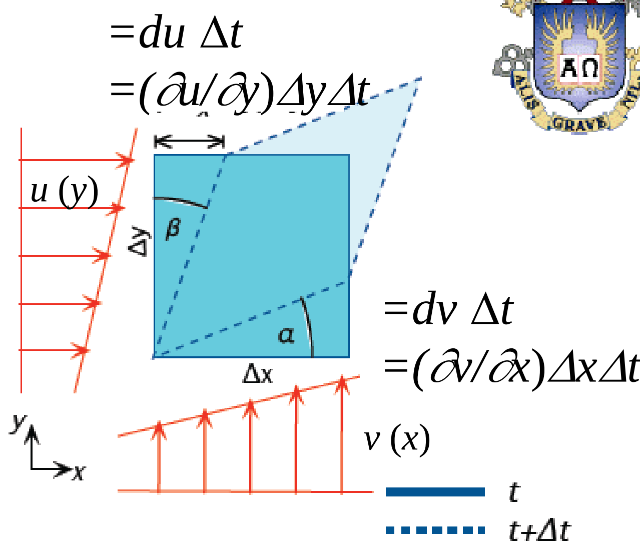
μ = viscosidade absoluta (propriedade do fluido): dimensão: M/Lt (Pa s)

υ = viscosidade cinemática: μ / ρ

Taxa de deformação angular:

$$\Delta\gamma_{yx} = \alpha + \beta \approx \tan\alpha + \tan\beta = \frac{dv\,\Delta t}{\Delta x} + \frac{du\,\Delta t}{\Delta y}$$

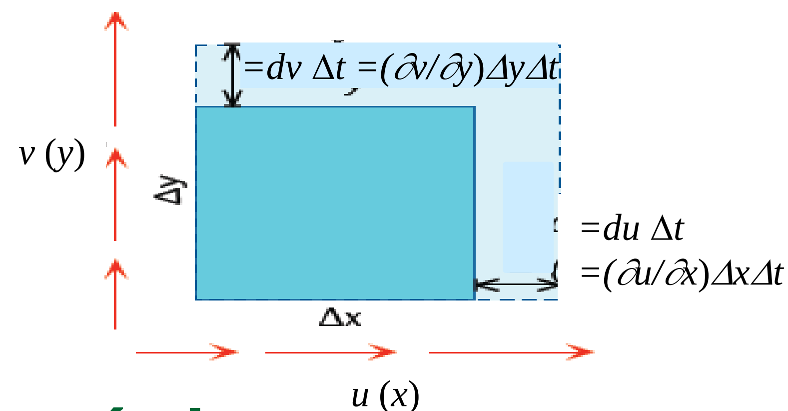
$$\dot{\gamma}_{yx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma_{yx}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\,D_{yx}$$



Taxa de deformação linear:

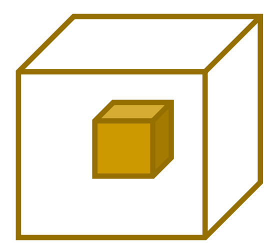
$$\Delta\gamma_{xx} = \frac{du\,\Delta t}{\Delta x}$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma_{xx}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} = D_{xx}$$



Taxa de deformação volumétrica:

$$\dot{\forall} = \dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} = \dot{\gamma}_{zz} \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \nabla \bullet \vec{V}$$



Em notação vetorial, a taxa de deformação de um elemento de fluido, pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = [\mathbf{grad}\ \vec{V} + (\mathbf{grad}\ \vec{V})^T] - \frac{2}{3}\ \mathbf{div}\ \vec{V}\ \underline{\underline{I}}$$

$$\mathbf{grad}\ \vec{V} = \vec{\nabla}\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (u \quad v \quad w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{grad}\ \vec{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{I}} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Equação Constitutiva para fluidos Newtonianos $\underline{\underline{\tau}} = \mu \, \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad , \quad \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \bullet \vec{V}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad , \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \bullet \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{f}_\mu = \mathrm{div}\, \underline{\underline{\tau}} = \mathrm{div}\, \mu \underline{\underline{\gamma}} = \mathrm{div}\left\{ \mu \, \mathbf{[}\mathrm{grad}\, \vec{V} + \mathbf{(}\mathrm{grad}\, \vec{V}\mathbf{)}^T \mathbf{]} - \frac{2}{3}\mu \, \mathrm{div}\, \vec{V} \, \underline{\underline{I}} \right\}}$$

Equação de Navier-Stokes: Equação de conservação de quantidade de movimento linear para fluido Newtonianos (coordenadas cartesianas)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

- A equação de Navier-Stokes simplifica bem se a massa específica e a viscosidade foram constante
  - A maioria dos líquidos podem ser considerados como fluidos incompressíveis (maioria dos líquidos) $\Rightarrow$ $\nabla \bullet \vec{V} = 0$
  - A viscosidade da maioria dos gases é aproximadamente constante

Navier-Stokes (propriedades constantes) $$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\, \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

coordenadas cartesianas

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Navier-Stokes (propriedades constantes) em coordenadas cilíndricas

Direção radial

$$\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_r}{r\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\right]=\rho g_r-\frac{\partial P}{\partial r}+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{r^2\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]$$

Direção angular

$$\rho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\right]=\rho g_\theta-\frac{\partial P}{r\partial \theta}+$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{r^2\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$$

Direção axial

$$\rho\left[\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_z}{r\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+$$

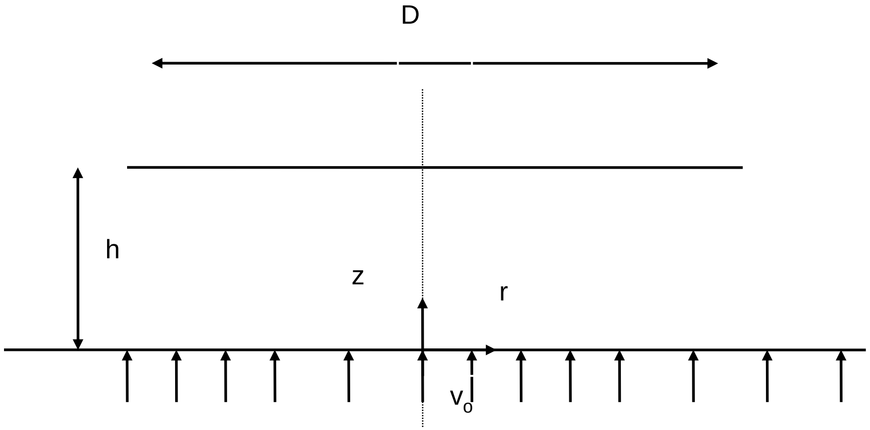
$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u_z}{r^2\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

EXERCÍCIO 1. Uma aproximação útil para o componente *x* da velocidade num escoamento laminar, incompressível, de camada limite, é uma variação parabólica de $u=0$ na superfície ($y=0$) até a velocidade da corrente livre $u=U_\infty$ na borda da camada limite ($y = \delta$). A equação do perfil é

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\,\frac{y}{\delta} - \left[\frac{y}{\delta}\right]^2$$

onde $\delta = c\,x^{1/2}$ e c é uma constante. Determine a expressão para o componente *y* da velocidade. Obtenha a razão v/U_∞ na borda da camada limite

2. Um disco do jogo de “hockey no ar” pode ser modelado como sendo circular, suportando por um camada de ar que sai de múltiplos e diminutos orifícios na mesa do jogo. Admita que um disco flutua a uma distância h = 1 mm acima da mesa, através da qual o ar flui verticalmente a uma velocidade média de v_o = 0,08 m/s. Considere o ar como incompressível. Obtenha uma expressão para o componente de velocidade do escoamento na direção radial sob o disco. Considere o escoamento como uniforme na direção vertical. Se o diâmetro do disco for de D = 75 mm, determine a magnitude e localização da aceleração máxima a que é submetida uma partícula de fluido sob o disco.



3. Um fluido escoa em um canal formado por duas placas paralelas de largura b = 1m, como com velocidade

$$\vec{V} = u\,\vec{i} \qquad\qquad u = x\left[1 - \frac{y^2}{h^2}\right]\cos\omega\, t$$

onde *h* é a meia distância entre as placas. Elementos resfriadores e aquecedores estrategicamente colocados nas placas produzem uma variação de massa específica ρ somente na direção vertical e o tempo *t*. No instante de tempo $t = \pi/\omega$, $\rho = \rho_o$. Determine uma expressão para a massa específica.

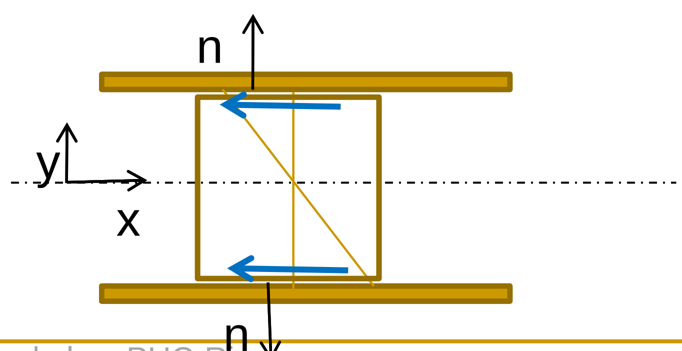
- **Exercício.** Considere o escoamento entre duas placas paralelas, estacionárias, separadas pela distância 2 h. O escoamento ocorre devido a diferença de pressão. A coordenada y é medida a partir da linha de centro do espaço entre elas. O campo de velocidade é dado por $u = u_{max}\,[\,1-(y/h)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular. Determine a tensão cisalhante na placa em y = h e y = - h. Obtenha uma expressão para a vorticidade, $\boldsymbol{\omega}$. Determine o local onde a vorticidade é máxima.

$\boldsymbol{v} = u\,\boldsymbol{e}_x \qquad u = u_{max}\,[\,1-(y/h)^2] \quad ; \quad v = w = 0$

deformação angular: $$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -u_{\mathbf{max}}\frac{y}{h^2} \quad ; \quad \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = 0$$

deformação linear: $$\nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} = \dot{\gamma}_{zz} = 0$$

tensão cisalhante $$\tau_{xy} = \mu\dot{\gamma}_{xy} = -\mu\, u_{\mathbf{max}}\frac{y}{h^2}$$



$$\tau_{xy}(y = h) = -\mu\frac{u_{\mathbf{max}}}{h}$$

$$\tau_{xy}(y = -h) = \mu\frac{u_{\mathbf{max}}}{h}$$

- **Exercício.** Considere o escoamento entre duas placas paralelas, estacionárias, separadas pela distância 2 h. O escoamento ocorre devido a diferença de pressão. A coordenada y é medida a partir da linha de centro do espaço entre elas. O campo de velocidade é dado por $u = u_{max} [1- (y/h)^2]$. Avalie as taxas de deformação linear e angular. Determine a tensão cisalhante na placa em y = h e y = - h. Obtenha uma expressão para a vorticidade, $\boldsymbol{\omega}$. Determine o local onde a vorticidade é máxima.

vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_x \, \omega_x + \mathbf{e}_y \, \omega_y + \mathbf{e}_z \, \omega_z$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_{\mathbf{max}} \frac{y}{h^2} \quad ; \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

$|\omega|$ é máxima nas paredes: em y=h e y=-h