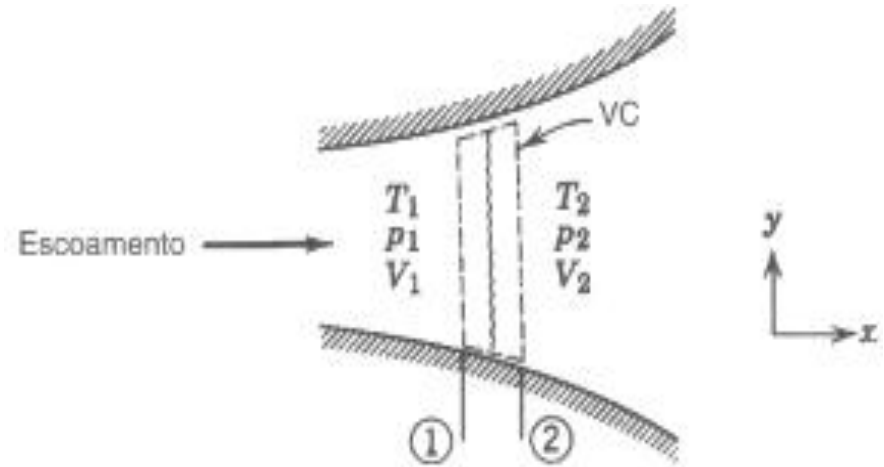


CHOQUE NORMAL

- espessura $\approx 0,2 \mu\text{m}$
- grandes variações de pressão e temperatura, etc
- desaceleração local $\approx 10^9 \text{ m/s}^2$
- processo irreversível
- só ocorre no regime supersônico
- após o choque \rightarrow regime subsônico



- gás ideal
- c_p e c_v constantes
- área superficial desprezível logo área constante $A_1=A_2$
- atrito desprezível
- troca de calor desprezível

- **equações governantes:**

(1) massa: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{m}}{A}$

(2) quantidade de movimento: $p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$

(3) energia: $\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) = \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \quad ; \quad h_{o2} = h_{o1}$

(4) 2ª lei da termodinâmica: $(s_2 - s_1) > 0 \quad ; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$

(5) equação de estado: $\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$

(6) equação de estado $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$

Temos 6 equações e 6 incógnitas ($\rho_2, V_2, p_2, h_2, T_2, s_2$). Neste caso, temos um problema DETERMINADO.

FUNÇÕES DO CHOQUE NORMAL

$$h_{o2} = h_{o1} \Rightarrow T_{o2} = T_{o1} \qquad \frac{T_2/T_o}{T_1/T_o} = \left(\frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M_2^2} \right) \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = \frac{M_1 c_1 T_2}{M_2 c_2 T_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{0,5} \frac{T_2}{T_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{0,5} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + [(k-1)/2] M_1^2}{1 + [(k-1)/2] M_2^2} \right)^{0,5}$$

de (2)

$$p_1 \left[1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} \right] = p_2 \left[1 + \frac{\rho_2 V_2^2}{p_2} \right] \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\left[1 + \frac{M_1^2 c_1^2}{RT_1} \right]}{\left[1 + \frac{M_2^2 c_2^2}{RT_2} \right]} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\left[1 + k M_1^2 \right]}{\left[1 + k M_2^2 \right]}$$

Combinando as duas expressões, pode-se obter M_2 em função de M_1

$$M_2^2 \left(\frac{\frac{2}{k-1} + M_2^2}{(1 + k M_2^2)^2} \right) = \left(\frac{\frac{2}{k-1} + M_1^2}{(1 + k M_1^2)^2} \right) M_1^2$$

Como medida das irreversibilidades do escoamento, é conveniente determinar

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{o1}} = \left(\frac{1 + [(k-1)/2] M_2^2}{1 + [(k-1)/2] M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \right)$$

As relações acima só dependem do k e $Mach$ e são tabeladas para $k=1,4$ (Tabela E4)

FUNÇÕES DO CHOQUE NORMAL

$$T_{o2} = T_{o1}$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{M_1^2 \frac{(k-1)}{2} + 1}{k M_1^2 - \frac{(k-1)}{2}}}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{(k-1)}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1\right)}{M_1^2 \left(\frac{2k}{k-1} + \frac{k-1}{2}\right)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k M_1^2}{1+k} - \frac{k-1}{k+1}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left(\frac{\frac{(k+1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{1}{\frac{2k}{(k+1)} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Exemplo: ar: $k=1,4$ e $R= 287 \text{ N m/ (Kg K)}$, $c_p= 1004 \text{ J/(kg K)}$



Determine: **(a)** propriedades em (2)= ? ; **(b)** $s_2-s_1=?$

$$M_1 = V_1/c_1 = V_1 / (k R T_1)^{0,5} = 668 / (1,4 \times 287 \times 278)^{0,5} = 2,0$$

$$T_1 = 278 \text{ K}$$

$$p_1 = 65 \text{ kPa}$$

ar

$$V_1 = 668 \text{ m/s}$$

$$M_1 = 2,0 \rightarrow E4 \rightarrow M_2 = 0,5774 \rightarrow T_2/T_1 = 1,687 \rightarrow T_2 = 278 \times 1,687 = 469 \text{ K}$$

$$\rightarrow p_2/p_1 = 4,500 \rightarrow p_2 = 65 \times 4,5 = 293 \text{ kPa}$$

$$\rightarrow p_{o2}/p_{o1} = 0,7209$$

$$\rho_2 = p_2/(RT_2) = 293 \times 1000 / (287 \times 469) = 2,18 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \rightarrow V_2 = \rho_1 V_1 / \rho_2 \rightarrow V_2 = \rho_1 V_1 / \rho_2 = 0,815 \times 668 / 2,18 = 250 \text{ m/s}$$

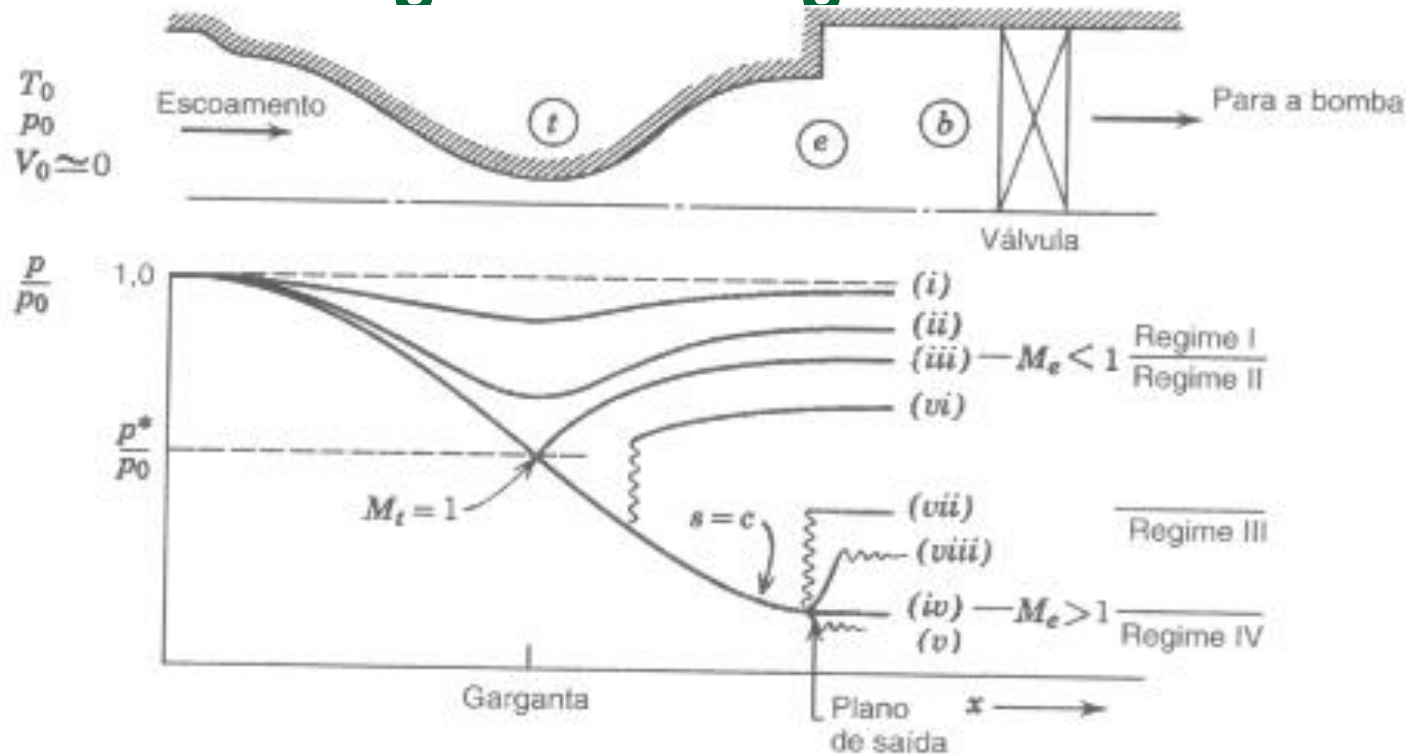
$$\rho_1 = p_1/(RT_1) = 65 \times 1000 / (287 \times 278) = 0,815 \text{ kg/m}^3$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln (T_2/T_1) - R \ln (p_2/p_1) = 1004 \times \ln (1,687) - 287 \times \ln (4,5) = 93,4 \text{ J/(kg K)}$$

ou $M_1 = 2,0 \rightarrow E4 \rightarrow p_{o1}/p_{o2} = 0,7209$

$$s_2 - s_1 = s_{o2} - s_{o1} = - R \ln (p_{o2}/p_{o1}) = - 287 \times \ln (0,7209) = 93,4 \text{ J/(kg K)}$$

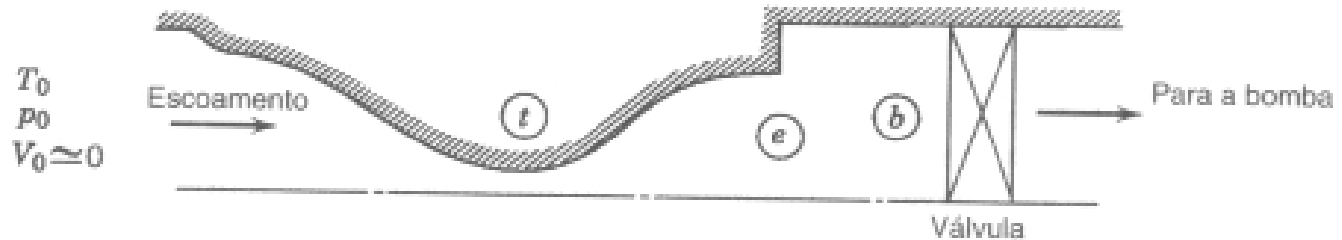
Bocal Convergente Divergente



- Escoamento isentrópico subsônico para $p_b/p_0 \geq p_{iii}/p_0$
- $p_b/p_0 \leq p_{iii}/p_0 \Rightarrow M_g = 1$; vazão máxima atingida
- $p_{iv}/p_0 \Rightarrow$ condição de projeto, $M_s > 1$, subsônico na seção convergente e supersônico na divergente
- $p_b/p_0 \leq p_{iv}/p_0 \Rightarrow$ escoamento no bocal igual a condição de projeto, expansão 3-D irreversível na saída, com descontinuidade de pressão $p_s = p_{pr} > p_v$
- $p_{vii}/p_0 \leq p_b/p_0 \leq p_{iii}/p_0 \Rightarrow$ ocorre choque normal na seção divergente
- $p_{iv}/p_0 \leq p_b/p_0 \leq p_{vii}/p_0 \Rightarrow$ ocorre choque 3-D no plano de saída

Exemplo: Considere ar escoando em um bocal convergente-divergente. O escoamento é alimentado por uma câmara plena, onde a pressão é igual a 1 MPa e a temperatura é 350K. Sabe-se que a área da garganta é igual a $A_g=10^{-3} \text{ m}^2$ e a área da saída é $A_s=1,21 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. O ar é descarregado para um ambiente com pressão igual a 700 KPa.

Determine: a) vazão em massa, b) Mach na saída, c) temperatura na saída? d) ocorre choque no bocal? qual a área na seção em que ocorre choque?



Assumir $A^*=A_g$

$A_s/A^*=1,21 \rightarrow E1 (M<1) M_{sub}=0,58 \rightarrow p_{sub}/p_0=0,7962$

$\rightarrow E1 (M>1) M_{pr} =1,56 \rightarrow p_{pr}/p_0 =0,2496$

$p_{pr}/p_0 =0,2496 < p_d/p_0 =0,70 < p_{sub}/p_0=0,7962 \rightarrow$ ocorre choque

$$\dot{m} = \rho^* V^* A^* = \frac{p^*}{R T^*} c^* A_g = \frac{p_0 \left(\frac{p^*}{p_0}\right)}{R T_0 (T^*/T_0)} \sqrt{k R T_0 \left(\frac{T^*}{T_0}\right)} A_g$$

$$\dot{m} = \frac{10^6 \times 0,528}{287 \times 350 \times 0,8333} \sqrt{1,4 \times 287 \times 350 \times 0,8333} \times 10^{-3} = 2,16 \text{ kg/s}$$

Verificando se o choque ocorre na saída

$$M_{ch1}=M_{pr}=1,56 \rightarrow E4 \rightarrow M_{ch2}=0,6809 \rightarrow p_{o2}/p_{o1}=0,9097 \rightarrow p_{o2}= 909,7 \text{ kPa}$$

$$E4 \rightarrow p_{ch2}/p_{ch1}=2,673 \rightarrow (p_{ch1}=p_{pr}) \rightarrow p_{ch2}=667 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_{ch2}}{p_{o2}} = \frac{667}{909,7} = 0,733$$

$$\frac{p_d}{p_{o2}} = \frac{700}{909,7} = 0,770 > \frac{p_{ch2}}{p_{o2}} = 0,733 \text{ choque ocorre no interior do bocal}$$

Então $p_s=p_d$ ($M_s < 1$)

$$\dot{m} = \rho_s V_s A_s = \frac{p_s}{RT_s} M_s \sqrt{k RT_s} A_s = \frac{p_s}{\sqrt{RT_s}} M_s \sqrt{k} A_s = \frac{p_s}{\sqrt{R \frac{T_s}{T_o}}} M_s \sqrt{k} A_s$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{R T_o}}{p_s \sqrt{k} A_s} = \beta = M_s \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_s^2} \rightarrow \beta^2 = M_s^2 (1 + 0,2 M_s^2)$$

$$\beta = \frac{2,16 \sqrt{287 \times 350}}{700 \times 10^3 \sqrt{1,4 \times 1,21 \times 10^{-3}}} = 0,683 \rightarrow \beta^2 = 0,467$$

$$x = M_s^2 \rightarrow \beta^2 = x (1 + 0,2 x) \rightarrow 0,2 x^2 + x - \beta^2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 0,2 \times 0,467}}{2 \times 0,2} \rightarrow x_1 = 0,43 \rightarrow M_s = \sqrt{0,43} = 0,656$$

$$x_2 = -3,43 \rightarrow \text{impossível}$$

$$M_s=0,66 \rightarrow E1 \rightarrow T_s/T_{o2}=0,9199 \rightarrow (T_{o1}=T_{o2}) \rightarrow T_s = 0,9199 \times 350 = 322 \text{ K}$$

$$\rightarrow p_s/p_{o2}=0,7465 \rightarrow p_{o2}=700/0,7465=938 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 0,938 \rightarrow E4 \rightarrow M_{ch1} = 1,48 \rightarrow M_{ch2} = 0,7083$$

$$M_{ch1} = 1,48 \rightarrow E1 \rightarrow \frac{A_{ch1}}{A_1^*} = \frac{A_{ch1}}{A_g} = 1,163 \rightarrow A_{ch1} = 1,163 \times 10^{-3}$$

Obs: Se $p_d = 600 \text{ kPa}$

$$\frac{p_d}{p_{o2}} = \frac{600}{909,7} = 0,660 < \frac{p_{ch2}}{p_{o2}} = 0,733$$

Choque 3D na saída