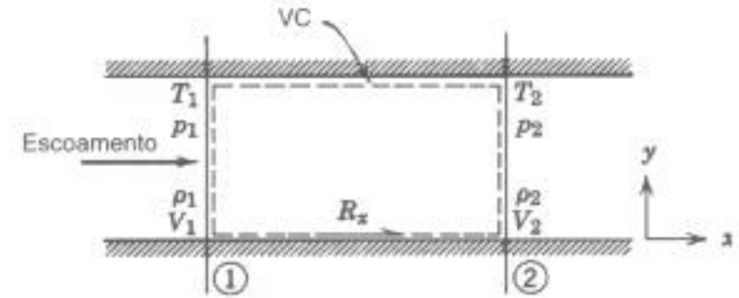
ESCOAMENTO ADIABÁTICO COM ATRITO EM DUTO DE ÁREA CONSTANTE.

PROBLEMA DE FANNO.



- gás ideal
- c_p e c_v constantes
- área constante
- $\dot{Q} = 0$

- **equações governantes**:

(1) massa: $\rho_1 \; V_1 = \rho_2 \; V_2 = \dfrac{\dot{m}}{A}$

(2) quantidade de movimento: $R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} \; (V_2 - V_1)$

(3) energia: $\left(h_2 + \dfrac{V_2^2}{2} \right) = \left(h_1 + \dfrac{V_1^2}{2} \right) = \text{constante} = h_o$

(4) 2ª lei da termodinâmica: $s_2 - s_1 > 0 \quad ; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \dfrac{T_2}{T_1} - R \ln \dfrac{p_2}{p_1}$

(5) equação de estado: $\dfrac{p_1}{\rho_1 \; T_1} = \dfrac{p_2}{\rho_2 \; T_2}$

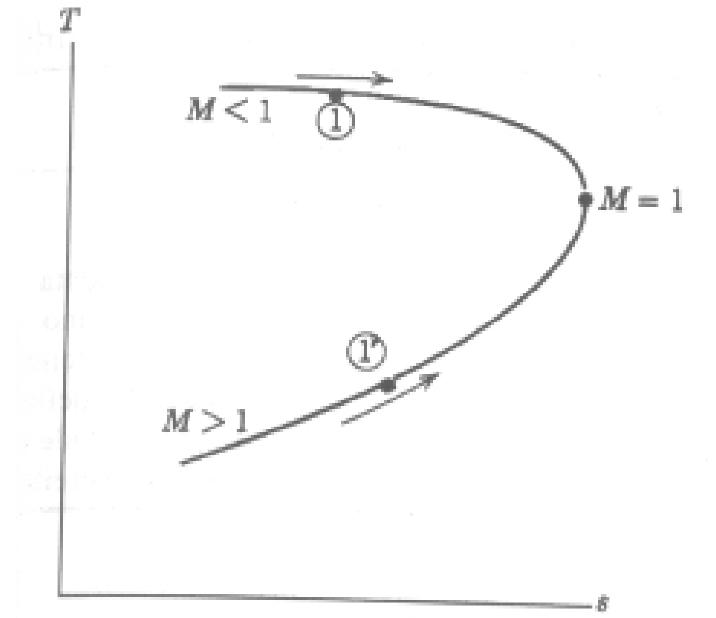
(6) equação de estado $h_2 - h_1 = c_p \; (T_2 - T_1)$

Temos 6 equações, porém temos 7 incógnitas (ρ_2, V_2, p2, h_2, T_2, s_2, R_x). Novamente, temos um problema indeterminado a menos que alguma condição em (2) seja conhecida.

❑Conhecendo todas as condições do estado (1), pode-se determinar quais são os possíveis estados (2) que satisfazem as equações acima. A curva temperatura-entropia resultante é chamada de *linha de Fanno*.

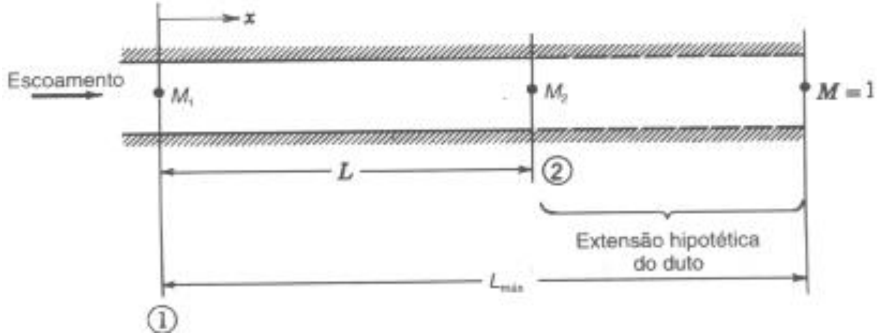
- A **linha de Fanno** pode ser traçada, utilizando-se o seguinte procedimento:

  - definir um valor arbitrário de V_2
  - obter ρ_2 utilizando a equação (1)
  - obter h_2 utilizando a equação (3)
  - obter T_2 de (6) e p_2 de (5)
  - obter s_2 de (4)
  - obter R_x de (2)



- ❑ Note que o ponto de entropia máxima corresponde a M=1.
- ❑ Se o escoamento é subsônico na entrada de uma tubulação com atrito, o Mach irá crescer ao longo da tubulação até o valor máximo de M=1
- ❑ Se o escoamento é supersônico na entrada de uma tubulação com atrito, o Mach irá decrescer ao longo da tubulação até o valor mínimo de M=1
- ❑ Define-se como *comprimento máximo da tubulação, L_{max}* o comprimento necessário para se atingir M = 1 na saída, a partir de um determinado Mach na entrada.

- Se o escoamento é supersônico na entrada, com Mach igual a M_1, o comprimento máximo da tubulação é $L_{max,1}$. Se o comprimento da tubulação for maior que $L_{max,1}$, ocorrerá um choque normal. (O choque é um processo irreversível, associado com elevadíssimas desacelerações, levando o escoamento do regime supersônico para o regime subsônico em uma distância de microns.) Como após o choque o escoamento é subsônico, o Mach irá crescer ao longo da tubulação.
- Se o escoamento é subsônico na entrada, com Mach igual a M_1, o comprimento máximo da tubulação é $L_{max,1}$. Se o comprimento da tubulação for maior que $L_{max,1}$, o escoamento estará bloqueado, isto é, as condições de montante serão alteradas, de tal forma que o Mach da saída será igual a 1.
- O comprimento máximo da tubulação para se atingir Mach igual a um, depende do Mach na entrada. Este parâmetro pode auxiliar determinar o comprimento necessário de tubulação para se levar o escoamento com Mach na entrada igual a M_1 até o Mach na saída igual a M_2.



$$L = L_{max,1} - L_{max,2}$$

onde

$L_{max,1}$ é função de M_1

$L_{max,2}$ é função de M_2

FUNÇÕES DO ESCOAMENTO DE FANNO

- condições de referência: condição crítica

$$\frac{T}{T^*}=\frac{T/T_o}{T^*/T_o}=\frac{\dfrac{1}{\left[1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right]}}{\dfrac{1}{\left[1+\dfrac{k-1}{2}\right]}}$$

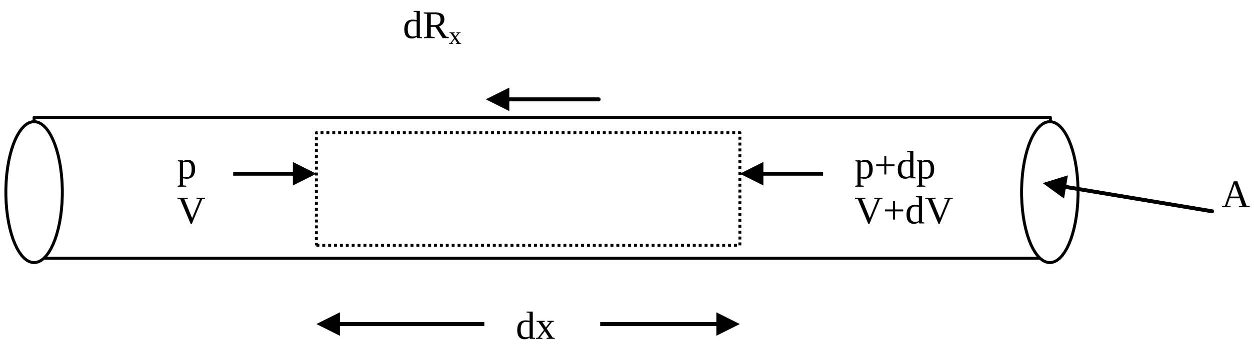
$$\boxed{\frac{T}{T^*}=\frac{k+1}{2\left[1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right]}}$$

$$\frac{V}{V^*}=\frac{M\ c}{c^*}=M\sqrt{\frac{T}{T^*}}\quad;\quad\frac{\rho}{\rho^*}=\frac{V^*}{V}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{T^*}{T}}\quad;\quad\frac{p}{p^*}=\frac{\rho}{\rho^*}\frac{T}{T^*}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*}=\frac{p_o/p}{p_o^*/p^*}\frac{p}{p^*}=\frac{\left[1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right]^{\frac{k}{k-1}}}{\left[\dfrac{k+1}{2}\right]^{\frac{k}{k-1}}}\frac{1}{M}\sqrt{\frac{k+1}{2\left[1+\dfrac{k-1}{2}M^2\right]}}$$

As relações acima só dependem de k e M. Este valores são tabelados em função de M para $k=1,4$ (que corresponde ao ar)

Para obter uma expressão relacionada com o atrito, faremos um balanço de quantidade de movimento em um volume de controle infinitesimal:



$$\sum F_{sx} = \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \bullet \vec{n}\, dA \Rightarrow -dR_x + p\,A - (p + dp)\,A = \rho\,V\,A\,[\,V + dV - V\,]$$

$$-\frac{dR_x}{A} - dp = \rho\,V\,dV$$

Sabemos que $dR_x = \tau_s\,P_m\,dx$; $\tau_s = \dfrac{f}{4}\rho\dfrac{V^2}{2}$; $D_h = \dfrac{4\,A}{P_m}$

e $\rho = p\,/\,(R\,T)$; $M = V\,/\,c$; $c = \sqrt{k\,R\,T}$; $\dfrac{T_o}{T} = \left[1 + \dfrac{k-1}{2}M^2\right]$; T_o = cte

Substituindo e rearrumando, obtém-se $$\frac{f}{D_h}\,dx = \frac{1-M^2}{\left[1+\frac{k-1}{2}M^2\right]}\,\frac{d(M^2)}{k\,M^4}$$

Integrando esta equação de M genérico em x=0 até M=1 em $x = L_{max}$,

$$\int_0^{L_{\max}} \frac{f}{D_h}\,dx = \int_M^1 \frac{1-M^2}{\left[1+\frac{k-1}{2}M^2\right]}\,\frac{d(M^2)}{k\,M^4}$$

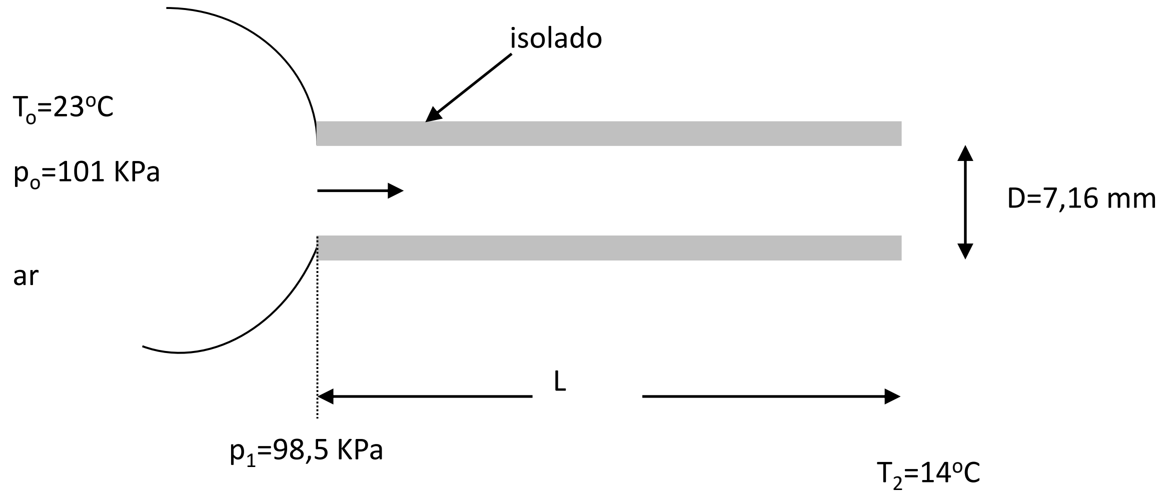
assumindo *f* igual a constante, obteremos a seguinte expressão

$$\frac{f\;L_{\max}}{D_h} = \frac{1-M^2}{k\,M^2} + \frac{k+1}{2\,k}\,\ln\left[\frac{(k+1)\;M^2}{2\left(1+\frac{k-1}{2}\right)M^2}\right]$$

a qual também pode ser tabelada em função de Mach para *k=1,4*

Exemplo: ar: $k=1,4$ e $R=287$ N m/ (Kg K).

Determine: **(a)** = M2 ? ; **(b)**s_2-s_1=? ; **(c)**Força sobre o duto = ?, **(d)**L = ?



To1=To2 , T2/To=(14+273)/(23+273)=0,9696 ⇒E1 ⇒ M2=0,40

s2-s1=cp ln (T2/T1) – R ln (p2/p1)

p1/po1= 98,5/101=0,9752 ⇒E1 ⇒ M1=0,19 ⇒ T1/To=0,9927 ⇒ T1=293,8K

M1=0,19 ⇒ E2 ⇒ p1/p*=5,75 ⇒ p*=98,5/5,75=17,1 kPa

M2=0,40 ⇒ E2 ⇒ p2/p*=2,696 ⇒ p2=2,696 x p*=46,18 kPa

s2-s1=1004 ln (287/296) – 287 ln (46,18/98,5)=186,4 N m/kg K

$Rx + p1\ A - p2\ A = m\_dot\ (V2-V1)$

$m\_dot=\rho 1\ V1\ A= \rho 2\ V2\ \ A$

$\rho 1 = P1/(R\ T1)= 98,5 \times 10^3/(287 \times 293,8)=1,168\ kg/m^3$

$V1 = M1/(k\ R\ T1)^{0,5}= 0,19\ x(1,4 \times 287 \times 293,8)^{0,5}=65,2\ m/s$

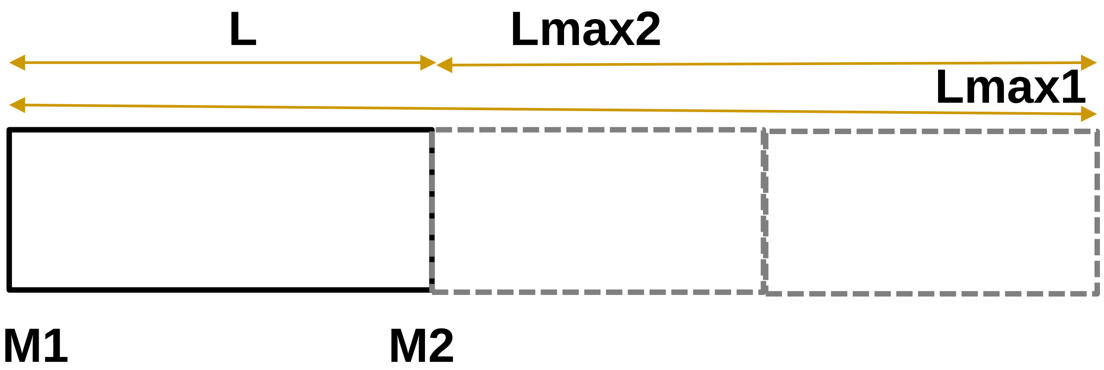
$A = \pi\ D^2/4=4,06 \times 10^{-5}\ m^2$

$m\_dot=\rho 1\ V1\ A=1,168x65,2x4,06 \times 10^{-5} =0,00309\ kg/s$

$V2 = M2/(k\ R\ T2)^{0,5}= 0,4\ x(1,4 \times 287 \times 287)^{0,5}=135,8\ m/s$

$Rx =(p2 - p1)\ A + m\_dot\ (V2-V1) =$

$Rx= (46,18-98,5) \times 10^3\ x4,06 \times 10^{-5} +0,00309(135,8 - 65,2)= - 1, 91\ N$



L = Lmax1 - Lmax2

M1=0,19 ⇒ E2 ⇒ f Lmax/D)1=16,53

M2=0,40 ⇒ E2 ⇒ f Lmax/D)2=2,309

f L/D = f Lmax/D)1 – f Lmax/D)2=16,53-2,309=14,221

Re= ρ1 V1 D/μ1 = ρ2 V2 D/μ2

ρ1 V1 = ρ2 V2 e μ1 ≈ μ2 =1,02x10^{-5} Pa s⇒ f = cte

Re= ρ1 V1 D/μ1 = 1,168 x 65,2 x 7,19 x 10^{-3} / 1,02x10^{-5}=53680 ⇒Moody ⇒ f=0,021

L =14,221 x D/f = 4,85 m

Exercício: Deseja-se construir uma seção de teste de ferro fundido com área constante igual a 0,0507 m^2. O duto, térmicamente isolado, é alimentado por um bocal convergente-divergente, tal que na entrada da seção de teste tem-se M_1=2,1, sendo a pressão e temperatura de estagnação iguais a T_o=595 K e p_o=300 KPa, respectivamente. Deseja-se na saída da seção de teste M_2=1,1. Determine a pressão e temperatura na saída, a variação de entropia e o comprimento da seção de teste.

T2= T2/T1 x T1 = T2/T* x T*/T1 x T1

p2= p2/p1 x p1 = p2/p* x p*/p1 x p1

M1=2,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ T1/T*=0,6376

M1=2,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ p1/p*=0,3802

M2=1,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ T2/T*=0,9662

M2=1,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ p2/p*=0,8936

M1=2,1 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ T1/To=0,5314 $\Rightarrow$T1=0,5314x595=316K

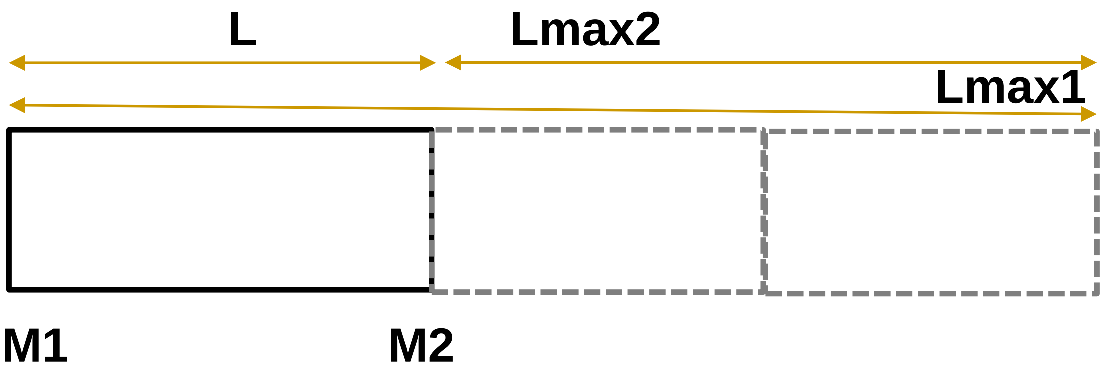
M1=2,1 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ p1/po1=0,1094 $\Rightarrow$p1=0,1094x300=30,42 kPa

T2= T2/T* x T*/T1 x T1 = 0,9662 / 0,6376 x 316 = 478,8 K

p2= p2/p* x p*/p1 x p1 = 0,8936 / 0,3802 x 30,42 = 71,5 kPa

s2-s1=cp ln (T2/T1)–R ln (p2/p1)

s2-s1=1004 ln (478,8/316)–287 ln (71,5/30,42)=172 N m/kg K



L = Lmax1 - Lmax2

$D= (4\ A/\pi)^{0,5}=$

$D=(4\ x0,0507/p)^{0,5}=0,254\ m=10\ in$

M1=2,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ f Lmax/D)1=0,3339

M2=1,1 $\Rightarrow$ E2 $\Rightarrow$ f Lmax/D)2=0,009935

Ferro fundido e/D=0,001

f L/D = f Lmax/D)1 – f Lmax/D)2=0,3339-0,009935=0,323965

$Re= \rho 1\ V1\ D/\mu 1 = \rho 2\ V2\ D/\mu 2$ $\quad$ $\rho 1\ V1 = \rho 2\ V2$ e $\mu 1 \approx \mu 2 = 1,02x10^{-5}$ Pa s $\Rightarrow$ f = cte

$\rho 1 = P1/(R\ T1) = 30,42\ x\ 10^3/(287\ x\ 316) = 0,335\ kg/m^3$

$V1 = M1/(k\ R\ T1)^{0,5} = 2,1\ x(1,4\ x\ 287\ x\ 316)^{0,5} = 748\ m/s$

$Re= \rho 1\ V1\ D/\mu 1 = 0,335\ x\ 748x\ 0,254\ /\ 1,02x10^{-5} = 6,24\ x\ 10^7$

$Re= 6,24\ x\ 10^7$ e e/D=0,001 $\Rightarrow$**Moody $\Rightarrow$ f=0,02**

L =0,323965 x D/f = 0,323965 x 0,254/0,02=4,11 m