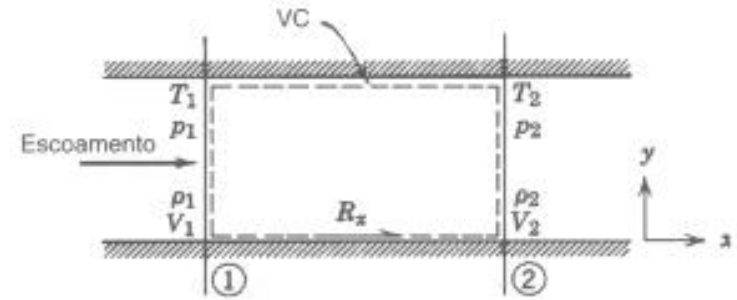


ESCOAMENTO ADIABÁTICO COM ATRITO EM DUTO DE ÁREA CONSTANTE. PROBLEMA DE FANNO.



- equações governantes:

$$(1) \text{ massa: } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{m}}{A}$$

$$(2) \text{ quantidade de movimento: } R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

$$(3) \text{ energia: } \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) = \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \text{constante} = h_o$$

$$(4) \text{ 2ª lei da termodinâmica: } s_2 - s_1 > 0 \quad ; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$(5) \text{ equação de estado: } \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

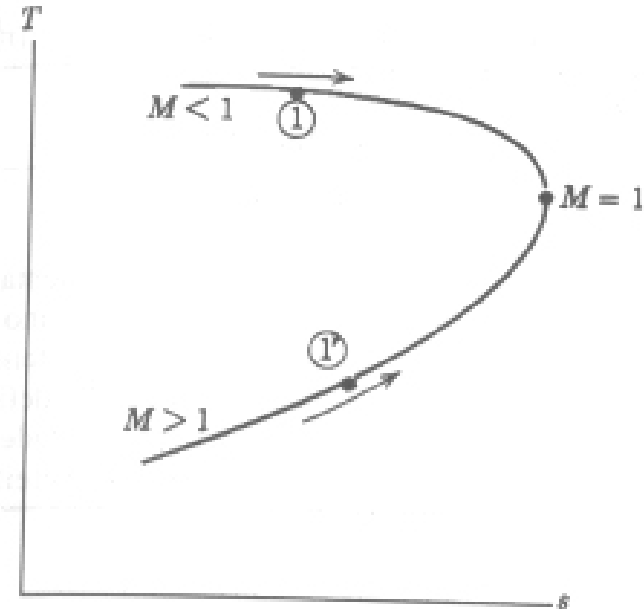
$$(6) \text{ equação de estado } h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

- gás ideal
- c_p e c_v constantes
- área constante
- $\dot{Q} = 0$

Temos 6 equações, porém temos 7 incógnitas ($\rho_2, V_2, p_2, h_2, T_2, s_2, R_x$). Novamente, temos um problema indeterminado a menos que alguma condição em (2) seja conhecida.

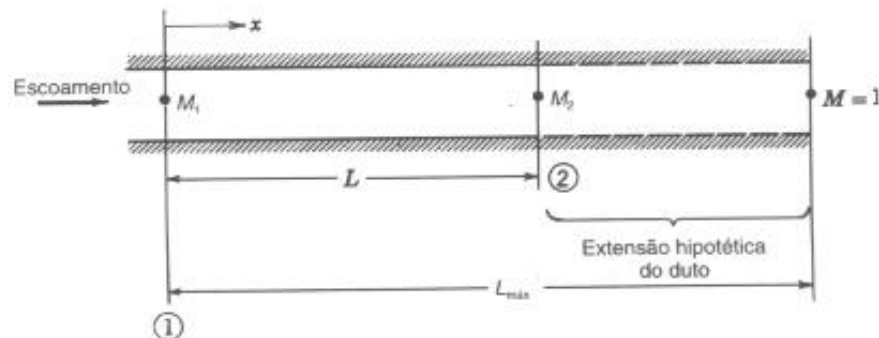
□ Conhecendo todas as condições do estado (1), pode-se determinar quais são os possíveis estados (2) que satisfazem as equações acima. A curva temperatura-entropia resultante é chamada de *linha de Fanno*.

- A **linha de Fanno** pode ser traçada, utilizando-se o seguinte procedimento:
 - definir um valor arbitrário de V_2
 - obter ρ_2 utilizando a equação (1)
 - obter h_2 utilizando a equação (3)
 - obter T_2 de (6) e p_2 de (5)
 - obter s_2 de (4)
 - obter R_x de (2)



- Note que o ponto de entropia máxima corresponde a $M=1$.
- Se o escoamento é subsônico na entrada de uma tubulação com atrito, o Mach irá crescer ao longo da tubulação até o valor máximo de $M=1$
- Se o escoamento é supersônico na entrada de uma tubulação com atrito, o Mach irá decrescer ao longo da tubulação até o valor mínimo de $M=1$
- Define-se como *comprimento máximo da tubulação*, L_{max} o comprimento necessário para se atingir $M = 1$ na saída, a partir de um determinado Mach na entrada.

- Se o escoamento é supersônico na entrada, com Mach igual a M_1 , o comprimento máximo da tubulação é $L_{max,1}$. Se o comprimento da tubulação for maior que $L_{max,1}$, ocorrerá um choque normal. (O choque é um processo irreversível, associado com elevadíssimas desacelerações, levando o escoamento do regime supersônico para o regime subsônico em uma distância de microns.) Como após o choque o escoamento é subsônico, o Mach irá crescer ao longo da tubulação.
- Se o escoamento é subsônico na entrada, com Mach igual a M_1 , o comprimento máximo da tubulação é $L_{max,1}$. Se o comprimento da tubulação for maior que $L_{max,1}$, o escoamento estará bloqueado, isto é, as condições de montante serão alteradas, de tal forma que o Mach da saída será igual a 1.
- O comprimento máximo da tubulação para se atingir Mach igual a um, depende do Mach na entrada. Este parâmetro pode auxiliar determinar o comprimento necessário de tubulação para se levar o escoamento com Mach na entrada igual a M_1 até o Mach na saída igual a M_2 .



$$L = L_{max,1} - L_{max,2}$$

onde

$L_{max,1}$ é função de M_1

$L_{max,2}$ é função de M_2

FUNÇÕES DO ESCOAMENTO DE FANNO

- condições de referência: condição crítica

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T / T_o}{T^* / T_o} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]}$$

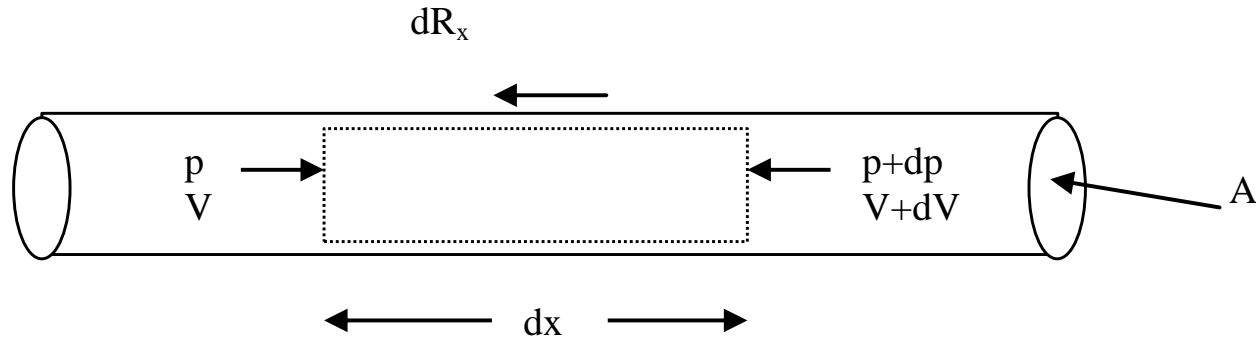
$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2 \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{M c}{c^*} = M \sqrt{\frac{T}{T^*}} \quad ; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{T^*}{T}} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{T}{T^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{p_o / p}{p_o^* / p^*} \frac{p}{p^*} = \frac{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{\frac{k}{k-1}}}{\left[\frac{k+1}{2}\right]^{\frac{k}{k-1}}} \frac{1}{M} \sqrt{\frac{k+1}{2 \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]}}$$

As relações acima só dependem de k e M . Este valores são tabelados em função de M para $k=1,4$ (que corresponde ao ar)

Para obter uma expressão relacionada com o atrito, faremos um balanço de quantidade de movimento em um volume de controle infinitesimal:



$$\sum_{SC} F_{sx} = \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \Rightarrow -dR_x + p A - (p + dp) A = \rho V A [V + dV - V]$$

$$-\frac{dR_x}{A} - dp = \rho V dV$$

Sabemos que $dR_x = \tau_s P_m dx$; $\tau_s = \frac{f}{4} \rho \frac{V^2}{2}$; $D_h = \frac{4 A}{P_m}$

e $\rho = p / (R T)$; $M = V / c$; $c = \sqrt{k R T}$; $\frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]$; $T_o = \text{cte}$

Substituindo e rearrumando, obtém-se
$$\frac{f}{D_h} dx = \frac{1 - M^2}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]} \frac{d(M^2)}{k M^4}$$

Integrando esta equação de M genérico em $x=0$ até $M=1$ em $x = L_{max}$,

$$\int_0^{L_{max}} \frac{f}{D_h} dx = \int_M^1 \frac{1 - M^2}{\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]} \frac{d(M^2)}{k M^4}$$

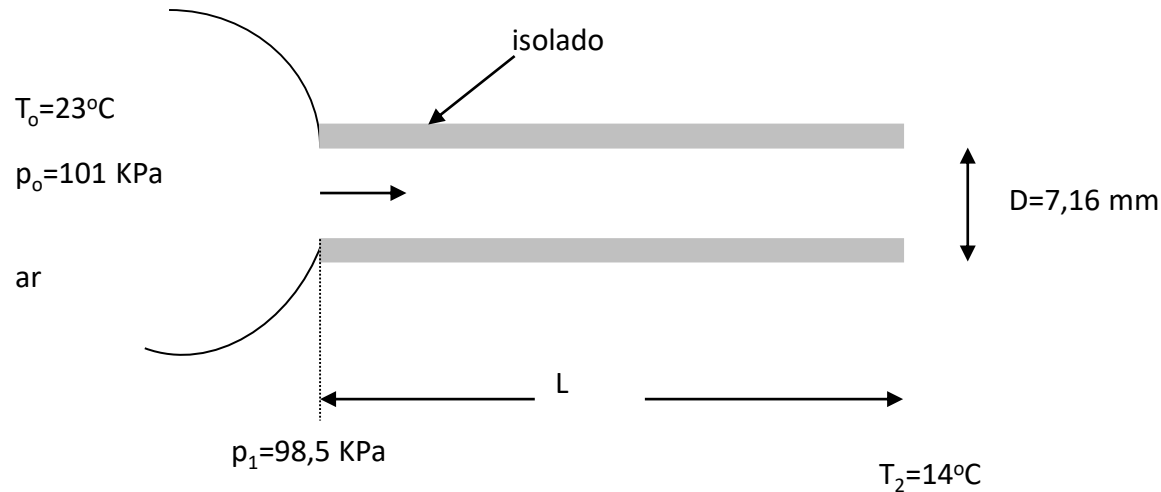
assumindo f igual a constante, obteremos a seguinte expressão

$$\frac{f L_{max}}{D} = \frac{1 - M^2}{k M^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left[\frac{M^2}{\left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \right]$$

Para $k=1.4$ esta função está tabela

Exemplo: ar: $k=1,4$ e $R= 287 \text{ N m/ (Kg K)}$.

Determine: **(a)** M_2 ? ; **(b)** $s_2-s_1=?$; **(c)** Força sobre o duto = ? , **(d)** $L = ?$



$$T_{o1}=T_{o2} \quad , \quad T_2/T_o=(14+273)/(23+273)=0,9696 \Rightarrow E1 \Rightarrow M_2=0,40$$

$$s_2-s_1=c_p \ln (T_2/T_1) - R \ln (p_2/p_1)$$

$$p_1/p_{o1}= 98,5/101=0,9752 \Rightarrow E1 \Rightarrow M_1=0,19 \Rightarrow T_1/T_o=0,9927 \Rightarrow T_1=293,8\text{K}$$

$$M_1=0,19 \Rightarrow E2 \Rightarrow p_1/p^*=5,75 \Rightarrow p^*=98,5/5,75=17,1 \text{ kPa}$$

$$M_2=0,40 \Rightarrow E2 \Rightarrow p_2/p^*=2,696 \Rightarrow p_2=2,696 \times p^*=46,18 \text{ kPa}$$

$$s_2-s_1=1004 \ln (287/293,8) - 287 \ln (46,18/98,5)=186,4 \text{ N m/kg K}$$

$$R_x + p_1 A - p_2 A = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A$$

$$\rho_1 = P_1 / (R T_1) = 98,5 \times 10^3 / (287 \times 293,8) = 1,168 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = M_1 \times (k R T_1)^{0,5} = 0,19 \times (1,4 \times 287 \times 293,8)^{0,5} = 65,2 \text{ m/s}$$

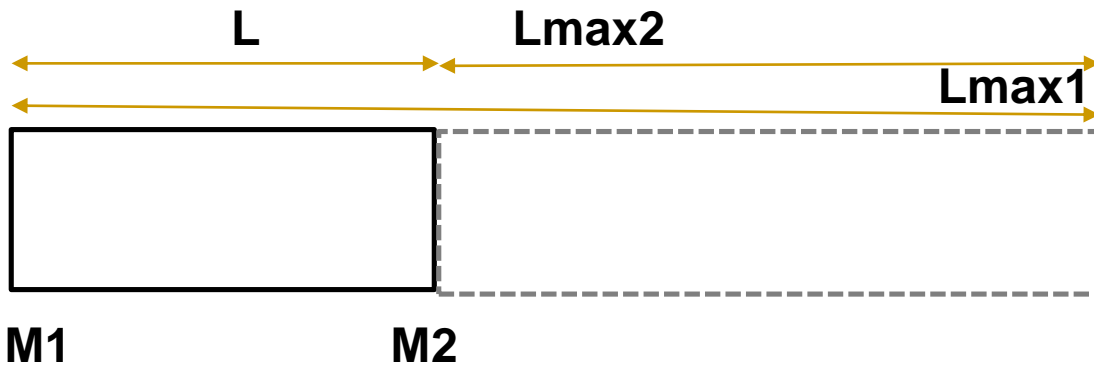
$$A = \pi D^2 / 4 = 4,06 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A = 1,168 \times 65,2 \times 4,06 \times 10^{-5} = 0,00309 \text{ kg/s}$$

$$V_2 = M_2 \times (k R T_2)^{0,5} = 0,4 \times (1,4 \times 287 \times 287)^{0,5} = 135,8 \text{ m/s}$$

$$R_x = (p_2 - p_1) A + \dot{m} (V_2 - V_1) =$$

$$R_x = (46,18 - 98,5) \times 10^3 \times 4,06 \times 10^{-5} + 0,00309 (135,8 - 65,2) = -1,91 \text{ N}$$



$$L = L_{max1} - L_{max2}$$

$$M1=0,19 \Rightarrow E2 \Rightarrow f L_{max}/D)1=16,53$$

$$M2=0,40 \Rightarrow E2 \Rightarrow f L_{max}/D)2=2,309$$

$$f L/D = f L_{max}/D)1 - f L_{max}/D)2=16,53-2,309=14,221$$

$$Re = \rho_1 V_1 D/\mu_1 = \rho_2 V_2 D/\mu_2$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad e \quad \mu_1 \approx \mu_2 = 1,02 \times 10^{-5} \text{ Pa s} \Rightarrow f = \text{cte}$$

$$Re = \rho_1 V_1 D/\mu_1 = 1,168 \times 65,2 \times 7,19 \times 10^{-3} / 1,02 \times 10^{-5} = 53680 \Rightarrow \text{Moody} \Rightarrow f=0,021$$

$$L = 14,221 \times D/f = 4,85 \text{ m}$$

Exercício: Deseja-se construir uma seção de teste de ferro fundido com área constante igual a $0,0507 \text{ m}^2$. O duto, térmicamente isolado, é alimentado por um bocal convergente-divergente, tal que na entrada da seção de teste tem-se $M_1=2,1$, sendo a pressão e temperatura de estagnação iguais a $T_o=595 \text{ K}$ e $p_o=300 \text{ KPa}$, respectivamente. Deseja-se na saída da seção de teste $M_2=1,1$. Determine a pressão e temperatura na saída, a variação de entropia e o comprimento da seção de teste.

$$T_2 = T_2/T_1 \times T_1 = T_2/T^* \times T^*/T_1 \times T_1 \quad p_2 = p_2/p_1 \times p_1 = p_2/p^* \times p^*/p_1 \times p_1$$

$$M_1=2,1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow T_1/T^*=0,6376$$

$$M_2=1,1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow T_2/T^*=0,9662$$

$$M_1=2,1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow p_1/p^*=0,3802$$

$$M_2=1,1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow p_2/p^*=0,8936$$

$$M_1=2,1 \Rightarrow E_1 \Rightarrow T_1/T_o=0,5314 \Rightarrow T_1=0,5314 \times 595=316 \text{ K}$$

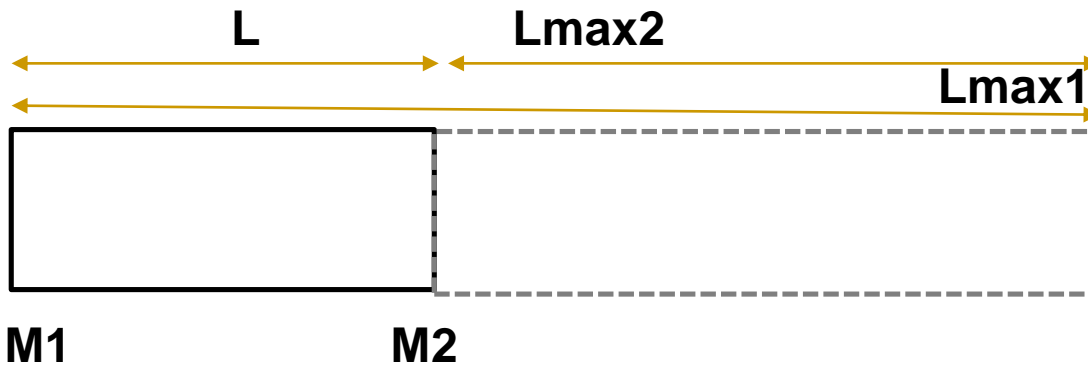
$$M_1=2,1 \Rightarrow E_1 \Rightarrow p_1/p_o=0,1094 \Rightarrow p_1=0,1094 \times 300=32,82 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_2/T^* \times T^*/T_1 \times T_1 = 0,9662 / 0,6376 \times 316 = 478,8 \text{ K}$$

$$p_2 = p_2/p^* \times p^*/p_1 \times p_1 = 0,8936 / 0,3802 \times 32,82 = 71,1 \text{ kPa}$$

$$s_2-s_1 = c_p \ln (T_2/T_1) - R \ln (p_2/p_1)$$

$$s_2-s_1 = 1004 \ln (478,8/316) - 287 \ln (71,1/30,42) = 172 \text{ N m/kg K}$$



$$D = (4 A / \pi)^{0,5} =$$

$$D = (4 \times 0,0507 / \pi)^{0,5} = 0,254 \text{ m} = 10 \text{ in}$$

$$\text{Ferro fundido } e/D = 0,001$$

$$M1 = 2,1 \Rightarrow E2 \Rightarrow f_{L_{max}/D}1 = 0,3339$$

$$M2 = 1,1 \Rightarrow E2 \Rightarrow f_{L_{max}/D}2 = 0,009935$$

$$f_{L/D} = f_{L_{max}/D}1 - f_{L_{max}/D}2 = 0,3339 - 0,009935 = 0,323965$$

$$Re = \rho_1 V_1 D / \mu_1 = \rho_2 V_2 D / \mu_2 \quad \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad e \quad \mu_1 \approx \mu_2 = 1,02 \times 10^{-5} \text{ Pa s} \Rightarrow f = \text{cte}$$

$$\rho_1 = P_1 / (R T_1) = 32,82 \times 10^3 / (287 \times 316) = 0,362 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = M_1 \times (k R T_1)^{0,5} = 2,1 \times (1,4 \times 287 \times 316)^{0,5} = 748 \text{ m/s}$$

$$Re = \rho_1 V_1 D / \mu_1 = 0,335 \times 748 \times 0,254 / 1,02 \times 10^{-5} = 6,24 \times 10^7$$

$$Re = 6,24 \times 10^7 \quad e \quad e/D = 0,001 \Rightarrow \text{Moody} \Rightarrow f = 0,02$$

$$L = 0,323965 \times D / f = 0,323965 \times 0,254 / 0,02 = 4,11 \text{ m}$$