

ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO EM DUTO DE ÁREA VARIÁVEL.

- equações governantes:

(1) massa: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m}$

(2) quantidade de movimento: $R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} (V_2 - V_1)$

(3) energia: $\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) = \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right)$

(4) 2ª lei da termodinâmica: $s_2 = s_1$

(5) equação de estado: $\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$

(6) equação de estado $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$

(7) equação a do processo: $\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$

Temos 7 equações, porém temos 8 incógnitas ($\rho_2, V_2, A_2, p_2, h_2, T_2, s_2, R_x$). Isto significa que o problema é indeterminado a menos que alguma condição em (2) seja conhecida.

ESCOAMENTO ISOENTROPICO

□ Conhecendo uma condição em (2), podemos determinar todas as outras variáveis, porém temos que resolver um sistema de 7 equações e 7 incógnitas. Gostaríamos de poder resolver o problema de alguma outra forma mais fácil. Isto é possível, se utilizarmos as propriedades de estagnação isoentrópicas.

□ Observe que $h + V^2/2 = \text{constante} = h_o$.

Logo $h_1 + V_1^2/2 = \text{constante} = h_{o,1}$ e $h_2 + V_2^2/2 = \text{constante} = h_{o,2}$ mas

$h_1 + V_1^2/2 = h_2 + V_2^2/2$ então $h_{o,1} = h_{o,2}$

Observe também que $s_2 = s_1$ e que $s_2 = s_{o,2}$ e $s_1 = s_{o,1}$ logo $s_{o,1} = s_{o,2}$

Como sabemos que o estado termodinâmico fica determinado em função de somente duas variáveis, se h e s se mantêm constante, então todas as outras grandezas também se mantêm constantes, isto é

$T_{o,1} = T_{o,2}$; $P_{o,1} = P_{o,2}$; $\rho_{o,1} = \rho_{o,2}$, etc

Este fato pode auxiliar resolver problemas, pois

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{o,2}} \underbrace{\frac{T_{o,2}}{T_{o,1}}}_{1} \frac{T_{o,1}}{T_1} \qquad \frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]$$

Portanto, sabendo M_1 , podemos T_1/T_o e sabendo M_2 , podemos T_2/T_o , logo podemos determinar T_2 . De forma análoga podemos determinar todas as outras variáveis, já que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_o} \frac{p_o}{p_1} \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_o} \frac{\rho_o}{\rho_1}$$

$$\text{e} \quad \frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{k/(k-1)} \quad ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{1/(k-1)}$$

Como vimos as relações p/p_o ; T/T_o , ρ/ρ_o só dependem de k e M . Este valores são tabelados em função de M para $k=1,4$ (que corresponde ao ar)

Para a área utilizamos a área crítica como referência

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} \quad ; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2}{(k+1)/2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

a razão A/A^* também é tabelada.

Efeito da variação da área

- continuidade: $\rho V A = \text{cte}$ derivando e dividindo por $\rho V A$
obtemos

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{I})$$

- Equação de Euler: $\frac{dp}{\rho} + \frac{dV^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \quad (\text{II})$

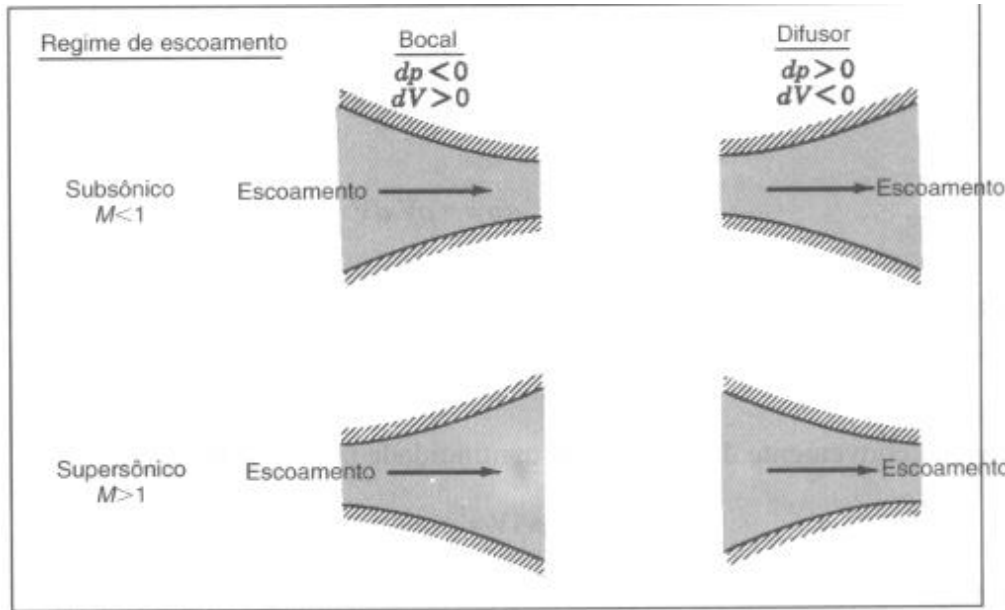
Combinando (I) e (II)

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho V^2} = \frac{dp}{\rho V^2} \left[1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right] = \frac{dp}{\rho V^2} \left[1 - \frac{V^2}{c^2} \right]$$

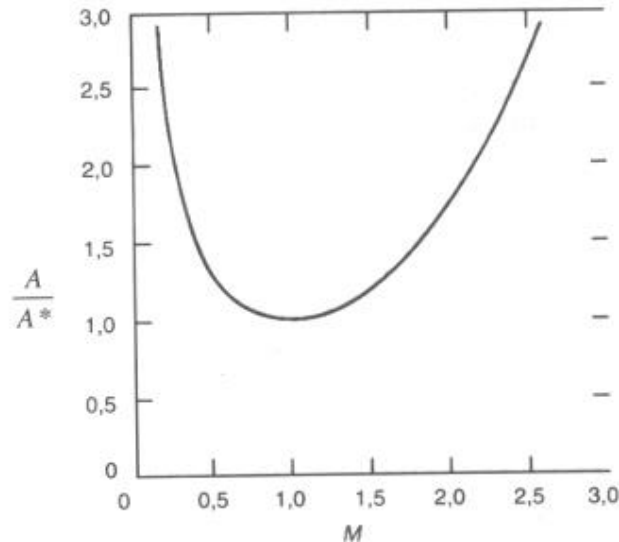
$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} [1 - M^2] \quad \text{ou} \quad \frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} [1 - M^2]$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} [1 - M^2]$$

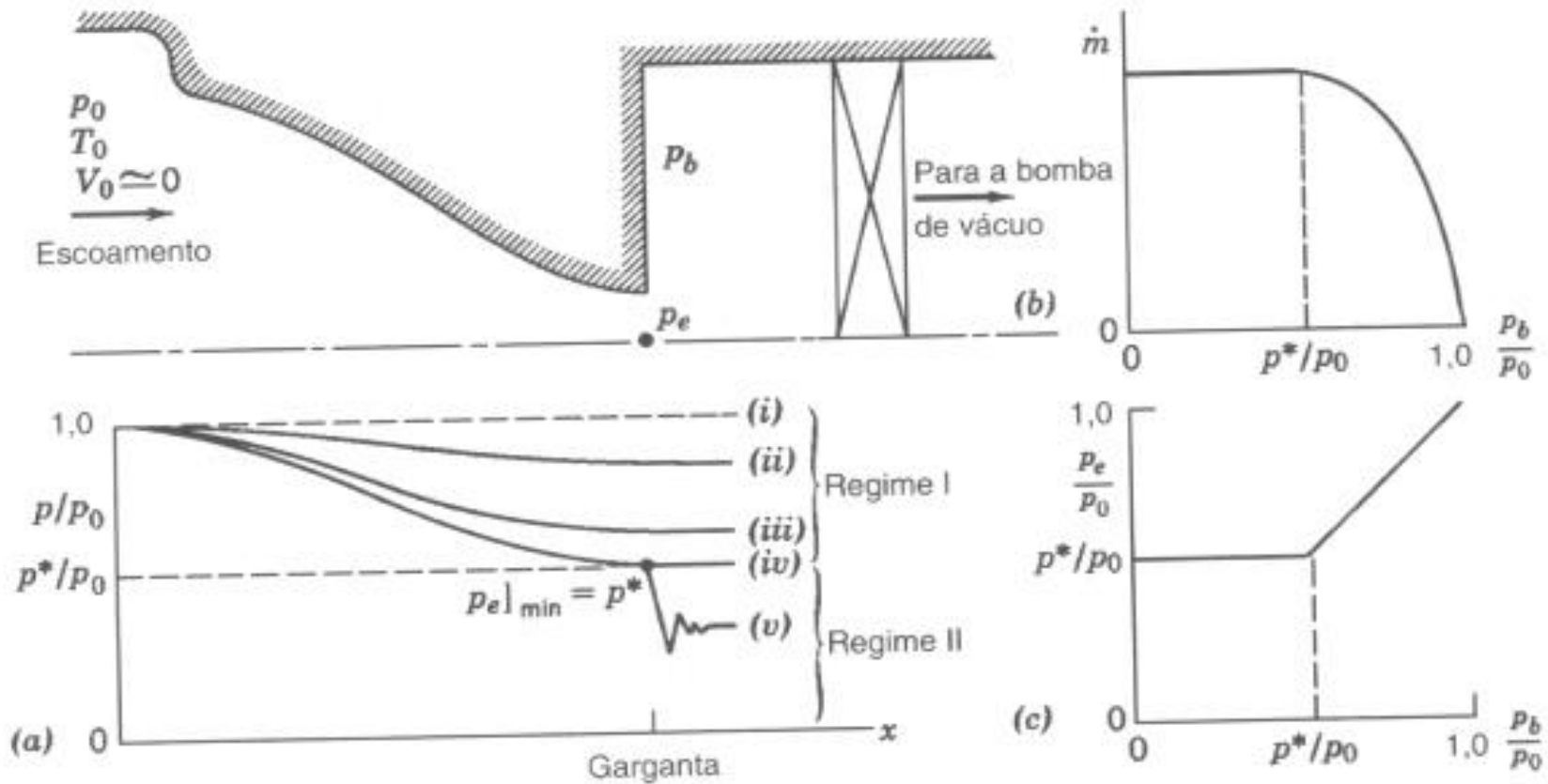
$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} [1 - M^2]$$



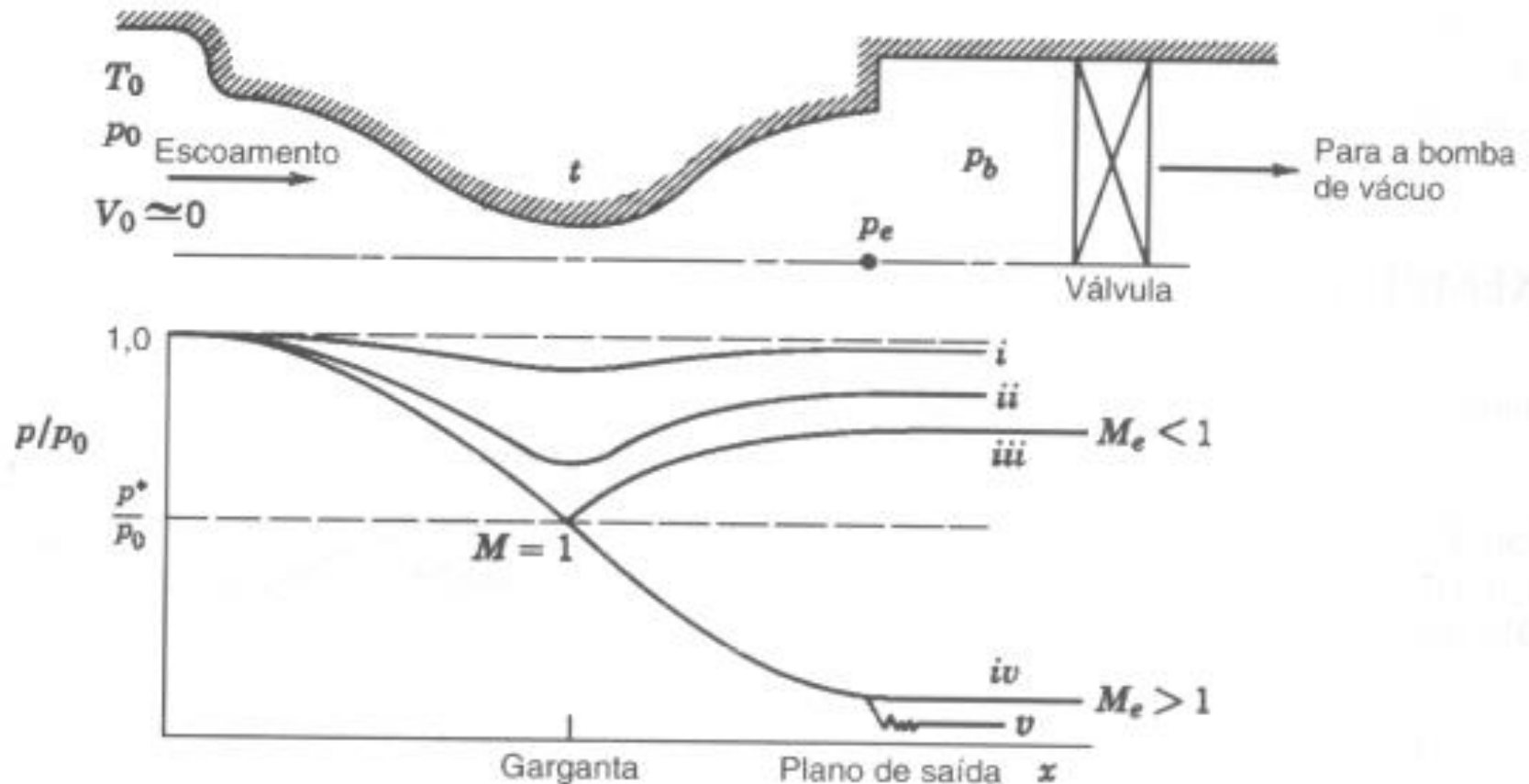
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2}{(k+1)/2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$



Condições de operação em um bocal convergente (escoamento isoentrópico)



Condições de operação em um bocal convergente-divergente (escoamento isoentrópico)



Exemplo 1: Ar escoia isoentropicamente num duto. Na seção (1), o número de Mach é 0,3, a área é 0,001 m² e a pressão absoluta e a temperatura são respectivamente 650 kPa e 60 °C. Na seção (2) , o número de Mach é 0,8. Esboce a forma do bocal e determine as propriedades na seção (2).

$M_1 = 0,3$ e $M_2 = 0,8$. bocal convergente

$$M_1 = 0,3 \rightarrow T_1/T_0 = 0,9823 \rightarrow T_0 = T_1/0,9823 = (60+273) / 0,9823 = 339 \text{ K}$$

$$\rightarrow p_1/p_0 = 0,9395 \rightarrow p_0 = p_1/0,9395 = 650 / 0,9395 = 692 \text{ kPa}$$

$$\rightarrow A_1/A^* = 2,035 \rightarrow A^* = A_1/2,035 = 0,001 / 2,035 = 0,000491 \text{ m}^2$$

$$M_2 = 0,8 \rightarrow T_2/T_0 = 0,8865 \rightarrow T_2 = T_0 * 0,8865 = 300 \text{ K}$$

$$\rightarrow p_2/p_0 = 0,6560 \rightarrow p_2 = p_0 * 0,6560 = 692 * 0,6560 = 454 \text{ kPa}$$

$$\rightarrow A_2/A^* = 1,038 \rightarrow A_2 = A^* / 1,038 = 0,000491 * 1,038 = 0,000510 \text{ m}^2$$

$$\rho_2 = p_2 / (R T_2) = 454 \times 1000 / (287 \times 300) = 5,27 \text{ kg/m}^3$$

$$V_2 = M_2 c_2, \quad c_2 = (k R T_2)^{0,5} = (1,4 \times 287 \times 300)^{0,5} = 347 \text{ m/s} \quad V_2 = 0,8 \times 347 = 278 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho_2 V_2 A_2 = 5,27 \times 278 \times 0,000510 = 0,748 \text{ kg/s}$$

Exemplo 2: Um bocal convergente, com área de garganta de $0,001 \text{ m}^2$ é operado com ar. O bocal é alimentado a partir de uma câmara pressurizada onde a pressão absoluta de estagnação e a temperatura de estagnação são, respectivamente, 1 MPa e $60 \text{ }^\circ\text{C}$. Considere uma contrapressão na saída de 591 kPa (abs). Determine:

- (i) o número de Mach na saída (ii) vazão
 (iii) Área crítica (iv) força no bocal, se $Me=0,3$

$$\frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right] = \left[1 + 0,2 M^2 \right]$$

$$\frac{p_o}{p} = \left[\frac{T_o}{T} \right]^{k/(k-1)} ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left[\frac{T_o}{T} \right]^{1/(k-1)}$$

$p_o=1 \text{ MPa}$; $T_o=60\text{C}+273=333\text{K}$; $A_g=0,001 \text{ m}^2$ bocal convergente

Ar: $R=287 \text{ Nm / (kg K)}$, $k=1,4$

(i) $p_d=591 \text{ kPa}$ $p_d/p_o=0,591 > p^*/p_o=0,528 \rightarrow p_s=p_d$

$p_s/p_o=0,591 \rightarrow E1 \rightarrow M_s=0,9 \rightarrow E1 \rightarrow T_s/T_o=0,8606 \rightarrow T_s=287 \text{ K}$

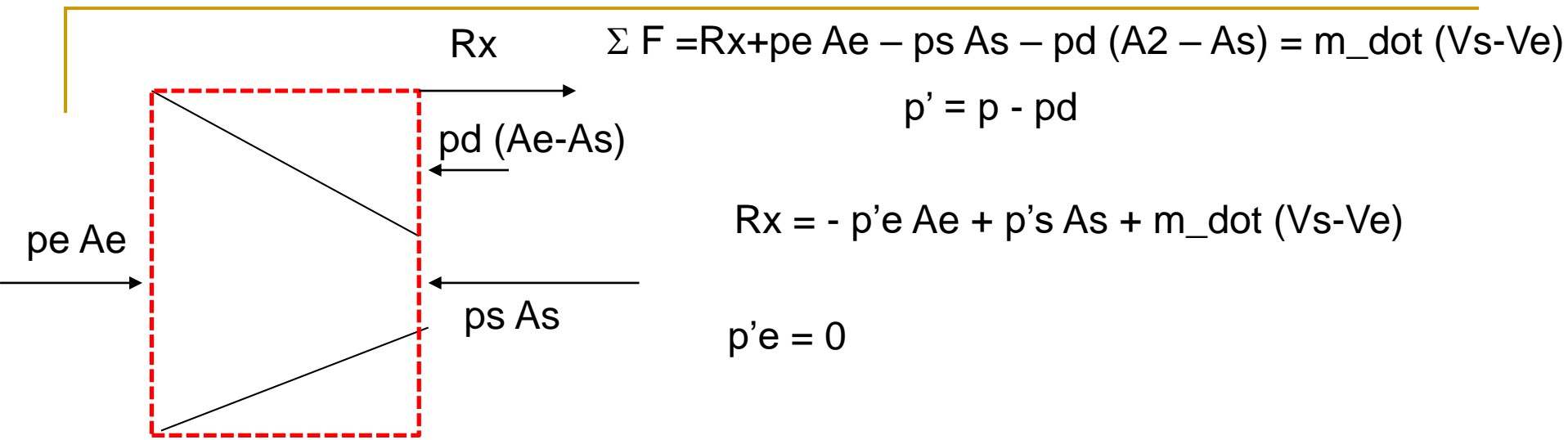
$m_{\text{dot}} = \rho_s V_s A_s$ $\rho_s = p_s / (R T_s) = 591 \times 1000 / (287 \times 287) = 7,17 \text{ kg/m}^3$

$V_s = M_s c_s$; $c_s = (k R T_s)^{0,5} = (1,4 \times 287 \times 287)^{0,5} = 340 \text{ m/s}$; $V_s = 0,9 \times 340 = 306 \text{ m/s}$

$m_{\text{dot}} = \rho_s V_s A_s = 7,17 \times 306 \times 0,001 = 2,19 \text{ kg/s}$

$$\left| \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2}{(k+1)/2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \right|$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + 0,2 M^2}{1,2} \right]^{1,4/0,2} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + 0,2 M^2}{1,2} \right]^{2,4} = \frac{1}{0,9} \left[\frac{1 + 0,2 \times 0,9^2}{1,2} \right]^3 = 1,0089 \rightarrow A^* = 9,91 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$



$M_e = 0,3 \rightarrow T_e/T_o = 0,9823 \rightarrow T_e = T_o \times 0,9823 = 333 \times 0,9823 = 327 \text{ K}$
 $\rightarrow p_e/p_o = 0,9395 \rightarrow p_e = p_o \times 0,9395 = 10^6 \times 0,9395 = 939,5 \text{ kPa}$
 $\rightarrow A_e/A^* = 2,035 \rightarrow A_e = A^* \times 2,035 = 0,000991 \times 2,035 = 0,00202 \text{ m}^2$

$V_e = M_e c_e = M_e (k R T_e)^{0,5} = 108,7 \text{ m/s}$

$R_x = - (939,5 - 591) \times 10^3 \times 2,02 \times 10^{-3} + 2,19 \times (306 - 108,7) = - 703 + 432 = - 271 \text{ N}$ ←

$| K_x | = | R_x |$ → força que o fluido faz no bocal

Para prender o bocal a força deve ser ←

Exemplo 3: Considere o mesmo bocal que no caso anterior. Porém a contra-pressão é 400 kPa (abs). Determine: (i) o número de Mach na saída (ii) vazão (iii) Área crítica

$p_o=1\text{MPa}$; $T_o=60\text{C}+273=333\text{K}$; $A_g=0,001\text{m}^2$ bocal convergente

Ar: $R=287\text{ Nm / (kg K)}$, $k=1,4$

$$\frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right] = \left[1 + 0,2 M^2 \right]$$

$p_d=400\text{ kPa}$ $p_d/p_o=0,400 > p^*/p_o=0,528 \rightarrow p_s=p^*$

$$\frac{p_o}{p} = \left[\frac{T_o}{T} \right]^{k/(k-1)} ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left[\frac{T_o}{T} \right]^{1/(k-1)}$$

$p_s=p^*=528\text{ kPa} \rightarrow M_s=1 \rightarrow E1 \rightarrow T_s/T_o=T^*/T_o=0,8333 \rightarrow T_s=278\text{ K}$

$$m_{\text{dot}} = \rho_s V_s A_s \quad \rho_s = p_s / (R T_s) = 528 \times 1000 / (287 \times 278) = 6,62\text{ kg/m}^3$$

$$V_s = M_s c_s , \quad c_s = (k R T_s)^{0,5} = (1,4 \times 287 \times 278)^{0,5} = 334\text{ m/s} \quad V_s = v^* = c = 334\text{ m/s}$$

$$m_{\text{dot}} = \rho_s V_s A_s = 6,62 \times 334 \times 0,001 = 2,21\text{ kg/s} \quad \text{Vazão máxima}$$

$$A^* = A_s = 0,001\text{ m}^2$$

Exemplo 3: Ar escoia isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente, com área da garganta e de saída iguais a $0,001 \text{ m}^2$ e $0,00048 \text{ m}^2$ respectivamente. O bocal é alimentado a partir de uma câmara plena onde as condições de estagnação são 1 MPa e 350 K . As condições de escoamento na garganta, o número de Mach na saída e a vazão devem ser determinados para as seguintes situações:

- (i) a uma contrapressão na saída é de 954 kPa (abs).
- (ii) a uma contrapressão na saída é de 50 kPa (abs).
- (iii) a uma contrapressão na saída é de 250 kPa (abs).

Ar : $k=1,4$; $R=287 \text{ Nm}/(\text{kg K})$; $T_o = 350\text{K}$; $P_o=1\text{MPa}$

(i) $p_d/p_o=0,954$

Supor que $A_g=A^*$

$A_s/A^*=2,083 \Rightarrow E1 \Rightarrow (M<1) \Rightarrow M_s=0,29 \Rightarrow p_{\text{sub}}/p_o=0,9432$

$A_s/A^*=2,083 \Rightarrow E1 \Rightarrow (M>1) \Rightarrow M_s=2,24 \Rightarrow p_{\text{pr}}/p_o=0,08784$

$p_d/p_o=0,954 > p_{\text{sub}}/p_o=0,9432 \Rightarrow M_g \neq 1$ e $p_s=p_d$

$p_s/p_o=0,954 \Rightarrow E1 \Rightarrow M_s=0,26$

(ii) $p_d/p_o=0,050$

Supor que $A_g=A^*$

$A_s/A^*=2,083 \Rightarrow E1 \Rightarrow (M<1) \Rightarrow M_s=0,29 \Rightarrow p_{sub}/p_o=0,9432$

$A_s/A^*=2,083 \Rightarrow E1 \Rightarrow (M>1) \Rightarrow M_s=2,24 \Rightarrow p_{pr}/p_o=0,08784$

$p_d/p_o=0,050 < p_{pr}/p_o=0,08784 \Rightarrow M_g=1$ e $p_s=p_{pr} \neq p_d$

$p_s/p_o=p_{pr}/p_o=0,0884 \Rightarrow E1 \Rightarrow M_s=M_{pr}=2,24$

(ii) $p_d/p_o=0,250$

$P_{sub}/p_o=0,9432 > p_d/p_o=0,25 > p_{pr}/p_o=0,08784$

$M_g=1$, ocorre choque, $M_s < 1$