ESCOAMENTO ISOENTRÓPICO EM DUTO DE ÁREA VARIÁVEL.

- **equações governantes**:

(1) massa: $\rho_1 \; V_1 \; A_1 = \rho_2 \; V_2 \; A_2 = \dot{m}$

(2) quantidade de movimento: $R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} \; (V_2 - V_1)$

(3) energia: $\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) = \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right)$

(4) 2ª lei da termodinâmica: $s_2 = s_1$

(5) equação de estado: $\frac{p_1}{\rho_1 \; T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 \; T_2}$

(6) equação de estado $h_2 - h_1 = c_p \; (T_2 - T_1)$

(7) equação a do processo: $\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$

Temos 7 equações, porém temos 8 incógnitas (ρ_2, V_2, A_2, p2, h_2, T_2, s_2, R_x). Isto significa que o problema é indeterminado a menos que alguma condição em (2) seja conhecida.

ESCOAMENTO ISOENTROPICO

- Conhecendo uma condição em (2), podemos determinar todas as outras variáveis, porém temos que resolver um sistema de 7 equações e 7 incógnitas. Gostaríamos de poder resolver o problema de alguma outra forma mais fácil. Isto é possível, se utilizarmos as propriedades de estagnação isoentrópicas.

- Observe que $h + V^2/2 = \text{constante} = h_o$.

Logo $h_1 + V_1^2/2 = \text{constante} = h_{o,1}$ e $h_2 + V_2^2/2 = \text{constante} = h_{o,2}$ mas

$h_1 + V_1^2/2 = h_2 + V_2^2/2$ então $h_{o,1} = h_{o,2}$

Observe também que $s_2=s_1$ e que $s_2=s_{o,2}$ e $s_1=s_{o,1}$ logo $s_{o,1}=s_{o,2}$

Como sabemos que o estado termodinâmica fica determinado em função de somente duas variáveis, se h e s se mantém constante, então todas as outras grandezas também se mantêm constantes, isto é

$T_{o,1}=T_{o,2}$; $p_{o,1}=p_{o,2}$; $\rho_{o,1}=\rho_{o,2}$,etc

Este fato pode auxiliar resolver problemas, pois

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{o,2}} \underbrace{\frac{T_{o,2}}{T_{o,1}}}_{1} \frac{T_{o,1}}{T_1} \qquad\qquad \frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]$$

Portanto, sabendo M_1 , podemos T_1/T_o e sabendo M_2 , podemos T_2/T_o, logo podemos determinar T_2. De forma análoga podemos determinar todas as outras variáveis, já que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_o}\frac{p_o}{p_1} \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_o}\frac{\rho_o}{\rho_1}$$

e $$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{k/(k-1)} \quad ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{1/(k-1)}$$

Como vimos as relações p/p_o; T/T_o, ρ/ρ_o só dependem de k e M. Este valores são tabelados em função de M para $k=1,4$ (que corresponde ao ar)

Para a área utilizamos a área crítica como referência

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*}\frac{A^*}{A_1} \quad ; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+\frac{(k-1)}{2}M^2}{(k+1)/2}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

a razão A/A* também é tabelada.

Efeito da variação da área

- continuidade: $\rho\ V\ A = \text{cte}$ derivando e dividindo por $\rho\ V\ A$ obtemos

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\ V}{V} + \frac{d\ A}{A} = 0 \qquad \text{(I)}$$

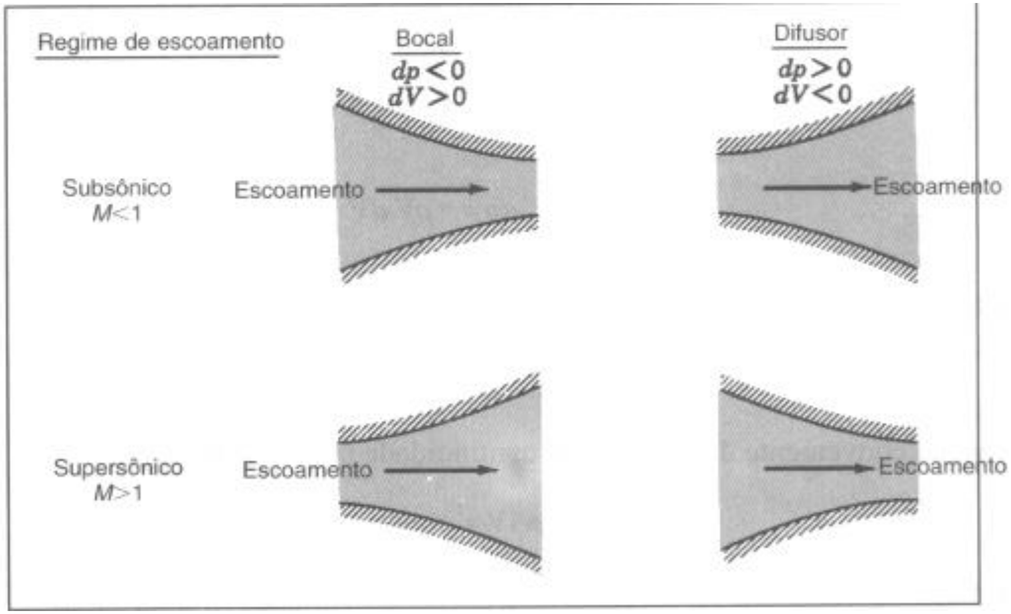
- Equação de Euler: $\dfrac{dp}{\rho} + \dfrac{d\ V^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{\rho\ V^2} = -\dfrac{d\ V}{V} \qquad \text{(II)}$

Combinando (I) e (II)

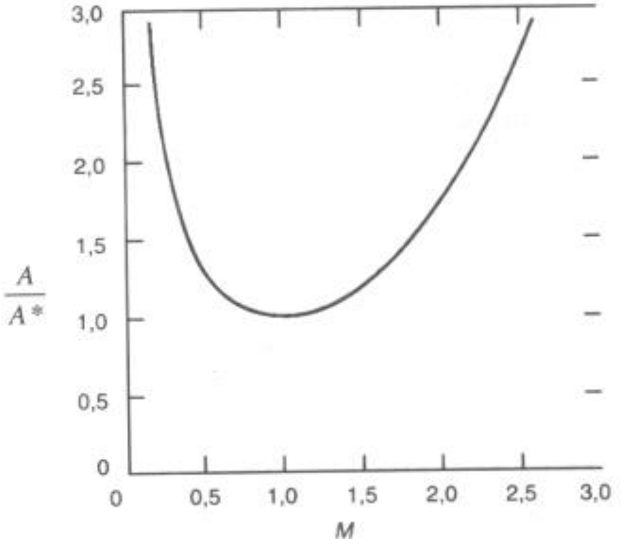
$$\frac{d\ A}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{d\ V}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\ p}{\rho V^2} = \frac{d\ p}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{dp\ /\ d\rho}\right] = \frac{d\ p}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right]$$

$$\frac{d\ A}{A} = \frac{d\ p}{\rho V^2}\left[1 - M^2\right] \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\ A}{A} = -\frac{d\ V}{V}\left[1 - M^2\right]$$

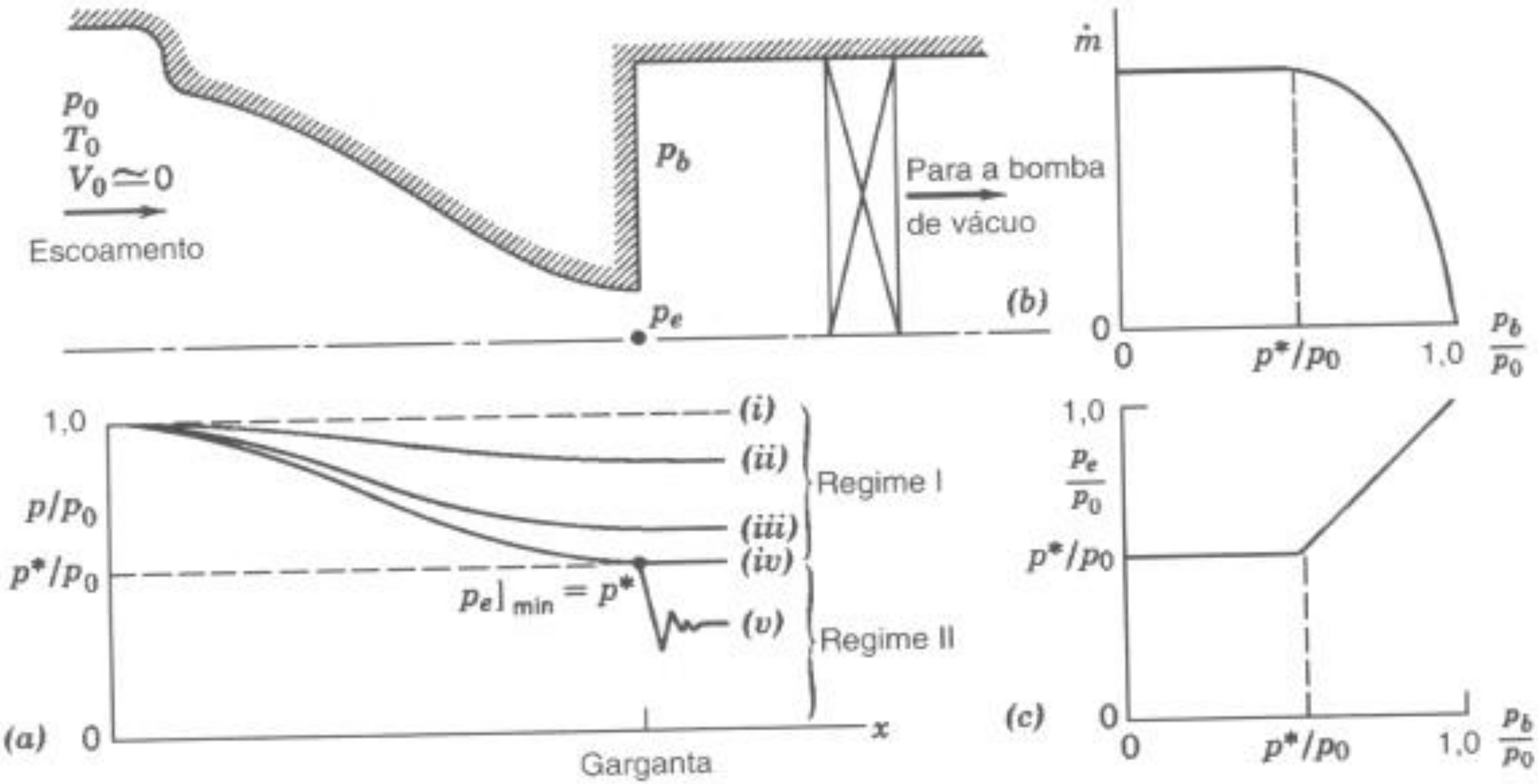
$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - M^2\right] \qquad \frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}\left[1 - M^2\right]$$



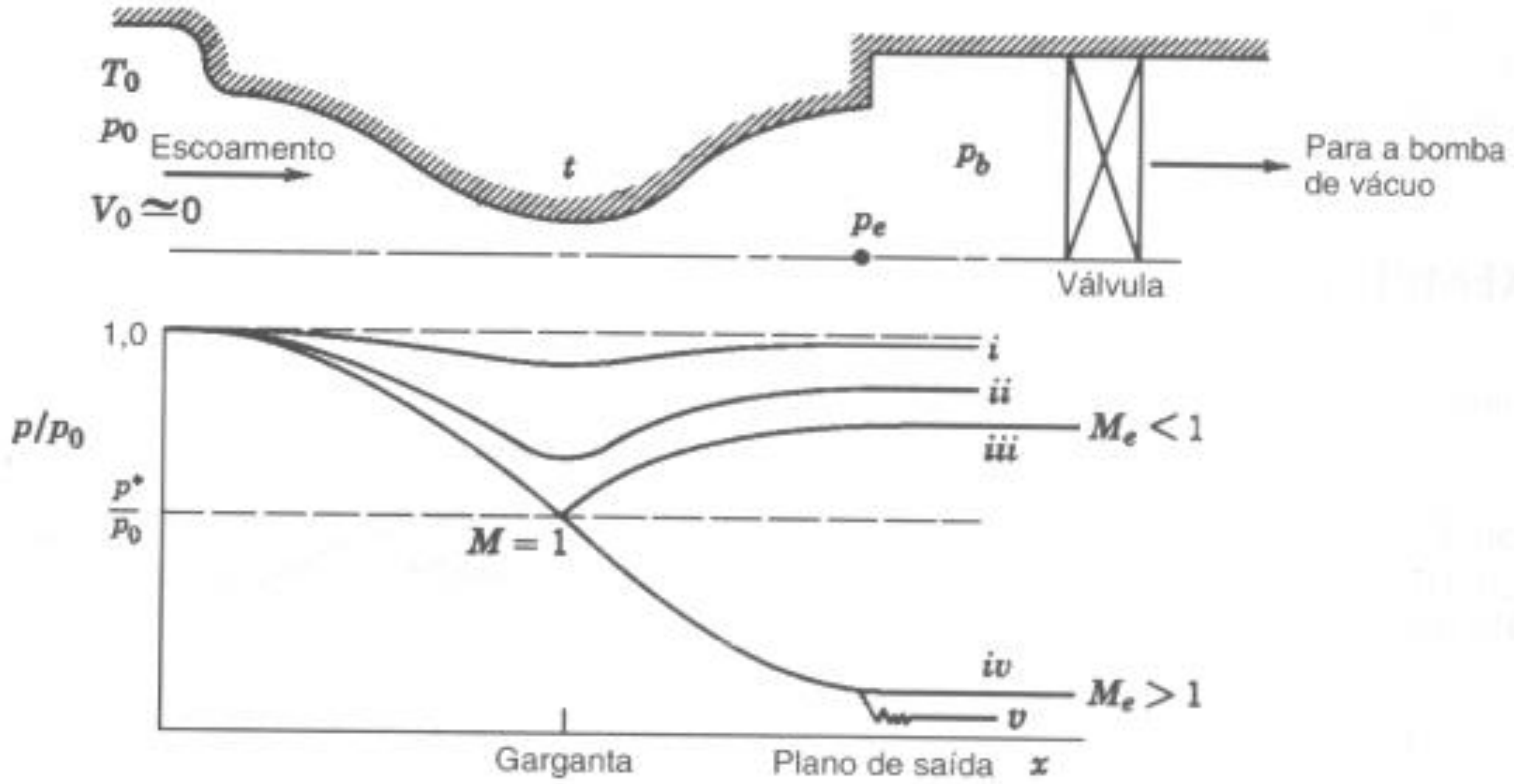
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2}{(k+1)/2}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$



Condições de operação em um bocal convergente (escoamento isoentrópico)



Condições de operação em um bocal convergente-divergente (escoamento isoentrópico)



Exemplo 1: Ar escoa isoentropicamente num duto. Na seção (1), o número de Mach é 0,3, a área é 0,001 m^2 e a pressao absoluta e a temperatura são respectivamente 650 kPa e 60 ^oC. Na seção (2) , o número de Mach é 0,8. Esboce a forma do bocal e determine as propriedade na seção (2).

M1= 0,3 e M2= 0,8. bocal convergente

M1= 0,3 → T1/To=0,9823 → To=T1/0,9823 =(60+273) /0,9823 =339 K

→ p1/po=0,9395 → po=p1/0,9395 =650 /0,9395 = 692 kPa

→ A1/A*=2,035 → A*=A1/2,035 =0,001 /2,035 = 0,000491 m^2

M2= 0,8 → T2/To=0,8865 → T2=To*0,8865 =300 K

→ p2/po=0,6560 → p2=po*0,6560=692 *0,6560 = 454 kPa

→ A2/A*=1,038 → A2=A*/1,038 = 0,000491 *1,038= 0,000510 m^2

ρ2= p2/(RT2) = 454 x 1000 / (287 x 300) = 5,27 kg/m^3

V2= M2 c2 , c2 = (k R T2)^{0,5} = = (1,4x287x300)^{0,5} = 347 m/s V2=0,8x347=278 m/s

m_dot = ρ2 V2 A2 = 5,27 x 278 x 0,000510 =0,748 kg/s

Exemplo 2: Um bocal convergente, com área de garganta de 0,001 m ^{2} é operado com ar. O bocal é alimentado a partir de uma câmara pressurizada onde a pressão absoluta de estagnação e a temperatura de estagnação são, respectivamente, 1 MPa e 60 °C. Considere uma contrapressão na saída de 591 kPa (abs). Determine:

(i) o número de Mach na saída (ii) vazão

(iii) Área crítica (iv) força no bocal, se Me=0,3

$$\frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right] = \left[1 + 0{,}2\, M^2\right]$$

$$\frac{p_o}{p} = \left[\frac{T_o}{T}\right]^{k/(k-1)} \; ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left[\frac{T_o}{T}\right]^{1/(k-1)}$$

po=1MPa ; To=60C+273=333K ; Ag=0,001m^2 bocal convergente

Ar: R=287 Nm /(kg K), k=1,4

(i) pd=591 kPa pd/po=0,591 > p*/po=0,528 $\rightarrow$ ps=pd

ps/po=0,591 $\rightarrow$ E1 $\rightarrow$ Ms= 0,9 $\rightarrow$ E1 $\rightarrow$ Ts/To=0,8606 $\rightarrow$ Ts=287 K

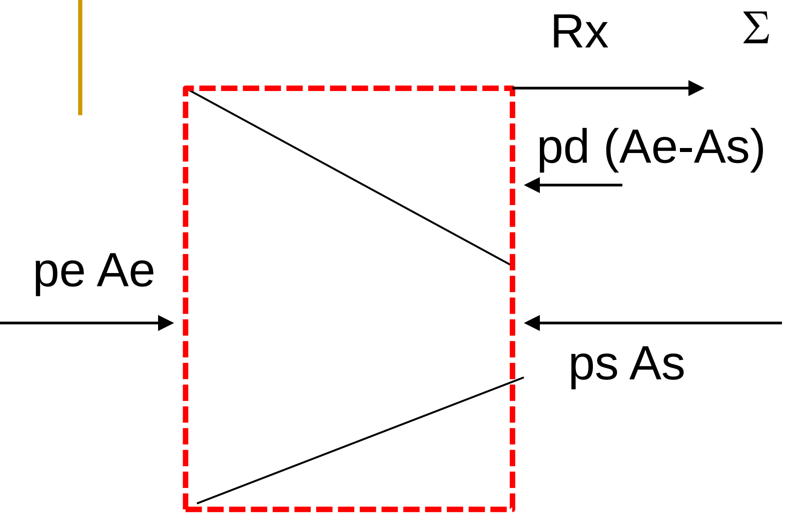
m_dot = ρs Vs As ρs= ps/(RTs) = 591 x 1000 / (287 x 287) = 7,17 kg/m^3

Vs= Ms cs ; cs = (k R Ts)^{0,5} = (1,4x287x287)^{0,5} = 340 m/s ; Vs=0,8x340=306 m/s

m_dot = ρs Vs As=7,17 x 306x0,001=2,19 kg/s

$$\left| \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2}{(k+1)/2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \right|$$

$$\frac{A}{A*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+0{,}2M^2}{1{,}2}\right]^{1{,}4/0{,}2} = \frac{1}{M}\left[\frac{1+0{,}2M^2}{1{,}2}\right]^{\frac{2{,}4}{2x0{,}4}} = \frac{1}{0{,}9}\left[\frac{1+0{,}2x0{,}9^2}{1{,}2}\right]^3 = 1{,}0089 \rightarrow A^* = 9{,}91\times10^{-4}\, m^2$$



$$\Sigma F = Rx + pe\ Ae - ps\ As - pd\ (A2 - As) = m\_dot\ (Vs-Ve)$$

$$p' = p - pd$$

$$Rx = -\ p'e\ Ae + p's\ As + m\_dot\ (Vs-Ve)$$

$$p's = 0$$

$Me = 0{,}3 \ \rightarrow Te/To = 0{,}9823 \rightarrow Te = To \times /0{,}9823 = 333 \times 0{,}9823 = 327\ K$

$\rightarrow pe/po = 0{,}9395 \rightarrow pe = po \times 0{,}9395 = 10^6 \times 0{,}9395 = 939{,}5\ kPa$

$\rightarrow Ae/A^* = 2{,}035 \ \rightarrow Ae = A^* \times 2{,}035 = 0{,}000991 \times 2{,}035 = 0{,}00202\ m^2$

$Ve = Me\ ce = Me\ (k\ R\ Te)^{0,5} = 108{,}7\ m/s$

$Rx = -\ (939{,}5-591) \times 10^3 \times 2{,}02 \times 10^{-3} + 2{,}19 \times (306-108{,}7) = -\ 703 + 432 = -\ 271\ N \ \longleftarrow$

$|\ Kx\ | = |\ Rx\| \ \longrightarrow$ forca que o fluido faz no bocal

Para prender o bocal a forca deve ser $\longleftarrow$

Exemplo 3: Considere o mesmo bocal que no caso anterior. Porém a contra-pressão é 400 kPa (abs). Determine: (i) o número de Mach na saída (ii) vazão (iii) Área crítica

po=1MPa ; To=60C+273=333K ; Ag=0,001m^2 bocal convergente
Ar: R=287 Nm /(kg K), k=1,4

$$\frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right] = \left[1 + 0,2\, M^2\right]$$

pd=400 kPa pd/po=0,400 > p*/po=0,528 $\rightarrow$ ps=p*

$$\frac{p_o}{p} = \left[\frac{T_o}{T}\right]^{k/(k-1)} ; \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left[\frac{T_o}{T}\right]^{1/(k-1)}$$

ps=p*=528 kPa $\rightarrow$ Ms= 1 $\rightarrow$ E1 $\rightarrow$ Ts/To=T*/To=0,8333 $\rightarrow$ Ts=278 K

m_dot = ρs Vs As ρs= ps/(RTs) = 528 x 1000 / (287 x 278) = 6,62 kg/m^3

Vs= Ms cs , cs = (k R Ts)^{0,5} = (1,4x287x278)^{0,5} = 334 m/s Vs=v*=c= 334 m/s

m_dot = ρs Vs As=6,62 x 334 x0,001=2,21 kg/s Vazão máxima

A*=As=0,001 m^2

Exemplo 3: Ar escoa isoentropicamente através de um bocal convergente-divergente, com área da garganta e de saída iguais a 0,001 m^2 e 0,00048 m^2 respectivamente. O bocal é alimentado a partir de uma câmara plena onde as condições de estagnação são 1 MPa e 350 K. As condições de escoamento na garganta, o número de Mach na saída e a vazão devem ser determinados para as seguintes situações:

(i) a uma contrapressão na saída é de 954 kPa (abs).
(ii) a uma contrapressão na saída é de 50 kPa (abs).
(iii) a uma contrapressão na saída é de 250 kPa (abs).

Ar : k=1,4 ; R=287 Nm/(kg K) ; To = 350K ; Po=1MPa

(i) pd/po=0,954

Supor que Ag=A*

As/A*=2,083 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ (M<1) $\Rightarrow$ Ms=0,29 $\Rightarrow$ p_sub/po=0,9432

As/A*=2,083 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ (M>1) $\Rightarrow$ Ms=2,24 $\Rightarrow$ p_pr/po=0,08784

pd/po=0,954 > psub/po=0,9432 $\Rightarrow$ Mg$\neq$ 1 e ps=pd

ps/po=0,954 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ Ms=0,26

(ii) pd/po=0,050

Supor que Ag=A*

As/A*=2,083 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ (M$<$1) $\Rightarrow$ Ms=0,29 $\Rightarrow$ p_sub/po=0,9432

As/A*=2,083 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ (M$>$1) $\Rightarrow$ Ms=2,24 $\Rightarrow$ p_pr/po=0,08784

pd/po=0,050 < p_pr/po=0,08784 $\Rightarrow$ Mg= 1 e ps=p_pr $\neq$ pd

ps/po=p_pr/po=0,0884 $\Rightarrow$E1 $\Rightarrow$ Ms=Mpr=2,24

(ii) pd/po=0,250

P_sub/po= 0,9432 > pd/po=0,25 > p_pr/po=0,08784

Mg=1, ocorre choque, Ms <1