

# ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

- Nos escoamentos incompressíveis,  $p$  e  $V$  são as duas variáveis principais de interesse, e por isto são necessárias duas equações de conservação: continuidade e quantidade de movimento linear.
- Escoamento *compressível* implica em grandes variações da massa específica num campo de escoamento. Os efeitos de compressibilidade surgem devido a grandes variações de velocidade, que por sua vez originam grandes variações de pressão, levando a grandes variações da massa específica e da temperatura.

grandes  $\Delta V \Rightarrow$  grandes  $\Delta p \Rightarrow$  grandes  $\Delta \rho$  e grandes  $\Delta T$

- Uma vez que duas variáveis adicionais aparecem ( $\rho$  e  $T$ ), duas equações adicionais são necessárias: equação de conservação de energia (1ª lei da termodinâmica) e uma equação de estado.

# ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

Incógnitas:  $\vec{V}$  ;  $p$  ;  $\rho$  ;  $T$

**Equações:**

continuidade

quantidade de movimento linear

energia

equação de estado

No presente curso vamos utilizar as seguintes aproximações:

- regime permanente
- gás ideal

e utilizaremos a *análise integral*

# REVISÃO DE TERMODINÂMICA

Pressão, densidade e temperatura de uma substância pura, podem ser relacionados através de uma equação de estado.

A maioria dos gases de interesse, a pressões e temperaturas moderadas, se comportam como gases ideais.

$$\text{gás ideal : } p \nabla = m R T \quad ; \quad p = \rho R T \quad ; \quad \rho = \frac{m}{\nabla} \quad ; \quad R = \frac{\mathfrak{R}_u}{M_m}$$

$R$  = constante do gás

$\mathfrak{R}$  = constante universal = 8314 Nm/(kgmol K) = 1544 lbf ft / (lbmol R)

$M_m$  = massa molecular

ar  $\Rightarrow R_{\text{ar}} = 287 \text{ Nm}/(\text{kg K}) = 153,3 \text{ lbf ft} / (\text{lbm R})$

- **energia interna  $i$**   $\Rightarrow$  a energia interna pode ser expressa por  $i=i(v, T)$

$$v = \frac{1}{\rho}$$

logo

$$d i = \underbrace{\left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_v}_{c_v} dT + \left( \frac{\partial i}{\partial v} \right)_T dv \quad \Rightarrow \quad c_v = \text{calor específico a volume constante}$$

- **entalpia  $h$**   $\Rightarrow h=h(p, T) \quad h = i + p / \rho$

$$d h = \underbrace{\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}_{c_p} dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T d p \quad \Rightarrow \quad c_p = \text{calor específico a pressão constante}$$

- **entropia**  $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$  desigualdade de Clausius

$$d s = \frac{d S}{d m} \quad \Rightarrow \quad \text{entropia específica}$$

$$\text{processo reversível} \quad \Rightarrow \quad T d s = \frac{\delta Q}{d m}$$

$$\text{processo adiabático reversível (isoentrópico)} \quad \Rightarrow \quad d s = 0$$

Para gás ideal  $\Rightarrow i = i(T) \quad ; \quad p = \rho R T$

como  $h = i + \frac{p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad h = i + R T \quad ; \quad \text{então } h = h(T)$

$$di = c_v dT \quad dh = c_p dT$$

$$h = i + R T \quad \Rightarrow \quad dh = di + R dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_p - c_v = R}$$

razão de calor específico  $k = \frac{c_p}{c_v} \quad \Rightarrow \quad c_p = \frac{k R}{k - 1} \quad ; \quad c_v = \frac{R}{k - 1}$

variação de energia interna e entalpia devem ser avaliados por

$$i_2 - i_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT = \int_{T_{ref}}^{T_2} c_v(T) dT - \int_{T_{ref}}^{T_1} c_v(T) dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT = \int_{T_{ref}}^{T_2} c_p(T) dT - \int_{T_{ref}}^{T_1} c_p(T) dT$$

Para faixas razoáveis de temperatura, podemos considerar o calor específico como constante,

$$i_2 - i_1 = c_v(T_2 - T_1) \quad ; \quad h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$$

## RELAÇÕES TERMODINÂMICAS

$$T d s = d i + p d v \quad \Rightarrow \quad d s = \frac{d i}{T} + \frac{p}{T} d v$$

ou usando a definição  $h = i + \frac{p}{\rho} = i + p v$

$$T d s = d h - v d p \quad \Rightarrow \quad d s = \frac{d h}{T} - \frac{v}{T} d p$$

gás ideal ( $p = \rho R T$ )  $\Rightarrow$

$$d s = \frac{c_v d T}{T} + R \frac{d v}{v} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$d s = \frac{c_p d T}{T} - R \frac{d p}{p} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Em processos isoentrópicos:  $ds = 0$

$$T ds = di + p dv \Rightarrow 0 = c_v dT + p dv$$

$$T ds = dh - v dp \Rightarrow 0 = c_p dT - v dp$$

igualando  $dT$  nas duas equações acima

$$dT = v \frac{dp}{c_p} = -p \frac{dv}{c_v} \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v} \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0$$

para  $k = \text{constante}$  e integrando

$$\ln p + k \ln v = \ln C \Rightarrow \ln p + \ln v^k = \ln C \Rightarrow p v^k = C$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho^k} = C}$$

gás ideal processo isoentrópico

## Velocidade do som $\Rightarrow c$

- velocidade de propagação de uma onda de pressão de intensidade infinitesimal
- Determinação da velocidade do som:

continuidade:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \, dV + \int_{S.C.} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

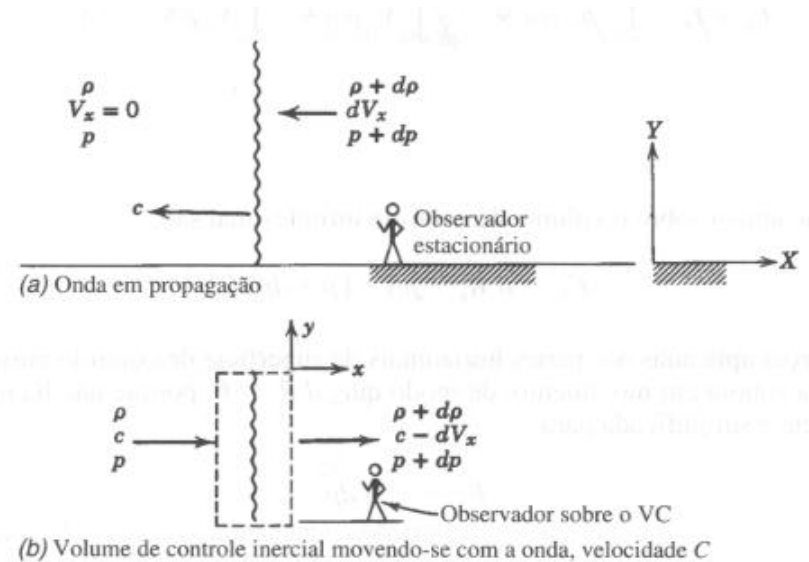
para regime permanente

$$\rho c A = (\rho + d\rho)(c - dV)(A + dA) = \dot{m}$$

$$\rho c A = \rho c A + d\rho c A - \rho dV A - d\rho dV A \Rightarrow dV = \frac{c}{\rho} d\rho \quad (I)$$

quantidade de movimento linear :  $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \vec{V} \, dV + \int_{S.C.} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$

$$F_{S_x} + F_{c_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho V_x \, dV + \int_{S.C.} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$





**hipóteses:** (1) regime permanente, (2) força de corpo na direção x nula (3) atrito desprezível ( $\tau_s A_s = 0$  pois  $A_s \approx 0$ ) (4) troca de calor desprezível

$$p A - (p + d p) A = -c \rho c A + (c - d V) \underbrace{[(\rho + d \rho) (c - d V) (A + d A)]}_{\rho c A}$$

$$-A d p = -\rho c A d V \quad \Rightarrow \quad \boxed{d V = \frac{d p}{\rho c}} \quad (\text{II})$$

igualando (I) e (II)  $\frac{c}{\rho} d \rho = \frac{d p}{\rho c} \Rightarrow c^2 = \frac{d p}{d \rho}$

Se  $p = p(\rho, s)$  então  $d p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d \rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho d s$

Se não há atrito e troca de calor,, o processo é isoentrópico ( $ds = 0$ )

$$\frac{d p}{d \rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

$$\boxed{c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}}$$

Definição: **M = número de Mach**  $\Rightarrow M = \frac{V}{c}$

$M \rightarrow 0 \Rightarrow$  escoamento incompressível

$M \neq 0 \Rightarrow$  escoamento compressível

$M < 1 \Rightarrow$  escoamento subsônico

$M = 1 \Rightarrow$  escoamento sônico

$M > 1 \Rightarrow$  escoamento supersônico

$M > 5 \Rightarrow$  escoamento hipersônico (mísseis, etc)

$0,9 \cong M \cong 1,1 \Rightarrow$  escoamento transônico

gás ideal  $\Rightarrow p = \rho R T$

processo isoentrópico  $\Rightarrow \frac{p}{\rho^k} = C$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = C \quad k \quad \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k} \quad k \quad \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho} = k R T$$

$$c = \sqrt{k R T}$$

gás ideal

- Para líquidos: definindo-se  $K_s$  = coeficiente de compressibilidade adiabática

$$K_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\rho K_s}}$$

utiliza-se também o “bulk modulus”  $K$

$$K = -v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \Rightarrow c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

- Para sólidos: definindo-se  $E$  = módulo de elasticidade de Young

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- a velocidade do som depende do meio e das propriedades termodinâmicas

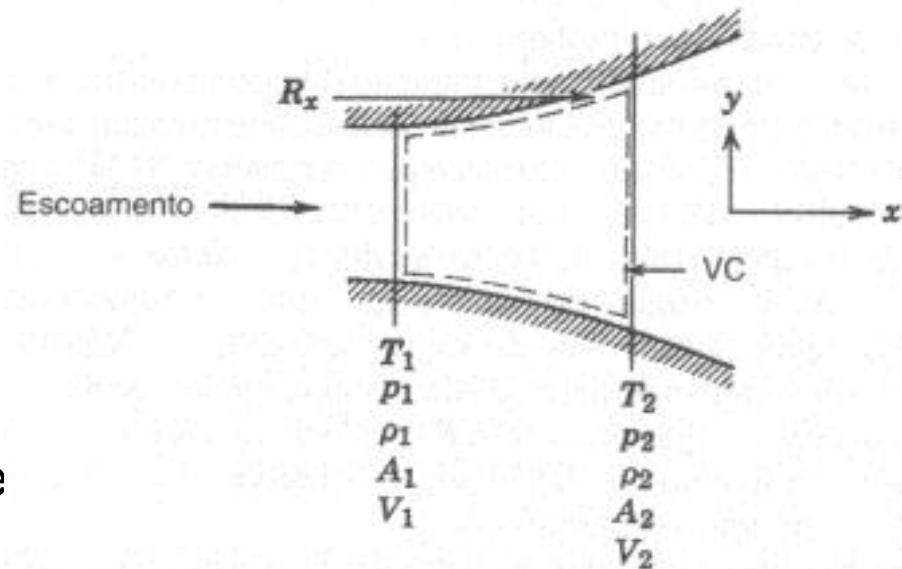
# ESCOAMENTO UNI-DIMENSIONAL DE GÁS IDEAL EM TUBULAÇÕES

- escoamento isoentrópico de área variável
- escoamento com atrito em área constante
- escoamento com transferência de calor em área constante
- choques normais

Vamos derivar as equações de conservação válidas para todos estes casos.

## Hipóteses:

- regime permanente
- uma entrada e uma saída
- propriedades uniformes nas seções
- força gravitacional desprezível (tubulação na horizontal)
- gás ideal



(1) **Continuidade:**

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \, dV + \int_{S.C.} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \Rightarrow$$

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m}$$

(2) **Quantidade de movimento linear:**

$$\vec{F}_s + \vec{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \vec{V} \, dV + \int_{S.C.} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$F_{s_x} = \int_{S.C.} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \Rightarrow R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

(3) **Energia (1ª lei da Termodinâmica):**  $e = i + \frac{V^2}{2} + gz$  ;

$$e + \frac{p}{\rho} = h + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_\mu - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho \, dV + \int_{SC} \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

hipóteses adicionais: (i) trabalho de eixo nulo (ii) trabalho outros nulo

(iii) volume de controle perpendicular a fluxo de massa e coincidente com paredes

$$\Rightarrow \dot{Q} = \dot{m} \left[ \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \right]$$

**(4) 2ª lei da Termodinâmica:**  $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$       desigualdade de Clausius para sistemas

para volumes de controle: 
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} s \rho \, dV + \int_{SC} s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \geq \int_{SC} \frac{\delta \dot{Q} / A}{T} \, dA$$

a igualdade é válida se o processo for reversível  
a desigualdade é válida se o processo for irreversível

para indicar a direção do processo: 
$$\dot{m} (s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{\delta \dot{Q} / A}{T} \, dA$$

para quantificar: 
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

**(5) equação de estado:**  $p = \rho R T \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$

**(6)**  $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$

Se o processo for isentrópico acrescentar mais uma equação, a do processo:

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$$

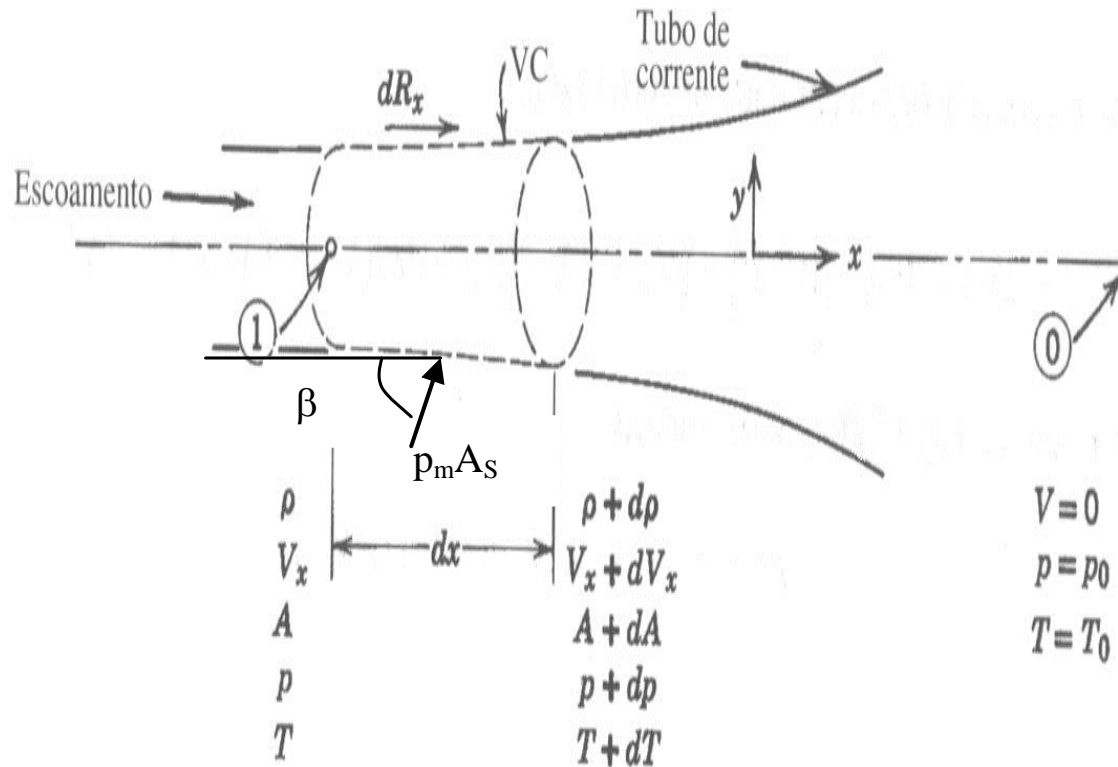
- Para resolver um problema de escoamento compressível, precisaremos resolver o sistema apresentado. Vamos agora introduzir a definição de propriedades de referência que auxiliam na solução dos problemas.

## PROPRIEDADES DE REFERÊNCIA

• **Propriedade de Estagnação Isoentrópica ( $\rho_o$ ,  $T_o$ ,  $p_o$ , etc):** são as propriedades obtidas quando um fluido é desacelerado até o **repouso** por um processo isoentrópico, isto é, sem atrito e sem troca de calor.

• **Propriedades Críticas ( $\rho^*$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ , etc):** são as propriedades reinantes quando  **$M=1$**

- para obter estas propriedades, vamos integrar as equações de conservação de um escoamento isoentrópico de uma condição dada até o repouso.



- continuidade:  $\rho V A = (\rho + d\rho) (V + dV) (A + dA) = \dot{m}$

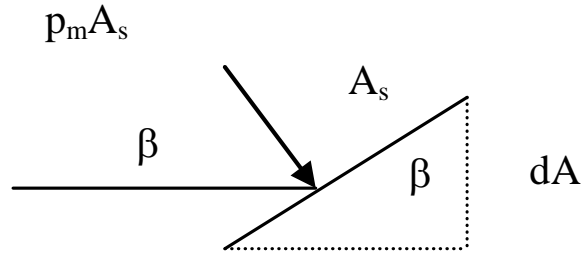


- quantidade de movimento linear:

$$pA - (p + dp) (A + dA) + p_m A_s \cos \beta = \dot{m} [(V + dV) - V] = \rho V A dV$$

$$A_s \cos \beta = dA$$

$$p_m = p + \frac{dp}{2}$$



$$pA - (p + dp) (A + dA) + \left( p + \frac{dp}{2} \right) dA = \rho V A dV \Rightarrow$$

$$- dp A = \rho V A dV$$

dividindo por  $\rho A \Rightarrow$   $\frac{dp}{\rho} + \frac{dV^2}{2} = 0$  equação de Euler

Para processo isoentrópico  $\frac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow \rho = (p / C)^{1/k}$

substituindo na equação de Euler  $C^{1/k} \frac{dp}{p^{1/k}} + \frac{dV^2}{2} = 0$

Integrando de uma posição onde a pressão é  $p$  e a velocidade é  $V$  até o repouso onde a pressão é  $p_o$  e a velocidade é nula

$$\int_p^{p_o} C^{1/k} \frac{dp}{p^{1/k}} + \int_V^0 \frac{dV^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{1/k} \frac{p_o^{1-1/k} - p^{1-1/k}}{1-1/k} - \frac{V^2}{2} = 0$$

arrumando a equação obtida, temos, sabendo que

$$M=V/c \quad ; \quad c = \sqrt{kRT} \quad ; \quad p/\rho = RT \quad \text{e} \quad C^{1/k} = p^{1/k} / \rho$$

$$\frac{p^{1/k} p^{1-1/k} \left[ \left( p_o / p \right)^{1-1/k} - 1 \right]}{\rho} - \frac{M^2 c^2}{2} = 0$$

$$RT \frac{k}{k-1} \left[ \left( p_o / p \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] - \frac{M^2 k RT}{2} = 0$$

## Propriedades de Estagnação Isoentrópica

$$\frac{p_o}{p} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{k/(k-1)}$$

agora podemos facilmente encontrar as outras propriedades

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left( \frac{p_o}{p} \right)^{1/k} \Rightarrow \frac{\rho_o}{\rho} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{1/(k-1)}$$

$$\frac{T_o}{T} = \frac{p_o}{p} \frac{\rho}{\rho_o} = \left( \frac{p_o}{p} \right)^{(k-1)/k} \Rightarrow \frac{T_o}{T} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]$$

Note que as propriedades de estagnação não oferecem uma referência para a velocidade, usamos então as propriedades críticas ( $M=1$ ). O mesmo é verdade para a área.

$$\frac{p_o^*}{p^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right]^{k/(k-1)} = 1,893 \text{ para } (k=1,4)$$

$$\frac{\rho_o^*}{\rho^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right]^{1/(k-1)} = 1,577 \text{ para } (k=1,4)$$

$$\frac{T_o^*}{T^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right] = 1,200 \text{ para } (k=1,4)$$

$$\text{continuidade: } \rho V A = \rho^* V^* A^* = \dot{m} \quad ; \quad V^* = c^* = \sqrt{kRT^*}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{V^*}{V} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{c^*}{M c} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho} \sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{T^* / T_0}{T / T_0}} =$$

Porém em um processo isoentrópico, ao desaceleramos um escoamento até o repouso, chegamos sempre aos mesmos valores das propriedade de estagnação isoentrópicas, então

$T_0^* = T_0$  e  $\rho_0^* = \rho_0$ , substituindo as relações obtidas temos

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M^2}{(k+1)/2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

**Exemplo:** Ar escoia em regime permanente através de um bocal convergente-divergente. Na entrada a pressão absoluta é  $P_1 = 350$  kPa, temperatura  $T_1 = 60$  °C e a velocidade igual a  $V_1 = 183$  m/s. Na saída, o número de Mach é  $M_2 = 1,3$  e as condições locais de estagnação são conhecidas,  $P_{o2} = 384$  kPa (abs),  $T_{o2} = 350$  K. Determine as propriedades de estagnação isentrópica na entrada e pressão estática e temperatura na saída.