ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

- Nos escoamentos incompressíveis, *p e V* são as duas variáveis principais de interesse, e por isto são necessárias duas equações de conservação: continuidade e quantidade de movimento linear.

- Escoamento *compressível* implica em grandes variações da massa específica num campo de escoamento. Os efeitos de compressibilidade surgem devido a grandes variações de velocidade, que por sua vez originam grandes variações de pressão, levando a grandes variações da massa específica e da temperatura.

grandes Δ V $\Rightarrow$ grandes Δ p $\Rightarrow$ grandes $\Delta \rho$ e grandes Δ T

- Uma vez que duas variáveis adicionais aparecem (ρ e T), duas equações adicionais são necessárias: equação de conservação de energia (1ª. lei da termodinâmica) e uma equação de estado.

Angela Nieckele – PUC-Rio

ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL

Incógnitas: $\vec{V}\ ;\ p\ ;\ \rho\ ;T$

Equações:
continuidade
quantidade de movimento linear
energia
equação de estado

No presente curso vamos utilizar as seguintes aproximações:

- regime permanente
- gás ideal

e utilizaremos a *análise integral*

REVISÃO DE TERMODINÂMICA

Pressão, densidade e temperatura de uma substância pura, podem ser relacionados através de uma equação de estado.

A maioria dos gases de interesse, a pressões e temperaturas moderadas, se comportam como gases ideais.

gás ideal : $p \forall = m R T \quad ; \quad p = \rho R T \quad ; \quad \rho = \dfrac{m}{\forall} \quad ; \quad R = \dfrac{\Re_u}{M_m}$

R = constante do gás
$\Re$ = constante universal = 8314 Nm/(kgmol K) = 1544 lbf ft / (lbmol R)
M_m = massa molecular

ar $\Rightarrow$ R_{ar} = = 287 Nm/(kg K) = 153,3 lbf ft / (lbm R)

- **energia interna *i*** $\Rightarrow$ a energia interna pode ser expressa por $i=i(v,\ T)$

$$v = \frac{1}{\rho}$$

logo

$$d\,i = \underbrace{\left.\frac{\partial i}{\partial T}\right)_v}_{c_v} dT + \left.\frac{\partial i}{\partial v}\right)_T dv$$ $\Rightarrow$ c_v = calor específico a volume constante

- **entalpia *h*** $\Rightarrow$ $h=h(p,\ T)$ $h = i + p / \rho$

$$d\,h = \underbrace{\left.\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p}_{c_p} d\,T + \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T d\,p$$ $\Rightarrow$ c_p = calor específico a pressão constante

- **entropia** $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$ desigualdade de Clausius

$$d\ s = \frac{d\ S}{d\ m}$$ $\Rightarrow$ entropia específica

processo reversível $\Rightarrow$ $T\ d\,s = \frac{\delta\ Q}{d\,m}$

processo adiabático reversível (isoentrópico) $\Rightarrow$ $d\,s = 0$

Para gás ideal $\Rightarrow$ $i = i(T)$; $p = \rho R T$

como $h = i + \dfrac{p}{\rho}$ $\Rightarrow$ $h = i + R T$; então $h = h(T)$

$$di = c_v \, d T \qquad\qquad dh = c_p \, dT$$

$$h = i + R T \quad \Rightarrow \quad dh = di + R \, dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_p - c_v = R}$$

razão de calor específico $k = \dfrac{c_p}{c_v}$ $\Rightarrow c_p = \dfrac{k R}{k-1}$; $c_v = \dfrac{R}{k-1}$

variação de energia interna e entalpia devem ser avaliados por

$$i_2 - i_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) \, d T = \int_{T_{ref}}^{T_2} c_v(T) \, d T - \int_{Tref}^{T1} c_v(T) \, d T$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) \, d T = \int_{T_{ref}}^{T_2} c_p(T) \, d T - \int_{Tref}^{T1} c_p(T) \, d T$$

Para faixas razoáveis de temperatura, podemos considerar o calor específico como constante,

$$i_2 - i_1 = c_v (T_2 - T_1) \qquad ; \qquad h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

RELAÇÕES TERMODINÂMICAS

$$T\,ds = di + p\,dv \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{di}{T} + \frac{p}{T}\,dv$$

ou usando a definição $h = i + \dfrac{p}{\rho} = i + p\,v$

$$T\,ds = dh - v\,dp \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T}\,dP$$

gás ideal $(p = \rho R T) \Rightarrow$

$$ds = \frac{c_v\,dT}{T} + R\,\frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{v_2}{v_1}$$

$$ds = \frac{c_p\,dT}{T} - R\,\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$$

Em processos isoentrópicos: $ds = 0$

$$T\,ds = di + p\,dv \Rightarrow 0 = c_v\,dT + p\,dv$$

$$T\,ds = dh - v\,dp \Rightarrow 0 = c_p\,dT - v\,dp$$

igualando *dT* nas duas equações acima

$$dT = v\frac{dp}{c_p} = -p\frac{dv}{c_v} \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v}\frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0$$

para k = constante e integrando

$$\ln p + k \ln v = \ln C \Rightarrow \ln p + \ln v^k = \ln C \Rightarrow p\,v^k = C$$

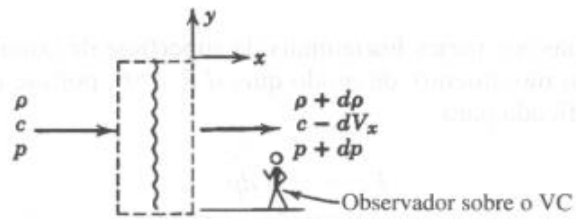
$$\boxed{\frac{p}{\rho^k} = C}$$

gás ideal processo isoentrópico

Velocidade do som $\Rightarrow$ c

- velocidade de propagação de uma onda de pressão de intensidade infinitesimal
- Determinação da velocidade do som:

(a) Onda em propagação



(b) Volume de controle inercial movendo-se com a onda, velocidade C

continuidade:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \; d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, dA$$

para regime permanente

$$\rho \, c \, A = (\rho + d\rho)(c - dV)(A + dA) = \dot{m}$$

$$\rho \, c \, A = \rho \, c \, A + d\rho \, c \, A - \rho \, dV \, A - d\rho \; dV \; A \Rightarrow \boxed{dV = \frac{c}{\rho} d\rho} \qquad \text{(I)}$$

quantidade de movimento linear : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \; \vec{V} \, d\forall + \int_{S.C.} \vec{V} \; \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, dA$

$$F_{s_x} + F_{c_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \; V_x \, d\forall + \int_{S.C.} V_x \; \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \, dA$$

hipóteses: (1)regime permanente, (2) força de corpo na direção x nula (3) atrito desprezível ($\tau_s \; A_s = 0 \quad pois \quad A_s \approx 0$) (4) troca de calor desprezível

$$p\,A - (p + d\,p)\,A = -c\,\rho\,c\,A + (c - d\,V)\underbrace{\left[(\rho + d\,\rho)(c - d\,V)(A + d\,A)\right]}_{\rho\,c\,A}$$

$$-A\;d\,p \;=\; -\rho\;c\,A\,d\,V \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d\,V = \frac{d\,p}{\rho\,c}} \qquad \text{(II)}$$

igualando (I) e (II) $\quad \dfrac{c}{\rho}\,d\,\rho = \dfrac{d\,p}{\rho\,c} \Rightarrow \qquad c^2 = \dfrac{d\,p}{d\,\rho}$

Se $\quad p = p\,(\rho, s) \quad$ então $\qquad d\,p = \left.\dfrac{\partial\,p}{\partial\,\rho}\right)_s d\,\rho \; + \; \left.\dfrac{\partial\,p}{\partial\,s}\right)_\rho d\,s$

Se não há atrito e troca de calor,, o processo é isoentrópico (ds = 0)

$$\frac{d\,p}{d\,\rho} = \left.\frac{\partial\,p}{\partial\,\rho}\right)_s$$

$$\boxed{c = \sqrt{\left.\frac{\partial\,p}{\partial\,\rho}\right)_s}}$$

Definição: **M = número de Mach** $\Rightarrow$ $M = \dfrac{V}{c}$

$M \to 0$ $\Rightarrow$ **escoamento incompressível**

$M \neq 0$ $\Rightarrow$ **escoamento compressível**

$M < 1$ $\Rightarrow$ **escoamento subsônico**

$M = 1$ $\Rightarrow$ **escoamento sônico**

$M > 1$ $\Rightarrow$ **escoamento supersônico**

$M > 5$ $\Rightarrow$ **escoamento hipersônico (mísseis, etc)**

$0,9 \cong M \cong 1,1$ $\Rightarrow$ **escoamento transônico**

gás ideal $\Rightarrow$ $p = \rho\, R\, T$

processo isoentrópico $\Rightarrow$ $\dfrac{p}{\rho^k} = C$

$$\left.\frac{\partial\, p}{\partial\, \rho}\right)_s = C \quad k \quad \rho^{k-1} = \frac{p}{\rho^k} \quad k \quad \rho^{\,k-1} = k\,\frac{p}{\rho} = k\;R\;T$$

$\boxed{c = \sqrt{k\;R\;T}}$ gás ideal

- Para líquidos: definindo-se K_s = coeficiente de compressibilidade adiabática

$$K_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho \ K_s}}$$

utiliza-se também o "bulk modulus" K

$$\mathrm{K} = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\rho}}$$

- Para sólidos: definindo-se E = módulo de elasticidade de Young

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- a velocidade do som depende do meio e das propriedades termodinâmicas

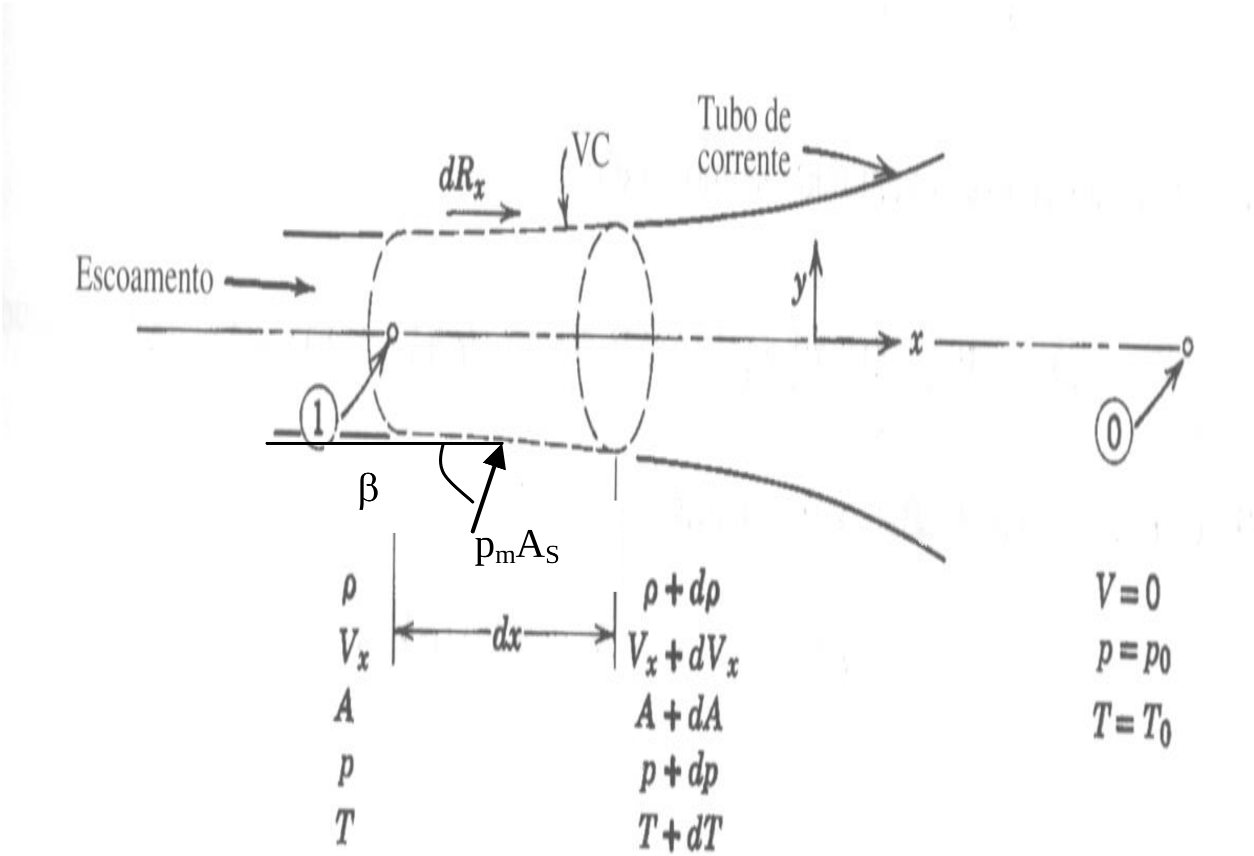
•Para resolver um problema de escoamento compressível, precisaremos resolver um sistema formado pelas equações de conservação. Vamos agora introduzir a definição de propriedades de referência que auxiliam na solução dos problemas.

PROPRIEDADES DE REFERÊNCIA

•**Propriedade de Estagnação Isoentrópica (ρ_o, T_o, p_o, etc):** são as propriedades obtidas quando um fluido é desacelerado até o **repouso** por um processo isoentrópico, isto é, sem atrito e sem troca de calor.

•**Propriedades Críticas (ρ^*, T^*, p^*, etc):** são as propriedades reinantes quando **M=1**

- para obter estas propriedades, vamos integrar as equações de conservação de um escoamento isoentrópico de uma condição dada até o repouso.

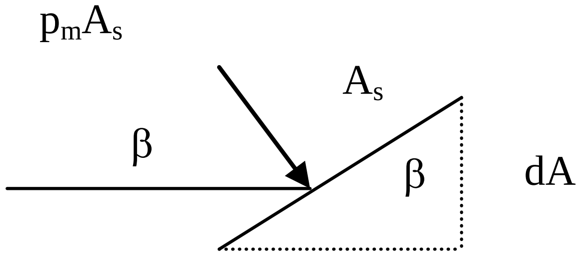


- continuidade: $\rho \; V \;\; A \; = \; (\rho \, + \, d\rho) \;\; (V \; + \; dV) \;\; (A \, + \, dA) \; = \; \dot{m}$

- quantidade de movimento linear:

$$pA - (p + dp)\ (A + dA) + p_m A_s\ \cos\beta = \dot{m}\ [(V + dV) - V] = \rho\ V\ A\ dV$$

$$A_s\ \cos\beta = dA$$



$$p_m = p + \frac{dp}{2}$$

$$pA - (p + dp)\ (A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA = \rho\ V\ A\ dV \Rightarrow$$

$$-\,dp\ A = \rho\ V\ A\ dV$$

dividindo por $\rho\ A \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dp}{\rho} + \dfrac{d\ V^2}{2} = 0}$ equação de Euler

Para processo isoentrópico $\dfrac{p}{\rho^k} = C \Rightarrow \rho = (p / C)^{1/k}$

substituindo na equação de Euler $C^{1/k}\ \dfrac{dp}{p^{1/k}} + \dfrac{d\ V^2}{2} = 0$

Integrando de uma posição onde a pressão é p e a velocidade é V até o repouso onde a pressão é p_o e a velocidade é nula

$$\int_{p}^{p_o} C^{1/k} \frac{dp}{p^{1/k}} + \int_{V}^{0} \frac{d\,V^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{1/k} \frac{p_o^{1-1/k} - p^{1-1/k}}{1-1/k} - \frac{V^2}{2} = 0$$

arruamando a equação obtida, temos, sabendo que

$M=V/c$; $c = \sqrt{kRT}$; $p/\rho = R\,T$ e $C^{1/k} = p^{1/k} / \rho$

$$\frac{p^{1/k}}{\rho} \frac{p^{1-1/k}\left[\left(p_o / p\right)^{1-1/k} - 1\right]}{1-1/k} - \frac{M^2 c^2}{2} = 0$$

$$RT \frac{k}{k-1}\left[\left(p_o / p\right)^{(k-1)/k} - 1\right] - \frac{M^2\, k\,RT}{2} = 0$$

Propriedades de Estagnação Isoentrópica

$$\boxed{\frac{p_o}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{k/(k-1)}}$$

agora podemos facilmente encontrar as outras propriedades

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{p_o}{p}\right)^{1/k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_o}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/(k-1)}$$

$$\frac{T_o}{T} = \frac{p_o}{p}\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{p_o}{p}\right)^{(k-1)/k} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_o}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]$$

Note que as propriedades de estagnação não oferecem uma referência para a velocidade, usamos então as propriedades críticas (M=1). O mesmo é verdade para a área.

$$\frac{p_o^*}{p^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{k/(k-1)} = 1{,}893 \text{ para } (k=1{,}4)$$

$$\frac{\rho_o^*}{\rho^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{1/(k-1)} = 1{,}577 \text{ para } (k=1{,}4)$$

$$\frac{T_o^*}{T^*} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\right] = 1{,}200 \text{ para } (k=1{,}4)$$

continuidade: $\rho V A = \rho^* V^* A^* = \dot{m} \quad ; \quad V^* = c^* = \sqrt{kRT^*}$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{c^*}{M\ c} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho}\sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M}\frac{\rho^*}{\rho_o}\frac{\rho_o}{\rho}\sqrt{\frac{T^*\ /\ T_o}{T\ /\ T_o}} =$$

Porém em um processo isoentrópico, ao desaceleramos um escoamento até o repouso, chegamos sempre aos mesmos valores das propriedade de estagnação isoentrópicas, então

$T_o^* = T_o$ e $\rho_o^* = \rho_o$, substituindo as relações obtidas temos

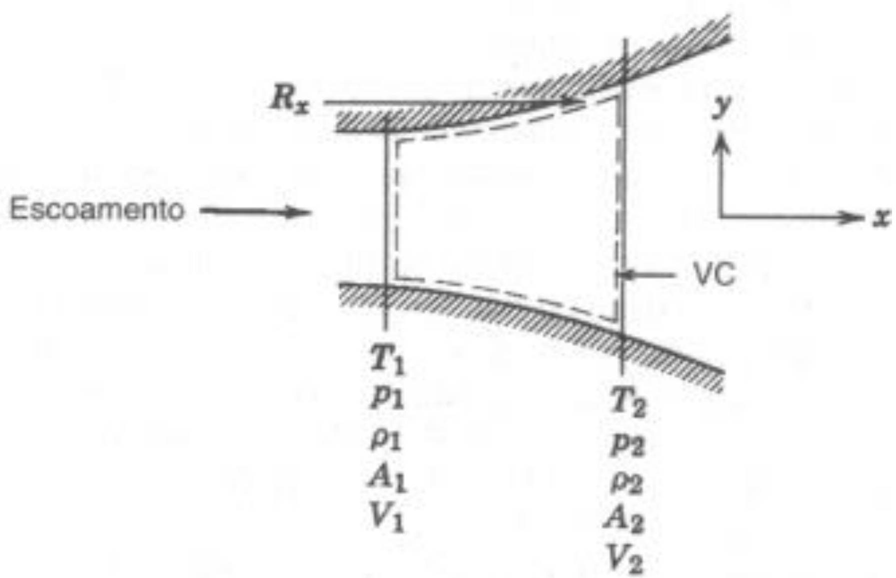
$$\boxed{\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{1 + \frac{(k-1)}{2}M^2}{(k+1)\ /\ 2}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

Exemplo: Ar escoa em regime permanente através de um bocal convergente-divergente. Na entrada a pressão absoluta é P_1 =350 kPa, temperatura T_1 =60 ^oC e a velocidade igual a V_1 =183 m/s. Na saída, o número de Mach é M_2 =1,3 e as condições locais de estagnação são conhecidas, P_{o2} = 384 kPa (abs), T_{o2} = 350 K.

Determine as propriedades de estagnação isentrópica na entrada e pressão estática e temperatura na saída.

ESCOAMENTO UNI-DIMENSIONAL DE GÁS IDEAL EM TUBULAÇÕES

- escoamento isoentrópico de área variável
- escoamento com atrito em área constante
- escoamento com transferência de calor em área constante
- choques normais



Vamos derivar as equações de conservação válidas para todos este casos.

Hipóteses:

- regime permanente
- uma entrada e uma saída
- propriedades uniformes nas seções
- força gravitacional desprezível (tubulação na horizontal)
- gás ideal

(1) **Continuidade:** $$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \; d\forall + \int_{S.C.} \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA \Rightarrow$$

$$\rho_1 \; V_1 \; A_1 \; = \; \rho_2 \; V_2 \; A_2 \; = \; \dot{m}$$

(2) **Quantidade de movimento linear:**

$$\vec{F}_s + \vec{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho \; \vec{V} \; d\forall + \int_{S.C.} \vec{V} \rho \; \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA$$

$$F_{s_x} = \int_{S.C.} V_x \rho \; \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA \; \Rightarrow \; R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m} \; (\; V_2 - V_1)$$

(3) **Energia (1[a.] lei da Termodinâmica):** $e = i + \dfrac{V^2}{2} + gz$;

$$e + \frac{p}{\rho} = h + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_\mu - \dot{W}_{outros} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \; \rho \; d\forall + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA$$

hipóteses adicionais: (i) trabalho de eixo nulo (ii) trabalho outros nulo
(iii) volume de controle perpendicular a fluxo de massa e coincidente com paredes

$$\Rightarrow \; \dot{Q} = \dot{m} \left[\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \right]$$

(4) 2ª. lei da Termodinâmica: $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$ desigualdade de Clausius para sistemas

para volumes de controle: $$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} s \;\rho \; d\forall + \int_{SC} s \;\rho \vec{V} \bullet \vec{n} \; dA \geq \int_{SC} \frac{\delta \dot{Q} \,/\, A}{T} \; dA$$

a igualdade é válida se o processo for reversível
a desigualdade é válida se o processo for irreversível

para indicar a direção do processo: $$\dot{m}\,(s_2 - s_1) \geq \int_{SC} \frac{\delta \dot{Q} \,/\, A}{T} \; dA$$

para quantificar: $$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

(5) equação de estado: $p = \rho R T \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{\rho_1 \; T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 \; T_2}$

(6) $h_2 - h_1 = c_p \; (T_2 - T_1)$

Se o processo for isoentrópico acrescentar mais uma equação, a do processo: $\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$