Estática de Fluidos

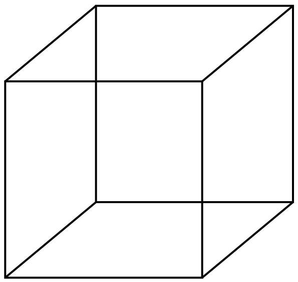
Um fluido é considerado estático quando as partículas não se deformam, isto é, estão em **repouso** ou em m**ovimento de corpo rígido.**

Como um fluido não suporta tensões cisalhantes sem se deformar, em um fluido estático só atuam tensões normais (pressão). A pressão exercida em um ponto é igual em todas as direções.

O estudo de estática de fluidos é importante em diversas aplicações, como manometria, propriedades da atmosfera, forças em sistemas hidráulicos e forças em corpos submersos.

Equações básicas da estática de fluidos

Considere um “cubo de fluido”…



Segunda Lei de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Estática: $\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = 0$

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_c$$

Força de superfície *Força de corpo*

- Equações diferenciais: equações por unidade de volume
  - Equações válidas em todos os pontos do espaço e instantes de tempo

$$\vec{f} = \vec{F} / d\forall$$

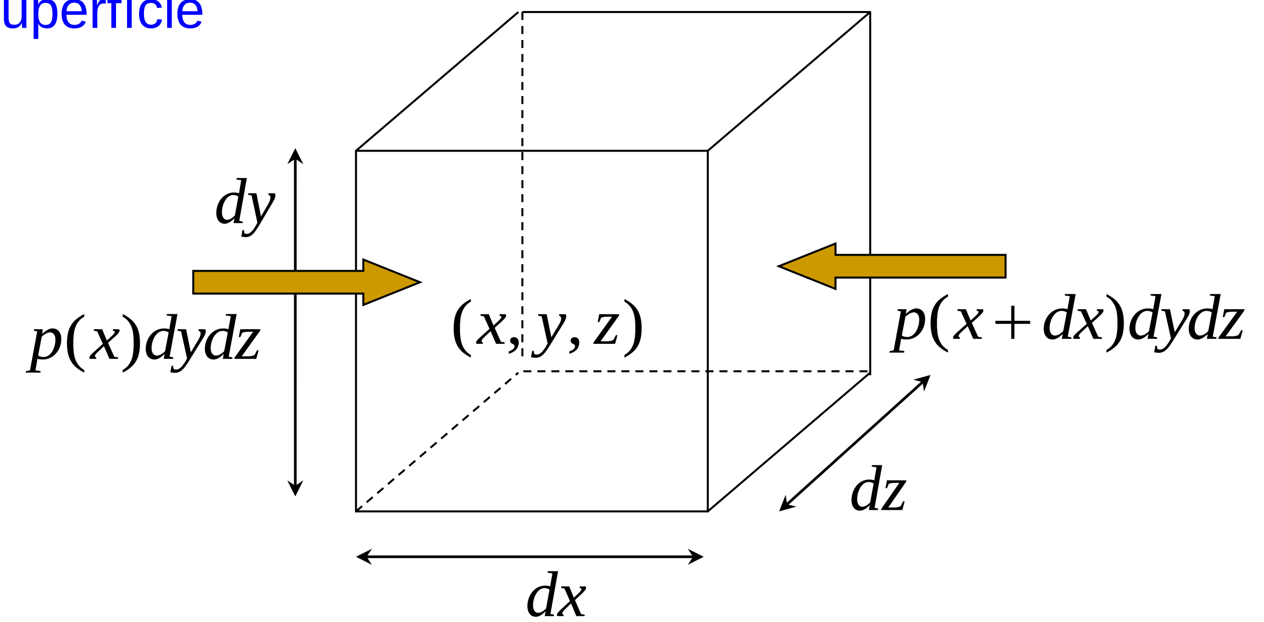
$$\boxed{\vec{f}_s + \vec{f}_c = 0}$$

Equação da estática

Forças de Corpo $\vec{F}_c = \vec{P} = m\,\vec{g} = \rho\, d\forall\, \vec{g}$

$$\boxed{\vec{f}_c = \rho\,\vec{g}}$$

Forças de Superfície



Na direção x…

$$p(x)dydz - p(x+dx)dydz \quad \Rightarrow \quad F_x = \left[\frac{p(x) - p(x+dx)}{dx}\right] dx\, dy\, dz$$

$$f_x = \frac{F_x}{d\forall} = -\left[\frac{p(x+dx) - p(x)}{dx}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad f_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\,; \quad f_z = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{f}_s = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \qquad \boxed{\vec{f}_s = -\nabla p}$$

$$\vec{f}_c + \vec{f}_s = 0$$

$$\boxed{-\nabla p + \rho \vec{g} = 0}$$

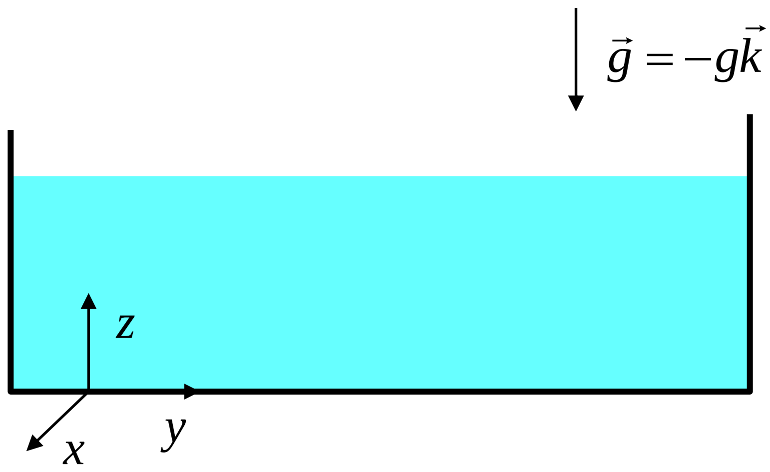
Em coordenadas cartesianas…

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

Variação da pressão em um fluido estático

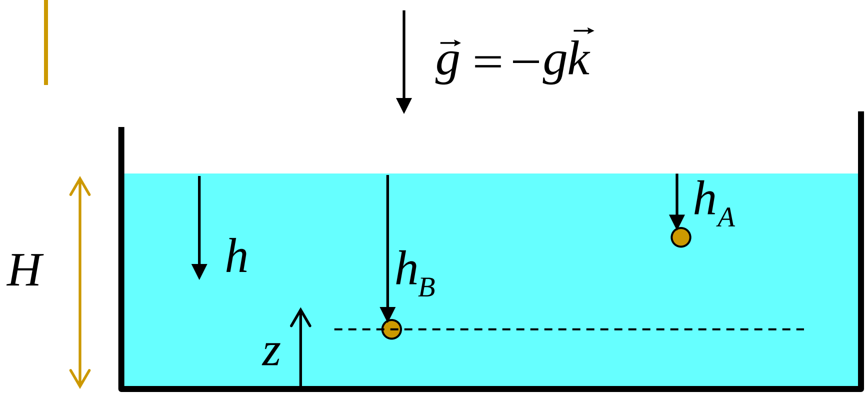


$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad p \neq p(x, y)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$dp = -\rho g dz \quad \Rightarrow \quad \int_{p_0}^{p(z)} dp = -\rho g \int_0^z dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = p_0 - \rho g z}$$

Como a pressão no fundo geralmente não é conhecida, tomar a origem no fundo não é um procedimento prático. Normalmente, a pressão na superfície do líquido é conhecida (pressão atmosférica).



$$h = H - z$$

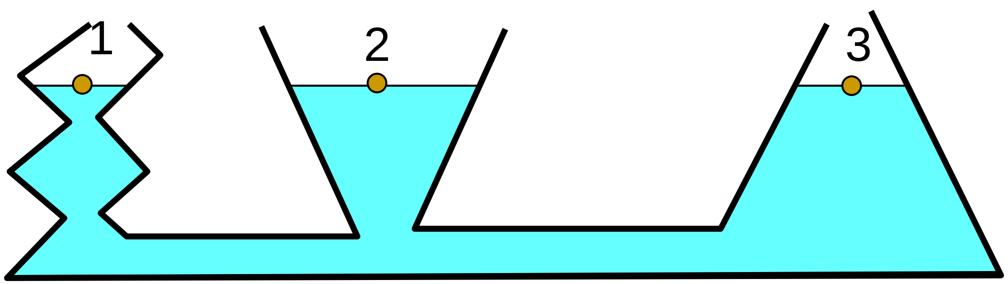
$$dp = \rho\ g\ dh \qquad (dh = -dz) \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{p_0}^{p(h)} dp = \rho g \int_0^h dh \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = p_0 + \rho\ g\ h}$$

A diferença de pressão entre dois fluidos estáticos é dada por:

$$\left.\begin{aligned} p_A &= p_0 + \rho g h_A \\ p_B &= p_0 + \rho g h_B \end{aligned}\right\} p_B - p_A = \rho g \Delta h$$

Pontos na mesma horizontal, possuem a mesma pressão.

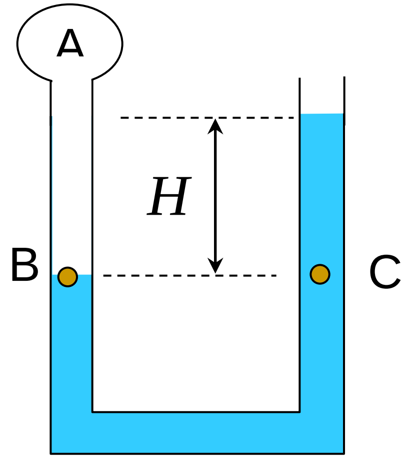


Explique porque a altura de líquido é a mesma em todos os recipientes.

Manometria

Manômetro é um dispositivo para medir diferença de pressão entre dois pontos.

Manômetro em “U”:



$$p_B = p_A$$

$$p_C = p_{atm} + \rho g H$$

Como os pontos B e C estão em uma mesma horizontal de um trecho contínuo de fluido: $p_B = p_C$

$$p_A = p_{atm} + \rho g H$$

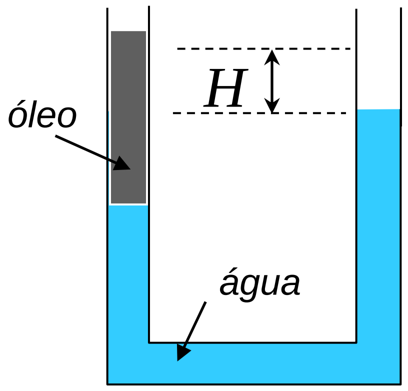
Quando as duas pernas do manômetro estão na mesma altura: $H = 0$

$$p_A = p_{atm}$$

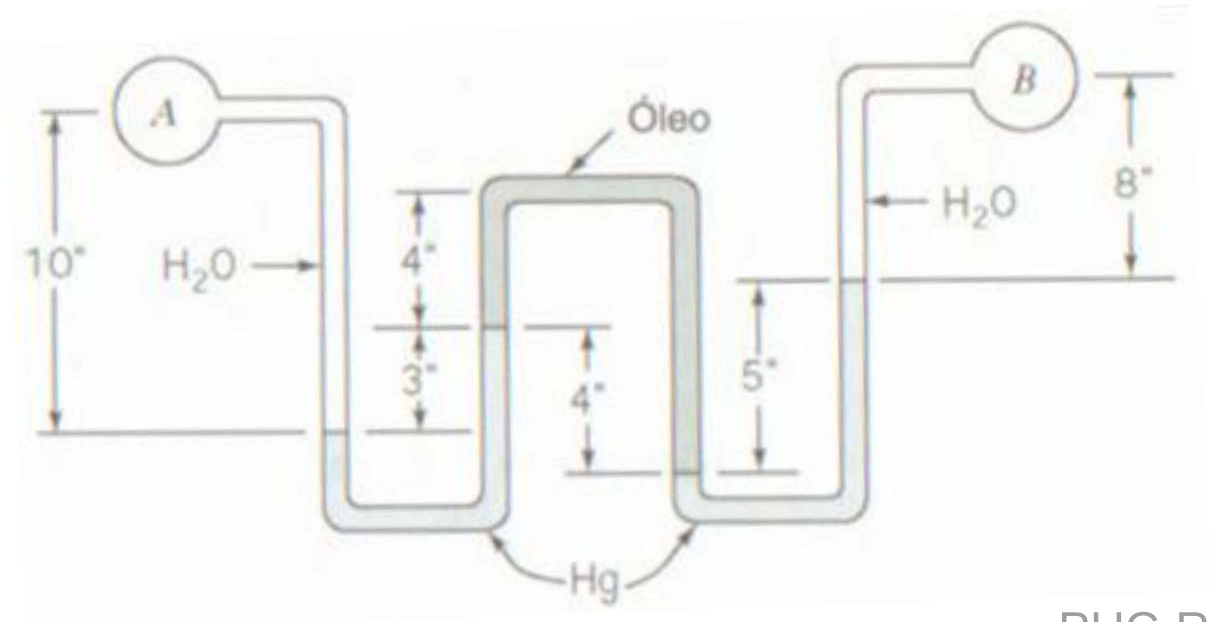
A pressão em relação a pressão atmosférica é denominada de PRESSÃO MANOMÉTRICA

$$p_{A-man} = p_A - p_{atm}$$

Exemplo 1: Um manômetro possui um diâmetro interno uniforme D = 6,35 mm. O tubo em “U” é parcialmente enchido com água. Em seguida, um volume de 3,25 cm^3 de óleo com densidade de 800 kg/m^3 é adicionado no lado esquerdo, como mostrado na figura. Calcule a altura de equilíbrio H se ambas as pernas estão abertas para a atmosfera.



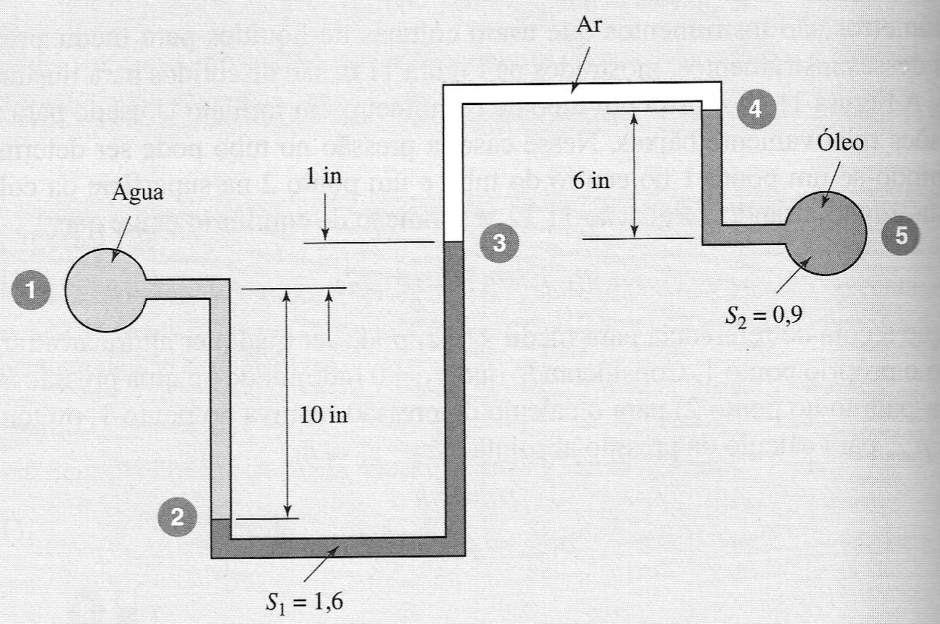
Exemplo 2: Determine a diferença de pressão entre os pontos A e B.



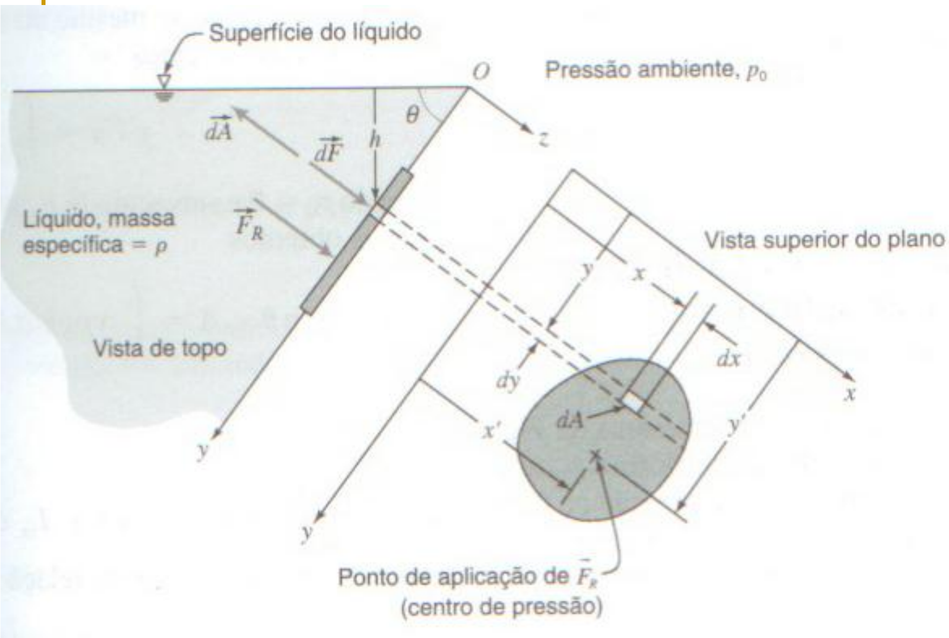
$$d_o = 0{,}8$$
$$d_{Hg} = 13{,}6$$

- Exemplo 3

Água e óleo fluem em dutos horizontais. Um manômetro em U duplo é conectado entre os dutos, como mostra a Figura E11.3. Calcule a diferença de pressão entre o duto de água e o duto de óleo.



Força em superfícies submersas planas

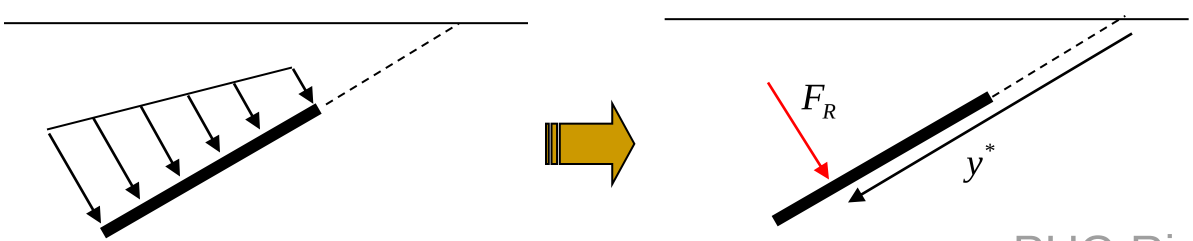


Uma vez que não pode haver tensões cisalhantes num fluido em repouso, a força hidrostática sobre qualquer elemento da superfície deve ser normal a ele.

$$d\vec{F} = -p\,\vec{n}\,dA$$

o sinal negativo indica que a força atua no sentido contra a superfície.

A resultante das forças hidrostáticas que atuam no corpo é determinada pela integral da força em cada ponto. O ponto de aplicação da força resultante deve ser tal que o seu momento em relação a qualquer eixo seja igual ao momento da força distribuída.



$$\vec{F}_R = \int d\vec{F}$$

$$F_R\, y^* = \int y\, dF$$

Força em superfícies submersas planas

A resultante das forças hidrostáticas que atuam no corpo é dada pela integral da força em cada ponto.

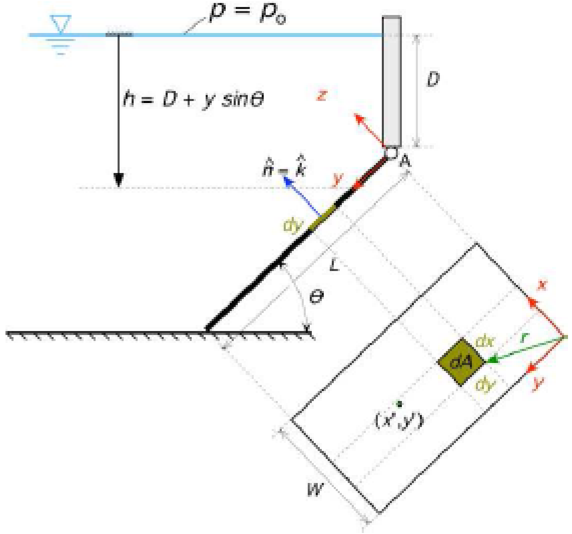


Figura: Comporta submersa.

- pressão local
  $p = p_0 + \rho g(D + y \sin\theta)$
- força elementar em dA:
  $d\vec{F} = -\vec{n}(p - p_0)dA$

Força resultante: $\vec{F} = \int d\vec{F}$

$$= -\vec{n}\rho g \int_0^L \int_0^W (D + y \sin\theta)\, dxdy$$

$$= -\vec{n}\rho g \int_0^W dx \int_0^L (D + y \sin\theta)\, dy$$

ou $\vec{F} =$
$-\vec{k}\rho g W L \left(D + \frac{L \sin\theta}{2}\right) \equiv -\vec{n}F$

Exemplo 1:

A superfície inclinada mostrada na figura, articulada ao longo de A, tem 5 m de largura. Determine a força resultante, F_r, da água e do ar sobre a superfície inclinada.

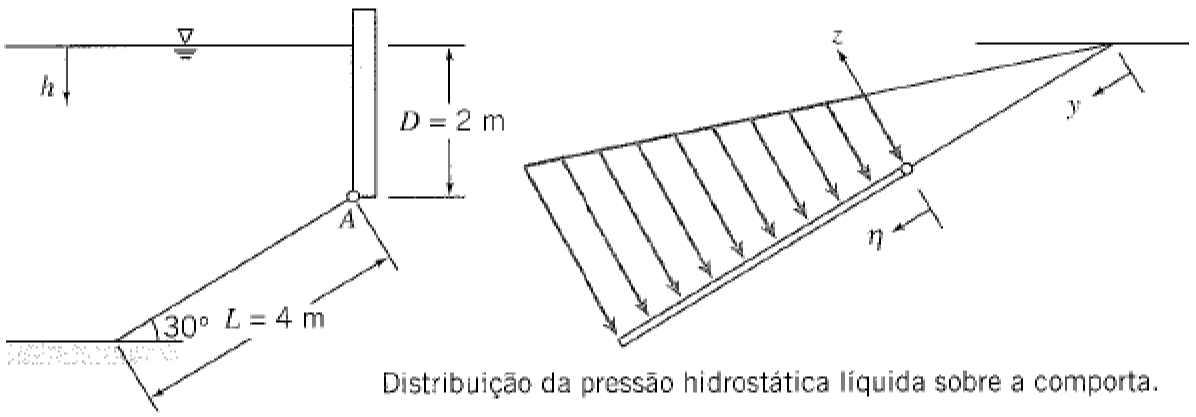
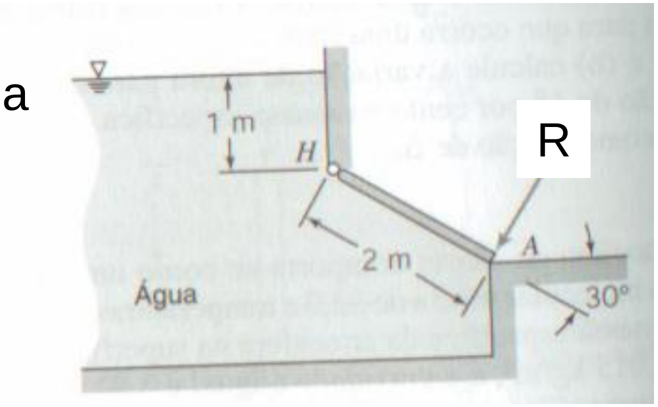
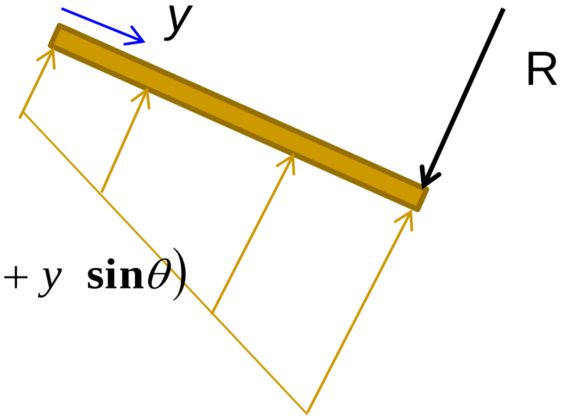


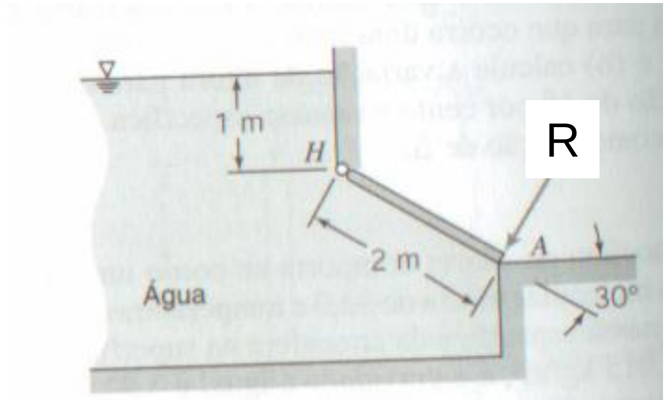
Figura: Exemplo 1.

Exemplo 2: A comporta é articulada em H e tem 2 metros de largura em um plano normal ao diagrama mostrado. Calcule a força requerida em A para manter a comporta fechada.



Exemplo 2:





$$p' = p - patm$$

$$p' = \rho_{H2O} g \left(H + y \ \mathbf{sin}\theta\right)$$

P_{atm} atua em ambos os lados, e cancela. O força resultante para manter a comporta fechada, deve ser tal que o momento em relação a origem seja nulo.

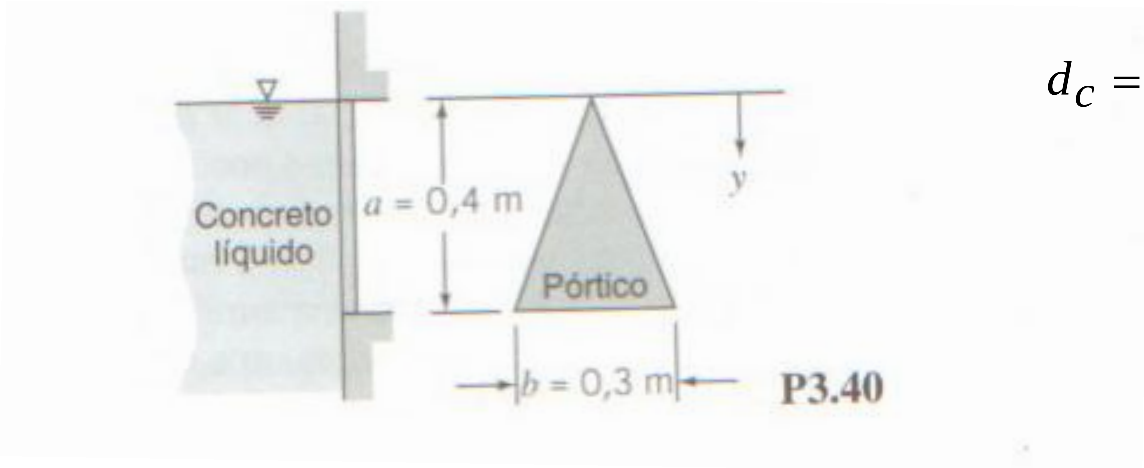
$$M_o = 0 \Rightarrow R\, L - \int_{y=0}^{y=L} y \left[\rho_{H2O} g \left(H + y\, \mathbf{sin}\theta\right)\right] w\, dy = 0$$

$$R\, L = \int_{y=0}^{y=L} y \left[\rho_{H2O} g \left(H + y\, \mathbf{sin}\theta\right)\right] w\, dy = \rho_{H2O} g w \left(H \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{3} \mathbf{sin}\theta \right)$$

$$R = \rho_{H2O} g w \left(H \frac{L}{2} + \frac{L^2}{3} \mathbf{sin}\theta \right) \qquad R = 1000 \times 9.81 \times 2 \left(1 \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} \mathbf{sin}(30) \right) = 32.67k\ N$$

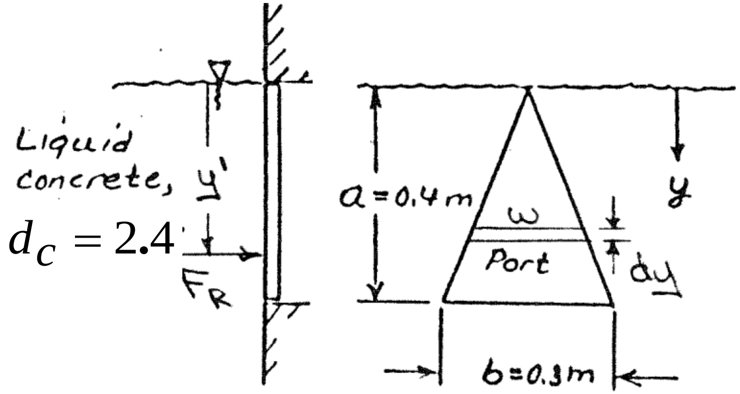
Exemplo 3:

Uma portinhola de acesso triangular deve ser providenciada na lateral de uma forma contendo concreto líquido. Determine a força resultante que age sobre a portinhola e seu ponto de aplicação.



$$d_c = 2.4$$

Exemplo 3:



$$p' = p - patm = \rho_c \; g \; y$$

$$F_R = \int dF = \int (p - p_{atm}) dA = \int p' \, w \, dy$$

Relação de triângulos $\quad \dfrac{w}{b} = \dfrac{y}{a} \Rightarrow w = \dfrac{b}{a} y$

$$F_R = \int_{y=0}^{y=a} \rho_c \; g \; y \; \frac{b}{a} y \; dy = \rho_c \; g \; \frac{b}{a} \frac{a^3}{3} = d_c \; \rho_{H2O} \; g \; b \frac{a^2}{3} = 376 N$$

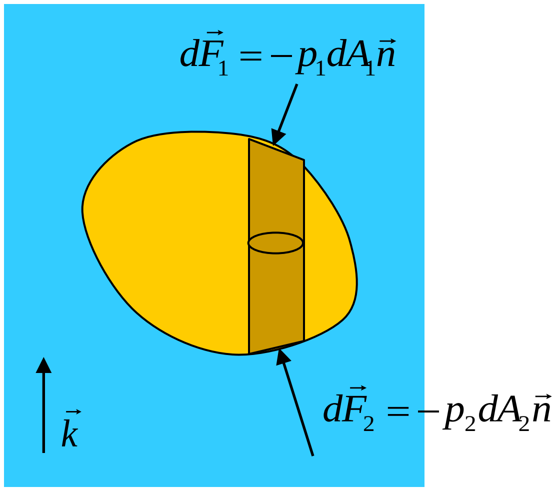
Ponto de aplicação da força resultante

$$y^* F_R = M_c = \int_{y=0}^{y=a} y \left[\rho_c \; g \; y \; \frac{b}{a} y \right] dy = \rho_c \; g \; \frac{b}{a} \frac{a^4}{4} = d_c \; \rho_{H2O} \; g \; b \frac{a^3}{4}$$

$$y^* = \frac{M_c}{F_R} = \frac{3}{4} a = 0.3 m$$

Empuxo

É a resultante das forças de pressão na direção vertical



$$dF_z = d\vec{F}_2 \cdot \vec{k} + d\vec{F}_1 \cdot \vec{k} =$$

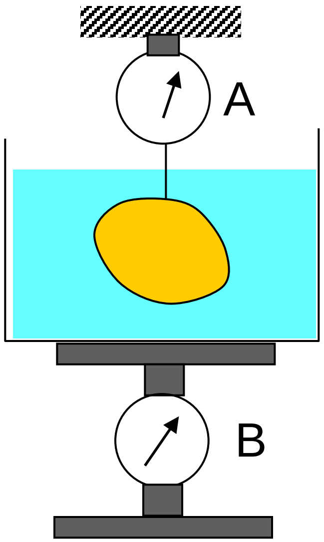
$$= -p_2 \, d\vec{A}_2 \cdot \vec{k} - p_1 \, d\vec{A}_1 \cdot \vec{k} = \left(p_2 - p_1\right) dA_z$$

$$dF_z = \rho \; g \; \underbrace{h \; dA_z}_{d\forall}$$

volume submerso

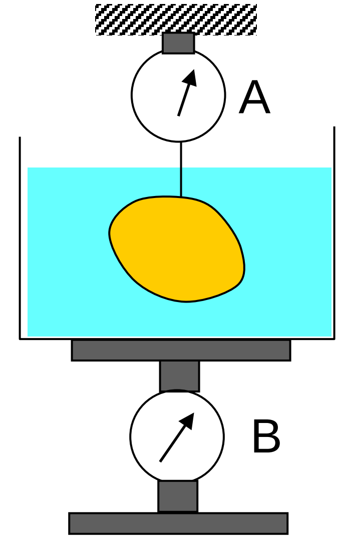
$$\boxed{F_z = \int dF_z = \rho g \forall}$$

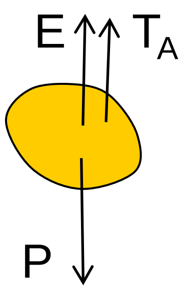
Exemplo: Determine as leituras das escalas A e B indicadas na figura. Despreze o peso do recipiente.
A rocha possui uma massa de 15 kg e volume de 0,001m^3.
O volume de água no tanque é de 20 litros.



Empuxo

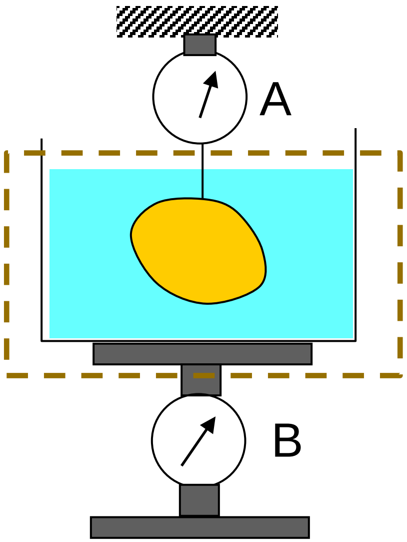
Exemplo: Determine as leituras das escalas A e B indicadas na figura. Despreze o peso do recipiente.
A rocha possui uma massa de 15 kg e volume de 0,001m³.
O volume de água no tanque é de 20 litros.





$$\sum F = 0 \Rightarrow T_A + E = P$$

$$T_A = Peso - E = m\, g - \rho_{H2O} \forall_r \, g = (15 - 1000 \times 0.001) \times 9.81 = 137.34 N$$



$$\sum F = 0 \Rightarrow T_A - Peso_{total} + N_B = 0 \Rightarrow$$

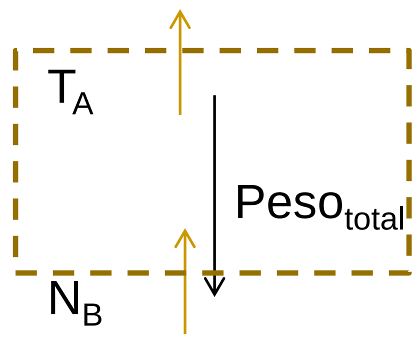
$$N_B = Peso_{tanque} + Peso_{rocha} - T_A$$

$$mas\ vimos\ que \quad Peso_{rocha} = T_A + E$$

$$\Rightarrow N_B = Peso_{tanque} + T_A + E - T_A =$$

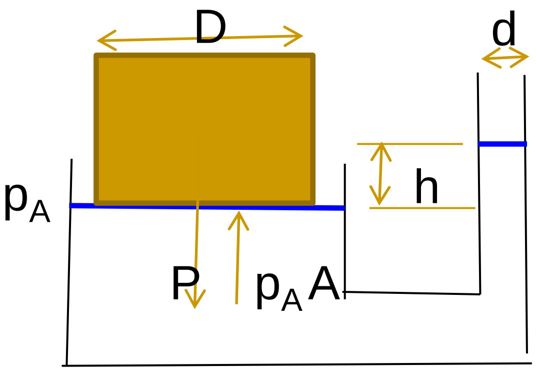
$$N_B = Peso_{tanque} + E = \rho_{H2O} \forall_t + \rho_{H2O} \forall_r g$$

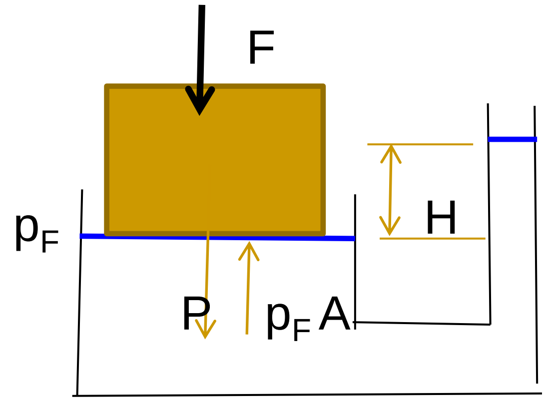
$$N_B = 1000 \times 9.81 (0.020 + 0.001) = 206.01 N$$



Exercício

Inicialmente o pistão com diâmetro D= 5 cm repousa no fluido manométrico, que possui ρ_m=13.55 $\times 10^3$ kg/m^3. Ocorre um deslocamento h=3 cm do fluido manométrico, do tubo com diâmetro d=1 cm. Calcule a força aplicada sob o pistão se o deslocamento é H=10cm





$$\sum F = 0 \Rightarrow P - p_A A = 0$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow F + P - p_F A = 0$$

$$p_A = p_{atm} + \rho_m \; g \; h$$

$$p_F = (p_{atm} + \rho_m \; g \; H)$$

$$P = (p_{atm} + \rho_m \; g \; h)\frac{\pi \, D^2}{4}$$

$$F = P - p_F A = [(p_{atm} + \rho_m \; g \; h) - (p_{atm} + \rho_m \; g \; H)]A = \rho_m \; g \; (\; H - h)\pi \frac{D^2}{4}$$

$$F = 18{,}3 N$$

Note que $\forall_{deslocado} = (\; H - h)\pi \; D^2 / 4$