

Tópicos Especiais

Iterações

As iterações possuem duas funções distintas:

- As equações são, em geral, não lineares e acopladas. Tratamos as equações como nominalmente lineares e desacopladas. As não linearidades e os acoplamentos são tratados por um processo iterativo ao recalcularmos os coeficientes e repetirmos até obter convergência.
- As equações nominalmente lineares também são resolvidas por um método iterativo (como a TDMA linha por linha), em vez de um método direto.

Tópicos Especiais

Convergência

- O desenvolvimento de um método numérico que respeite as quatro regras básicas, leva a conjunto de discretização que, para coeficientes constantes, possui convergência garantida ao utilizarmos métodos de solução do tipo ponto a ponto ou linha por linha.
- Se os coeficientes variam lentamente, ainda podemos garantir convergência. Fatores de sub-relaxação apropriados para as variáveis dependentes diminuem as variações das variáveis e portanto dos coeficientes.

- Quantidades auxiliares como massa específica ρ e viscosidade μ podem ser sub-relaxadas através de:

$$\rho = \alpha \rho_{novo} + (1 - \alpha) \rho_{velho} \quad \text{onde } \alpha \text{ é o fator de relaxação.}$$

- Ao sub-relaxarmos as quantidades apropriadas, podemos enfraquecer temporariamente o acoplamento entre o conjunto de equações. Por exemplo, a sub-relação de ρ separa as equações de temperatura/concentração. A sub-relaxação da viscosidade turbulenta μ_t reduz o acoplamento entre as quantidades turbulentas e as equações do escoamento.

- Quando o acoplamento entre as equações é devido à presença do termo de fonte (por exemplo, em convecção natural, o termo de empuxo acopla a equação e quantidade de movimento com a equação de energia), este também pode ser sub-relaxado. através de:

$$S_C = \alpha S_{C_{novo}} + (1 - \alpha) S_{C_{velho}} \quad \text{onde } \alpha \text{ é o fator de relaxação.}$$

$$S_P = \alpha S_{P_{novo}} + (1 - \alpha) S_{P_{velho}}$$

- Condições de contorno também podem ser sub-relaxadas. Por exemplo, aumenta-se gradativamente a velocidade de um disco girante que impõe um “swirl” no escoamento.

- Não existe nenhuma garantia que, para todas as não linearidades e acoplamentos, sempre conseguiremos convergência.
- Cada problema não linear e acoplado precisa de cuidados especiais. Alguns artifícios que podem auxiliar na obtenção de solução convergida:
 - (i) iniciar os cálculos com fatores de sub-relaxação bem pequenos, aumentá-los gradativamente à medida que a solução converge
 - (ii) utilizar como “chute inicial” a solução convergida de um caso mais simples. Por exemplo: inicializar o escoamento turbulento com a solução do escoamento laminar.
 - (iii) Aumentar gradativamente o parâmetro que governa o escoamento. Por exemplo: iniciar com número de Reynolds até obter o valor desejado.

Linearização do termo de Fonte

$$S = S_C + S_P \phi_P$$

Freqüentemente a causa de divergência em processo iterativos está relacionada com a linearização do termo de fonte.

1 - É preciso garantir sempre $S_p < 0$.

Por exemplo, na equação de momento angular em coordenadas cilíndricas, ρ, θ, z temos um termo de fonte para $V_\theta \Rightarrow S_{V_\theta} = -\rho V_r V_\theta / r$

Poderíamos especificar

$$S_C = 0 \quad \text{e} \quad S_P = -\rho V_r / r \quad \rightarrow \text{Errado}$$

Acontece que V_r pode ser positivo ou negativo e se for negativo estaremos violando a regra 4. A linearização adequada é (correto)

$$S_C = [[-\rho V_r / r, 0]] V_\theta^* \quad \text{e} \quad S_P = - [[\rho V_r / r, 0]]$$

2 - A melhor linearização para o termo de fonte é como vimos.

O efeito de grandes valores negativos de S_P é equivalente a sub-relaxar as equações

$$S = S^* + \left(\frac{d S}{d \phi} \right)^* (\phi - \phi^*)$$

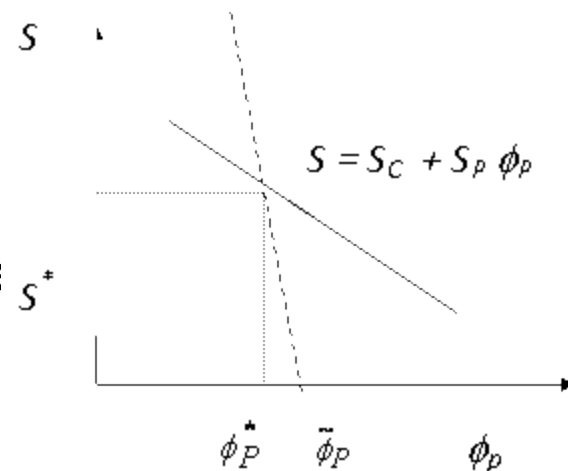
3 - Se o termo de fonte é muito grande e domina a solução temos

$$\underbrace{(\sum a_{nb} - S_P dV)}_{\approx 0} \phi_P = \underbrace{\sum a_{nb} \phi_{nb}}_{\approx 0} + S_C dV$$

$$S = S_C + S_P \phi_P \approx 0 \quad \text{e a solução é} \quad \tilde{\phi}_P \approx - \frac{S_C}{S_P}$$

$\tilde{\phi}_P$ é o valor limite de ϕ_P em problemas dominados pela fonte.

Podemos ver claramente que para grandes S_P negativos, nos afastamos muito do valor corrente de ϕ_P e que o efeito de S^* S_P é análogo a sub-relaxação



4 - Algumas vezes podemos utilizar a situação de fonte dominante para linearizar a fonte de tal forma que ϕ_p permanece dentro de certos limites.

Suponha que para um valor presente de ϕ_P^* desejamos que o próximo ϕ_p fique próximo de um valor dado $\tilde{\phi}_P$. Podemos linearizar da seguinte forma

$$S^* = S_C + S_P \phi_P \quad S^* = \frac{S^* (\tilde{\phi}_P - \phi_P)}{(\tilde{\phi}_P - \phi_P^*)} = \frac{S^* \tilde{\phi}_P}{(\tilde{\phi}_P - \phi_P^*)} - \frac{S^* \phi_P}{(\tilde{\phi}_P - \phi_P^*)}$$

então
$$S_C = \frac{S^* \tilde{\phi}_P}{(\tilde{\phi}_P - \phi_P^*)} \quad e \quad S_P = - \frac{S^*}{(\tilde{\phi}_P - \phi_P^*)}$$

solução
$$\tilde{\phi}_P \approx - \frac{S_C}{S_P} = \tilde{\phi}_P$$

O valor de $\tilde{\phi}_P$ deve ser determinado a partir de considerações físicas.

Por definição $0 \leq m_\ell \leq 1$, se o valor corrente é m_ℓ^* e S^* é positivo, m_ℓ deverá crescer e especificaremos $\tilde{m}_\ell = 1$

Se S^* for negativo, m_ℓ deverá diminuir e especificaremos $\tilde{m}_\ell = 0$

(Outras escolhas mais conservativas para os limites podem ser escolhidas).

- Observe que o valor de ϕ_p não será $\tilde{\phi}_p$ porque essas considerações foram feitas baseadas no fato do termo de fonte ser dominante, na realidade os outros termos influem ϕ_p .
- O objetivo do procedimento não é determinar a solução final para ϕ_p , mas controlar seu progresso no processo iterativo e evitar variações rápidas e soluções irrealísticas.

5 - De um modo geral, sabemos especificar ϕ somente no contorno. Contudo, podemos especificar qualquer valor desejado para ϕ em qualquer ponto interno através dos termos de fonte,

$$S_C = 10^{30} \phi_{desejado} \quad \text{e} \quad S_P = -10^{30}$$

Como 10^{30} é muito grande, o termo de fonte será dominante e como consequência,

$$S = S_C + S_P \phi_P \approx 0$$

e a solução é

$$\phi_P \approx -\frac{S_C}{S_P} = \phi_{desejado}$$

Esse procedimento pode ser usado para representar pequenos obstáculos no domínio computacional, ao inserirmos condições de contorno internas.

6 – Linearização da Fonte para Variáveis sempre Positivas

Variáveis como fração mássica de espécies químicas, energia cinética turbulenta, fluxos de radiações, etc, devem ser sempre variáveis positivas.

Essas quantidades podem possuir termos de fonte positivos e negativos (i.e. geração e destruições e a fonte líquida pode ser negativa. Se cuidado não for tomado a variável que deveria ser sempre positiva pode adquirir erradamente valores negativos.

A 2ª lei básica é sobre coeficientes positivos. Quando as variáveis são sempre positivas é necessário adicionar que S_C deve ser sempre positivo (e $S_p < 0$)

Suponha que $S = S_1 - S_2$ sendo $S_1 > 0$, $S_2 > 0$

Então
$$S = S_1 - \frac{S_2}{\phi_P} \phi_P$$

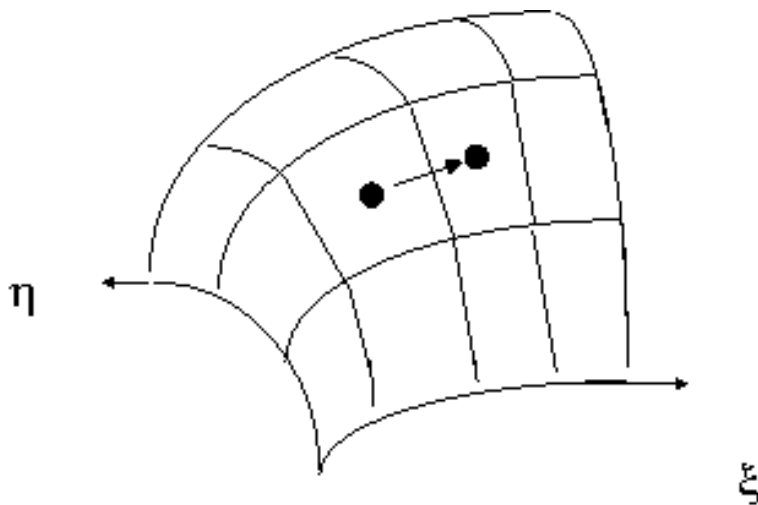
linearizaremos como
$$S_C = S_1 \quad S_P = - \frac{S_2}{\phi_P^*}$$

onde ϕ_p^* é o valor corrente de ϕ_p

Geometrias Irregulares

Coordenadas Ortogonais Curvilíneas

- Fizemos toda a apresentação em coordenadas cartesianas, mas vimos que a extensão para coordenadas cilíndricas ou esféricas é imediata.
- Todo o procedimento mostrado pode ser aplicado para coordenadas generalizadas curvilíneas ortogonais.



A propriedade de que a malha seja ortogonal é essencial para o método mostrado, porque os fluxos de difusão através das faces dos volumes de controle são obtidos em função dos valores de ϕ em 2 pontos nodais e é essencial que a face do Volume de controle seja normal à linha unindo os 2 pontos.

- A implementação do método neste caso é relativamente fácil.
- É no entanto necessário, construir o sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas corretamente para o domínio irregular. Existem diversos procedimentos e técnicas disponíveis e técnicas disponíveis para isso:

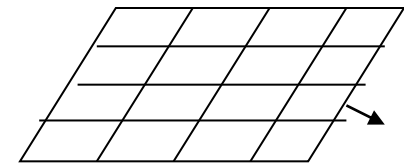
Ex.: J. E. Thompson, S.U.A. Warsi, C. Wayne Mastin

Numerical grid Generation. Fundamentals and Applications

Geração de Malha

Algébricos

- Interpolação de Lagrange ou Hermitiana
- Interpolação transfinita



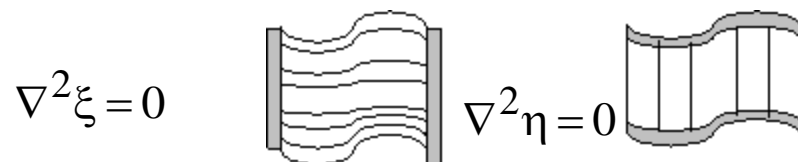
Diferencial

Ortogonal

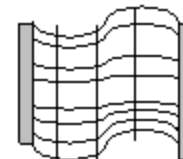
difícil de gerar , algoritmo fácil

Não-ortogonal

mais fácil de gerar, algoritmo difícil



⇒



Desejamos $x = x(\xi, \eta)$ $y = y(\xi, \eta)$; Utilizamos funções auxiliares, P e Q como fontes e sorvedouros, para gerar malha não uniforme

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2} (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2} (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

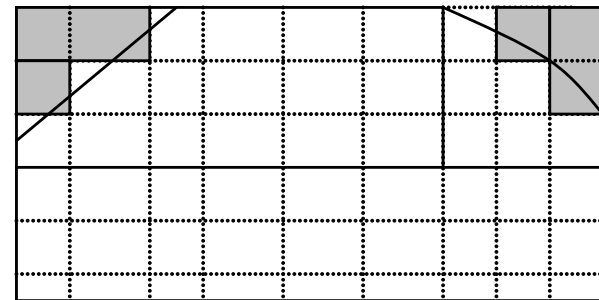
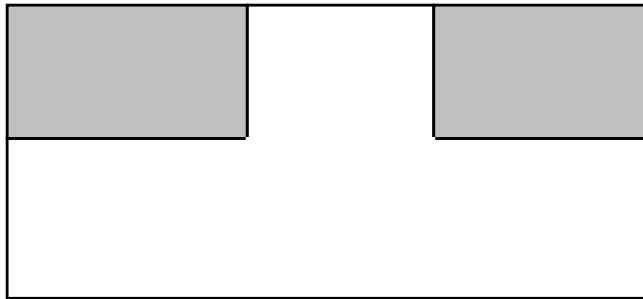
$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$$

métricas $J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$ Jacobiano

observação: coordenadas ortogonais $\eta \perp \xi \Rightarrow \beta = 0$

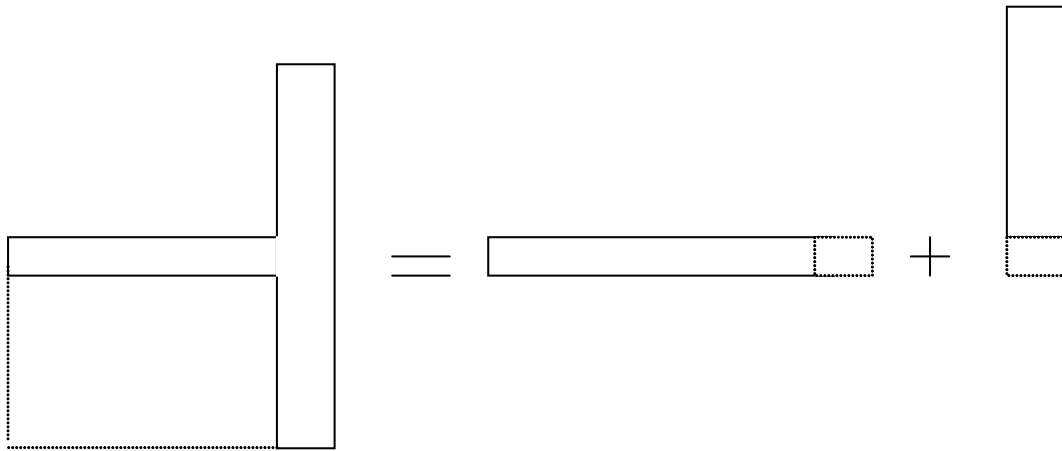
Malha regular com regiões bloqueadas

Ocasionalmente seu programa de computador escrito para uma malha regular pode ser improvisado para resolver domínios irregulares. O procedimento consiste em bloquear alguns volumes de controle, tornando-os inativos.



As regiões sombreadas são inativas. A aproximação de superfície curvas por escadinhas se mostrou bastante razoável em um número bastante grande de problemas.

Exemplos:



A maior parte do domínio está bloqueado. Não é válido. Alternativa é usar 2 domínios, com uma certa superposição.

A operação de bloquear a região, consiste em estabelecer valores conhecidos de ϕ nos volumes de controle inativos. Se a região inativa representa uma superfície sólida, especifica-se velocidade nula. Se a região for isotérmica, o valor da temperatura pode ser especificado nos volumes de controle inativos.

Métodos para prescrever ϕ na região inativa

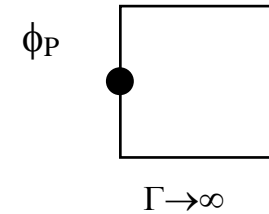
- Termo de fonte grande como já visto

$$S_c = 10^{30} \phi_{\text{des}} \quad ; \quad S_p = -10^{30} \quad \Rightarrow \quad \phi_P \approx -S_c/S_p = \phi_{\text{des}}$$

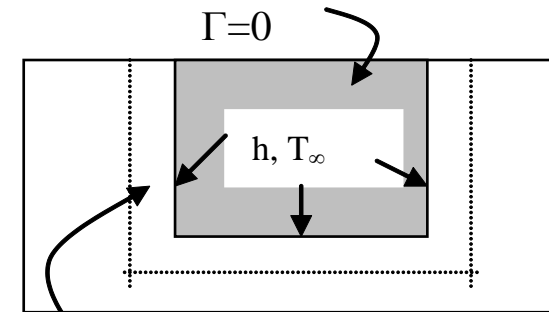
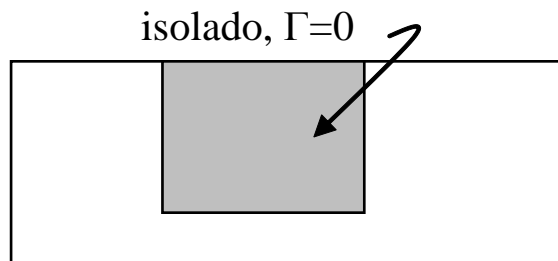
- ~~Baseado no uso da média harmônica:~~

Vimos que descontinuidades em Γ são consideradas corretamente com a média harmônica. Se Γ muito grande for especificado na zona inativa, o valor prescrito no contorno nominal prevalecerá sobre toda a região e a solução da região ativa não será afetada.

Se $\Gamma \rightarrow \infty$ todo o volume de controle, possuirá o valor de ϕ_P



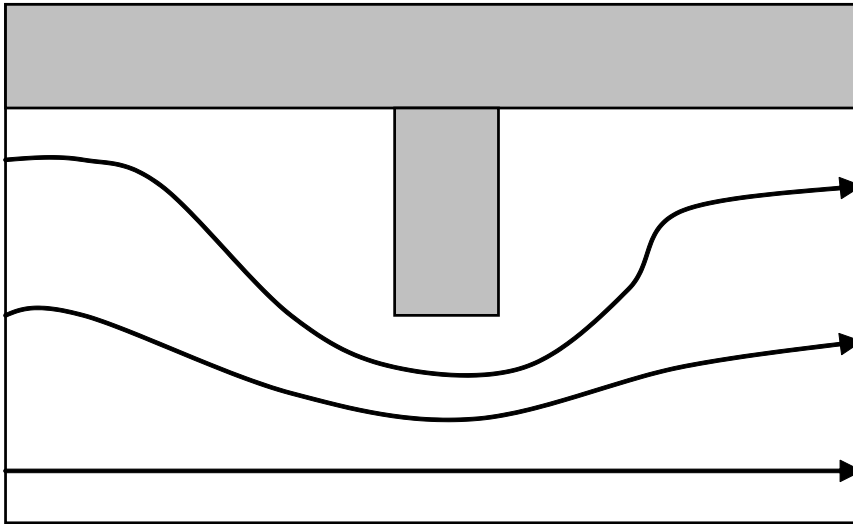
Ex.: velocidade zero na parede e viscosidade alta para a zona inativa.



Obs.: - Somente condições de contorno simples podem ser utilizadas nas fronteiras irregulares.

- desperdício de tempo e armazenagem do computador.
- ainda assim vantajoso em certos casos particulares.

Transferência de Calor Conjugado



Calcular separadamente a região sólida e líquida resultaria em um processo iterativo para haver concordância na interface.

Pode-se resolver o problema com as duas regiões especificando alta viscosidade para a região sólida, μ correto para o fluido e k correto nas 2 regiões.

A interface sólido e líquido seria simplesmente um ponto interno.

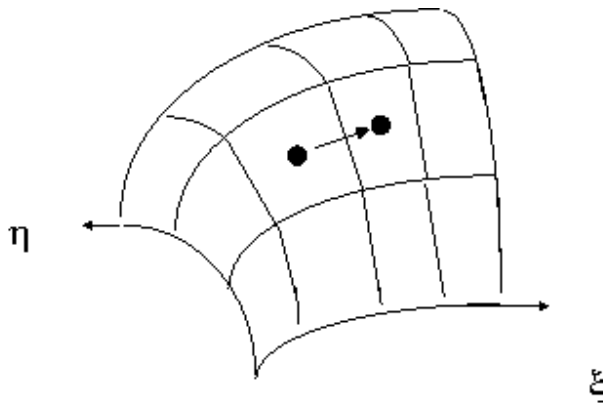
Coordenadas Curvilíneas

Coordenadas Curvilíneas

- **Equação Geral de Conservação**

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_C + S_P \phi$$

O sistema de coordenadas adotado é aquele onde suas coordenadas adaptam-se ao contorno da geometria. Este sistema de coordenadas curvilíneas é relacionado com o sistema cartesiano pelas seguintes relações:



$$\xi = \xi(x, y, z)$$

$$\eta = \eta(x, y, z)$$

$$\tau = \tau(x, y, z)$$

- As equações de conservação podem ser escritas no novo sistema de coordenadas, utilizando-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

- É conveniente também apresentar estas relações de transformação utilizando relações inversas a estas. As métricas destas transformações são obtidas através da função inversa.

Os diferenciais do domínio transformado e físico são dados por:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} & \frac{\partial \tau}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\tau \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} d^T \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} d^F \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d^F \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} d^T \end{bmatrix}$$

onde d^T e d^F denotam os domínios transformado e físico, respectivamente.

- Para satisfazer as equações anteriores, a matriz A deve ser igual ao inverso matriz B, ou, $A = B^{-1}$. Matematicamente:

$$B^{-1} = \frac{1}{J_a} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) & - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & - \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix}$$

onde J_a é o Jacobiano da transformação dado por:

$$J_a = \text{Det}[B] =$$

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial x}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right]$$

- Para situações bi-dimensionais, a função $\tau = \tau(x,y,z)$, escolhida é $\tau = z = 1$. Portanto, as derivadas de t em relação às coordenadas x e y são nulas, assim como as derivadas de z em relação a ξ e η são nulas e $\partial\tau/\partial z = \partial z/\partial\tau = 1$. Assim, a matriz $A = B^{-1}$ e o Jacobiano são escritos da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{J_a} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix}$$

$$J_a = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

- Comparando a matriz A com a inversa da matriz B, encontram-se as relações inversas. Assim:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J_a} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J_a} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J_a} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J_a} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

- Utilizando estas relações, as derivadas de uma variável $f(x,y,z)$ podem ser escritas no novo sistema de coordenadas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J_a} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J_a} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

- Utilizando-se as relações acima, as equações de conservação do movimento são obtidas no novo sistema de coordenadas.

Equação Geral de Conservação em Coordenadas Curvilíneas Não-ortogonais

$$(*) \quad \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{J_a} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J_{T\xi} \right) + \frac{1}{J_a} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J_{T\eta} \right) = S_C + S_P \phi$$

onde $J_a = \text{Jacobiano}$ $J_a = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$; volume : $dV = J_a \Delta \xi \Delta \eta$

Fluxo total:

Fluxo principal – fluxo secundário: $J_{T\xi} = J_{P\xi} - J_{S\xi}$; $J_{T\eta} = J_{P\eta} - J_{S\eta}$

Fluxo principal

fluxo secundário

$$J_{P\xi} = \left(\rho U_\xi \phi - \frac{h_\eta^2}{J_a} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) ; \quad J_{S\xi} = \left(- \frac{\beta}{J_a} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)$$

$$J_{P\eta} = \left(\rho V_\eta \phi - \frac{h_\xi^2}{J_a} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) ; \quad J_{S\eta} = \left(- \frac{\beta}{J_a} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)$$

Componentes Contravariantes: U_ξ, V_η

Componentes Cartesianos: u, v

$$U_\xi = \bar{u} \cdot \hat{n}_\xi = \left(u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{1}{h_\eta} \quad ; \quad V_\eta = \bar{u} \cdot \hat{n}_\eta = \left(-u \frac{\partial y}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{1}{h_\xi}$$

$$\text{métricas: } h_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad ; \quad h_\xi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

obs: $\xi \perp \eta \Rightarrow \beta = 0$; $J_a = h_\eta h_\xi$

Relembrando que a equação da continuidade é $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{Ja} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U_{\xi}) + \frac{1}{Ja} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V_{\eta}) = 0$$

Integrando no volume e no tempo e dividindo por Δt , temos

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} Ja \Delta \xi \Delta \eta + (\rho U_{\xi})_e \Delta \eta - (\rho U_{\xi})_w \Delta \eta + (\rho V_{\eta})_n \Delta \xi - (\rho V_{\eta})_s \Delta \xi$$

logo

$$\frac{\rho_P Ja \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\rho_P^0 Ja \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t}}_{a_P^0} - \underbrace{(\rho U_{\xi})_e \Delta \eta}_{F_e} + \underbrace{(\rho U_{\xi})_w \Delta \eta}_{F_w} - \underbrace{(\rho V_{\eta})_n \Delta \xi}_{F_n} + \underbrace{(\rho V_{\eta})_s \Delta \xi}_{F_s}$$

Integrando no volume e no tempo a equação geral e dividindo por Δt

$$\frac{\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} J_a \Delta \xi \Delta \eta + (J_{T\xi e} - J_{T\xi w}) \Delta \eta + (J_{T\eta n} - J_{T\eta s}) \Delta \xi =$$

$$= (S_C + S_P \phi_P) J_a \Delta \xi \Delta \eta$$

Substituindo a massa específica no instante de tempo t , juntamente com as definições de fluxo principal e secundário, na equação acima obtém-se

$$a_P^0 \left(\phi_P - \phi_P^0 \right) + (J_{P\xi e} \Delta \eta - F_e \phi_P) - (J_{P\xi w} \Delta \eta - F_w \phi_P) +$$

$$+ (J_{P\eta n} \Delta \xi - F_n \phi_P) - (J_{P\eta s} \Delta \xi - F_s \phi_P) =$$

$$= (J_{S\xi e} \Delta \eta) - (J_{S\xi w} \Delta \eta) + (J_{S\eta n} \Delta \xi) - (J_{S\eta s} \Delta \xi) +$$

$$+ (S_C + S_P \phi_P) J_a \Delta \xi \Delta \eta$$

onde

$$\begin{aligned} (J_{P\xi_e} \Delta \eta - F_e \phi_P) &= a_E (\phi_P - \phi_E) \\ (J_{P\xi_w} \Delta \eta - F_w \phi_P) &= a_W (\phi_P - \phi_W) \\ (J_{P\eta_n} \Delta \eta - F_n \phi_P) &= a_N (\phi_P - \phi_N) \\ (J_{P\eta_s} \Delta \eta - F_s \phi_P) &= a_S (\phi_P - \phi_S) \end{aligned}$$

rearrumando obtém-se $a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b$

onde $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P Ja \Delta \xi \Delta \eta$

$$b = a_P^0 \phi_P^0 + S_C Ja \Delta \xi \Delta \eta + \left[(J_{S\xi_e} \Delta \eta) - (J_{S\xi_w} \Delta \eta) \right] + \left[(J_{S\eta_n} \Delta \xi) - (J_{S\eta_s} \Delta \xi) \right] \quad a_P^0 = \frac{\rho_P^0 Ja \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t}$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \quad ; \quad a_W = D_w A(|P_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \quad ; \quad a_S = D_s A(|P_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket$$

Power-law

$$A(|P|) = \left[\left[0, (1 - 0,1|P|)^5 \right] \right]$$

$$F_e = (\rho U_\xi)_e \Delta \eta \quad ; \quad F_w = (\rho U_\xi)_w \Delta \eta \quad ; \quad D_e = \left. \frac{\Gamma A_\xi}{\delta \xi} \right)_e \quad ; \quad D_w = \left. \frac{\Gamma A_\xi}{\delta \xi} \right)_w$$

$$F_n = (\rho V_\eta)_n \Delta \xi \quad ; \quad F_s = (\rho V_\eta)_s \Delta \xi \quad ; \quad D_n = \left. \frac{\Gamma A_\eta}{\delta \eta} \right)_n \quad ; \quad D_s = \left. \frac{\Gamma A_\eta}{\delta \eta} \right)_s$$

$$P_e = F_e / D_e \quad ; \quad P_w = F_w / D_w \quad ; \quad P_n = F_n / D_n \quad ; \quad P_s = F_s / D_s$$

$$A_\xi = \frac{h_\eta^2 \Delta \eta}{Ja} \quad ; \quad A_\eta = \frac{h_\xi^2 \Delta \xi}{Ja}$$

$$\left. \frac{\Gamma}{\delta \xi} \right)_e = \left[\frac{\delta \xi_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta \xi_e^+}{\Gamma_E} \right]^{-1} \quad ; \quad \left. \frac{\Gamma}{\delta \xi} \right)_w = \left[\frac{\delta \xi_w^-}{\Gamma_W} + \frac{\delta \xi_w^+}{\Gamma_P} \right]^{-1}$$

$$\left. \frac{\Gamma}{\delta \eta} \right)_n = \left[\frac{\delta \eta_n^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta \eta_n^+}{\Gamma_N} \right]^{-1} \quad ; \quad \left. \frac{\Gamma}{\delta \eta} \right)_s = \left[\frac{\delta \eta_s^-}{\Gamma_S} + \frac{\delta \eta_s^+}{\Gamma_P} \right]^{-1}$$

fluxos secundários

$$J_{S\xi_e} \Delta \eta = - \frac{\beta}{Ja} \Gamma \Delta \eta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e = - \frac{\beta}{Ja} \frac{\Gamma}{\delta \xi} \Delta \eta \left[\delta \xi_e^- \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_E + \delta \xi_e^+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_P \right]$$

$$J_{S\xi_w} \Delta \eta = - \frac{\beta}{Ja} \Gamma \Delta \eta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w = - \frac{\beta}{Ja} \frac{\Gamma}{\delta \xi} \Delta \eta \left[\delta \xi_w^- \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_P + \delta \xi_w^+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_W \right]$$

$$J_{S\eta_n} \Delta \xi = - \frac{\beta}{Ja} \Gamma \Delta \xi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n = - \frac{\beta}{Ja} \frac{\Gamma}{\delta \eta} \Delta \eta \left[\delta \eta_e^- \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_N + \delta \eta_e^+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_P \right]$$

$$J_{S\eta_s} \Delta \xi = - \frac{\beta}{Ja} \Gamma \Delta \xi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_s = - \frac{\beta}{Ja} \frac{\Gamma}{\delta \eta} \Delta \eta \left[\delta \eta_s^- \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_P + \delta \eta_s^+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_W \right]$$

para ponto nodal centrado no volume de controle:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_P &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta \eta_n} + \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta \eta_s} \right] & \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_P &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta \xi_e} + \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta \xi_w} \right] \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_E &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{NE} - \phi_E}{\delta \eta_{ne}} + \frac{\phi_E - \phi_{SE}}{\delta \eta_{se}} \right] & \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_N &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{NE} - \phi_N}{\delta \xi_{ne}} + \frac{\phi_N - \phi_{NW}}{\delta \xi_{nw}} \right] \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_W &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{NW} - \phi_W}{\delta \eta_{nw}} + \frac{\phi_W - \phi_{SW}}{\delta \eta_{sw}} \right] & \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_S &= \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{SE} - \phi_S}{\delta \xi_{se}} + \frac{\phi_S - \phi_{SW}}{\delta \xi_{sw}} \right] \end{aligned}$$

Malha uniforme

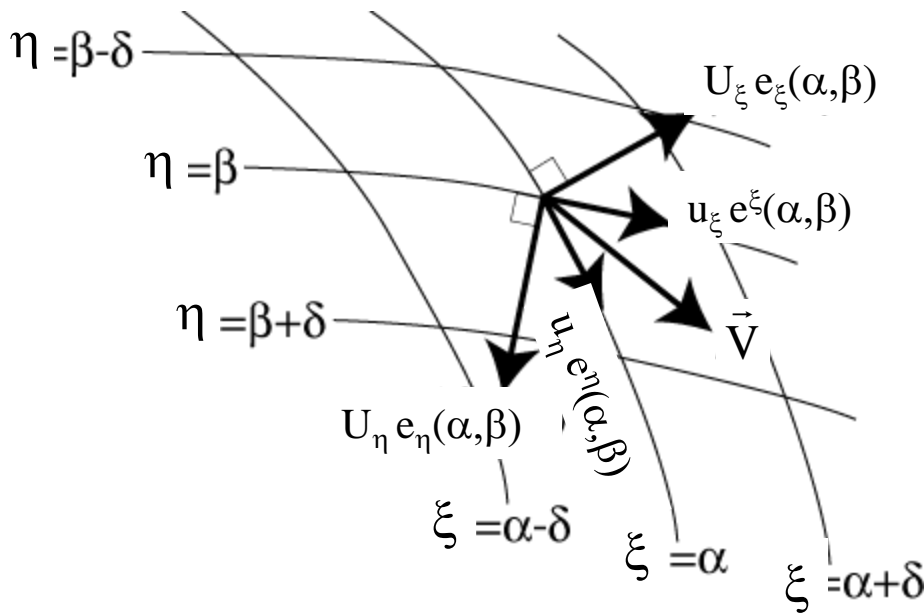
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_P = \left[\frac{\phi_N - \phi_S}{2 \delta \eta} \right] ; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_E = \left[\frac{\phi_{NE} - \phi_{SE}}{2 \delta \eta} \right] ; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_W = \left[\frac{\phi_{NW} - \phi_{SW}}{2 \delta \eta} \right]$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_P = \left[\frac{\phi_E - \phi_W}{2 \delta \xi} \right] ; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_N = \left[\frac{\phi_{NE} - \phi_{NW}}{2 \delta \xi} \right] ; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_S = \left[\frac{\phi_{SE} - \phi_{SW}}{2 \delta \xi} \right]$$

Os parâmetros geométricos precisam ser avaliados:

- nas faces leste e oeste: h_η , β e Ja
- nas faces norte e sul: h_ξ , β e Ja
- ponto nodal principal: Ja

Equações de Conservação de Quantidade de Movimento Linear



$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

Cartesianos

$$\vec{V} = U_{\xi} \bar{e}_{\xi} + V_{\eta} \bar{e}_{\eta}$$

Contra variantes

$$\vec{V} = u_{\xi} \hat{e}^{\xi} + u_{\eta} \bar{e}^{\eta}$$

Co-variantes

• Os componentes contravariantes de um vetor são obtidos projetando no eixo de coordenadas.

• Os componentes covariantes são obtidos projetando nas linhas normais ao hiperplano de coordenadas

Se a malha for ortogonal

$$u_{\xi} = U_{\xi}$$

Pode-se selecionar:

$$\phi \Rightarrow u, v \quad \text{ou} \quad U_\xi \text{ e } V_\eta \quad \text{ou} \quad u_\xi \text{ e } v_\xi$$

As velocidades podem ser co-localizadas ou deslocadas.

Componentes Cartesianas: u, v

- não apresentam termos adicionais de curvatura
- é necessário calcular U_ξ e V_η .
- equação da pressão é mais complicada. O forçamento de u não é dado por pressões adjacentes. ex.: para o componente vertical v

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{P_p - P_s}{\Delta \eta} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{(P_E + P_{SE})/2 - (P_W + P_{SW})/2}{2 \Delta \xi}$$

Componentes Contravariantes: U_ξ e V_η

- já são necessários para o cálculo do fluxo de massa
- equação de conservação possui termos de curvatura
- o forçamento de U_ξ não é dado por pressões adjacentes.

Componentes Covariantes: u_ξ e v_η

- equação de conservação possui termos de curvatura
- é necessário calcular U_ξ e V_η
- o forçamento de u_ξ é dado por pressões adjacentes.

Componentes Contravariantes Deslocados

- artifício para evitar cálculo de termos de curvatura

$$U_{\xi} = \left[u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] \frac{1}{h_{\eta}}$$

$$(\text{eq. } U_{\xi}) = \left[(\text{eq. } u) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\text{eq. } v) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] \frac{1}{h_{\eta}}$$

- termos de fonte para U_{ξ} obtidos a partir dos termos de fonte cartesianos.
- Termos de curvatura obtidos a partir dos componentes cartesianos.

O mesmo artifício pode ser usado para os componentes covariantes.

Componentes Contravariantes U_ξ e V_η em função dos componentes cartesianas: u, v

$$U_\xi = \bar{u} \cdot \hat{n}_\xi = \left(u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{1}{h_\eta} \quad ; \quad V_\eta = \bar{u} \cdot \hat{n}_\eta = \left(-u \frac{\partial y}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{1}{h_\xi}$$

Discretização das equações de momento para os componentes cartesianos

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\Delta \nabla}{Ja} + b_u \quad ; \quad a_p^v v_p = \sum a_{nb}^v v_{nb} - \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\Delta \nabla}{Ja} + b_v$$

$$a_p U_{\xi P} h_{\eta P} = a_E \overbrace{\left[u_E \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_P - v_E \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_P}^{U''_{\xi E} h_{\eta P}} + a_W \overbrace{\left[u_W \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_P - v_W \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_P}^{U''_{\xi W} h_{\eta P}} + \dots +$$

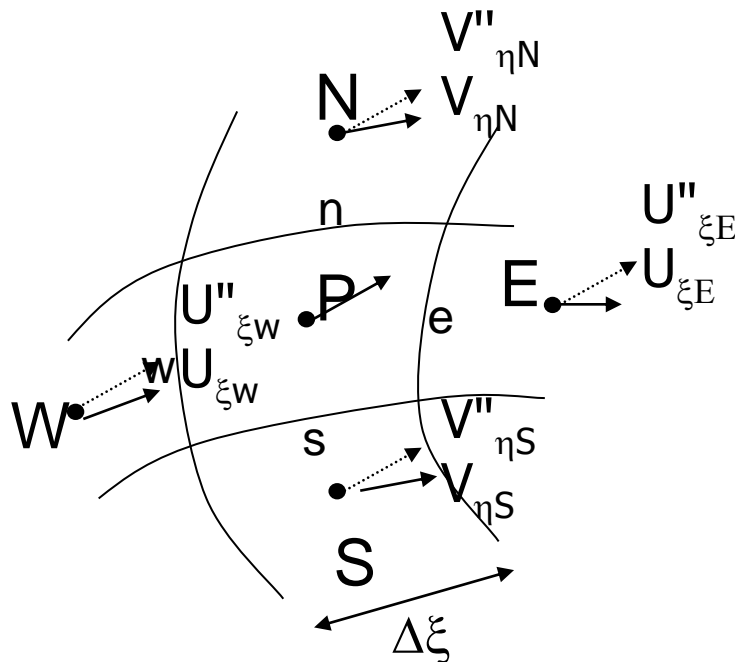
$$+ \text{pressure terms} + \underbrace{\left[b_u \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_P - b_v \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_P}_{b'_u h_{\eta P}}$$

$$a_p U_{\xi P} h_{\eta P} = a_E U''_{\xi E} h_{\eta P} + a_W U''_{\xi W} h_{\eta P} + \dots + \text{pressure terms} + b'_u h_{\eta P}$$

Somando e subtraindo $\sum a_{nb} U_{\xi nb}$ obtém-se

$$a_P U_{\xi P} = a_E U_{\xi E} + a_W U_{\xi W} + a_N U_{\xi n} + a_S U_{\xi S} - \left(\frac{\Delta \nabla}{h_{\xi P}} \frac{\alpha_{\xi P}}{h_{\eta P}} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_P + \left(\frac{\Delta \nabla}{h_{\eta P}^2} \frac{\beta_{\xi P}}{\partial \eta} \right)_P + B_{\xi P} + b'_u$$

onde



$$B_{\xi P} = a_E (U''_{\xi E} - U_{\xi E}) + a_W (U''_{\xi W} - U_{\xi W}) + a_N (U''_{\xi N} - U_{\xi N}) + a_S (U''_{\xi S} - U_{\xi S})$$

A diferença entre U'' e U é correspondente aos termos de curvatura do sistema de coordenadas curvilíneo

Rescrevendo para a malha deslocada

$$a_w U_{\xi w} = a_{ee} U_{\xi e} + a_{ww} U_{\xi ww} + a_{nw} U_{\xi nw} + a_{sw} U_{\xi sw} + \\ + A_w (P_w - P_p) + A'_w (P_N - P_S + P_{NW} - P_{SW}) + B_{\xi w} + b'_{u,w}$$

$$A_w = \frac{\Delta \nabla}{h_{\xi w}} \frac{\alpha_{\xi w}}{h_{\eta w} \Delta \xi} \quad A'_w = \frac{\Delta \nabla \beta_{\xi w}}{4 h_{\eta w}^2 \Delta \eta} \quad b'_{u,w} = \frac{1}{h_{\eta w}} \left[bu \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_w - bv \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_w \right]$$

$$B_{\xi w} = ae(U''_{\xi e} - U_{\xi e}) + a_{ww} (U''_{\xi ww} - U_{\xi ww}) + a_{nw} (U''_{\xi nw} - U_{\xi nw}) + a_{sw} (U''_{\xi sw} - U_{\xi sw})$$

$$U''_{\xi e} = \left[u_e \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_P - v_e \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_P \right] \frac{1}{h_{\eta P}}$$

$$u = \left(V_\eta \frac{\partial x}{\partial \eta} + U_\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{1}{Ja} \quad v = \left(V_\eta \frac{\partial y}{\partial \eta} + U_\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{1}{Ja}$$

Algoritmo SIMPLE

P = pressão = $P^* + P'$

P^* = pressão estimada

P' = correção de pressão

Velocidade: $U_\xi = U_\xi^* + U_\xi'$ e $V_\eta = V_\eta^* + V_\eta'$

U_ξ^* e V_η^* velocidades estimadas

U_ξ' e V_η' correção das velocidades

(I)

$$a_w U_{\xi w} = \sum_{nb} a_{nb} U_{\xi nb} + A_w (P_W - P_P) + A'_w (P_N - P_S + P_{NW} - P_{SW}) + B_{\xi w} + b'_{u,w}$$

(II)

$$a_w U_{\xi w}^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{\xi nb}^* + A_w (P_W^* - P_P^*) + A'_w (P_N^* - P_S^* + P_{NW}^* - P_{SW}^*) + B_{\xi w} + b'_{u,w}$$

(I)-(II)

$$a_w U'_{\xi w} = \sum_{nb} a_{nb} U'_{\xi nb} + A_w (P'_W - P'_P) + A'_w (P'_N - P'_S + P'_{NW} - P'_{SW})$$

$$U'_{\xi w} = du_w (P'_W - P'_P) + du'_w (P'_N - P'_S + P'_{NW} - P'_{SW})$$

$$du_w = \frac{A_w}{a_w} \quad du'_w = \frac{A'_w}{a_w}$$

Equação da Continuidade

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} J a \Delta \xi \Delta \eta + (\rho U_\xi)_e \Delta \eta - (\rho U_\xi)_w \Delta \eta + (\rho V_\eta)_n \Delta \xi - (\rho V_\eta)_s \Delta \xi = 0$$

Equação de Correção de Pressão

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b' + b$$

$$a_E = (\rho A du)_e$$

$$a_N = (\rho A dv)_n$$

$$a_W = (\rho A du)_w$$

$$a_S = (\rho A dv)_s$$

$$b = - \left[\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} J a \Delta \xi \Delta \eta + (\rho U_\xi^*)_e \Delta \eta - (\rho U_\xi^*)_w \Delta \eta + (\rho V_\eta^*)_n \Delta \xi - (\rho V_\eta^*)_s \Delta \xi \right]$$

$$b' = (\rho A du)_w (p'_N - p'_S + p'_{NW} - p'_{SW}) + \dots$$

Algoritmo SIMPLE

- 1 – Estimar pressão
- 2 - Estimar velocidades U_ξ e V_η
- 3 – Calcular componentes cartesianos, u e v
- 4 - Calcular U''_ξ e V''_η
- 5 - Resolver momentum para U_ξ e V_η
- 6 - Resolver correção de pressão, P'
- 7 - Corregir pressão e velocidades U_ξ e V_η
- 8 – Resolver equações adicionais, se houver
- 9 – Retornar ao item 3 e repetir até obter convergência

Obs:

Se a não ortogonalidade for pequena, b' é pequeno, logo para simplificar o procedimento, podemos desprezar b'