

# REGIME TRANSIENTE

## ➤ Métodos para Problemas de Valor Inicial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, \phi(t)) \quad ; \quad \phi(t_0) = \phi^0$$

### I. Métodos de Dois Níveis

i. explícito ou Euler explícito ou Forward Euler

**(Euler para frente)**

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t$$

Taylor para frente:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \underbrace{\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t \Delta t + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \bigg|_t \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \bigg|_t \frac{(\Delta t)^3}{6} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} \bigg|_t \frac{(\Delta t)^4}{4!} + \dots}_{\approx 0 \rightarrow \text{aprox. 1a. ordem}}$$

ii. totalmente Implícito ou Euler Implícito ou Backward Euler (**Euler para trás**)

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) \Delta t$$

Taylor para trás:

$$\phi_n = \phi_{n+1} - \left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{n+1} \Delta t + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_t \frac{(\Delta t)^2}{2} - \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right)_t \frac{(\Delta t)^3}{6} + \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} \right)_t \frac{(\Delta t)^4}{4!} - \dots$$

$\approx 0 \rightarrow \text{aprox. 1a. ordem}$

iii. Crank-Nicolson ou Regra do Trapézio

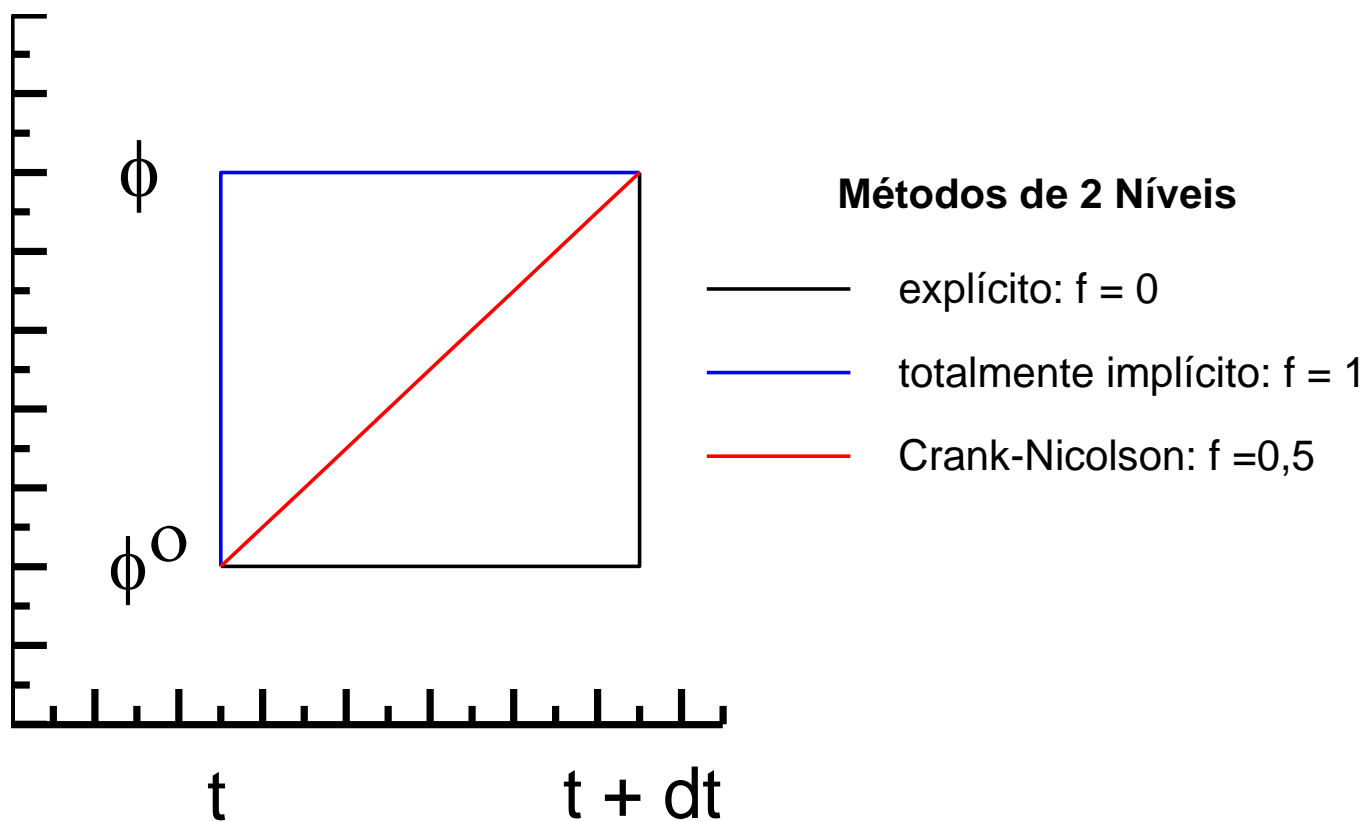
$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} \left[ f(t_{n+1}, \phi^{n+1}) + f(t_n, \phi^n) \right] \Delta t$$

$$[(i)-(ii)]/2 \Rightarrow 2\phi^{n+1} = 2\phi^n + \left[ \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_n + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{n+1} \right] \Delta t + \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right)_n \frac{(\Delta t)^3}{6} + \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right)_{n+1} \frac{(\Delta t)^3}{6} - \dots$$

$\approx 0 \rightarrow \text{aprox. 2a. ordem}$  2

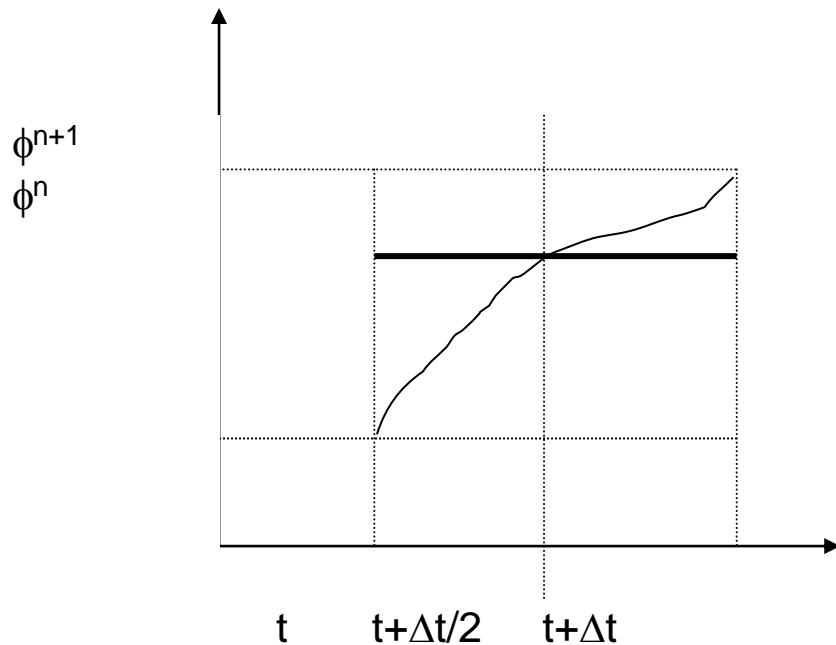
Obs: Pode-se generalizar a integração de um grande número de métodos como

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi dt = \left[ f \phi + (1-f) \phi^0 \right] \Delta t$$



#### iv. Método Leapfrog ou Método da Regra do Ponto Médio

Neste método, a variação de  $\phi$  como o tempo também é baseada em um perfil em degrau, porém o nível é baseado no valor de  $\phi$  obtido no instante de tempo intermediário.



$$\phi^{n+1} = \phi^n + f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi^{n+\frac{1}{2}}\right) \Delta t$$

## II. Métodos Preditor Corretor

- São métodos baseados em dois passos. O primeiro para prever e o segundo para corrigir.
- O método deste tipo mais popular é baseado na integração explícita de Euler, no passo preditor. Já o passo corretor é baseado na regra do trapézio.

- passo preditor:  $\phi^*$  valor aproximado para  $\phi$

$$\phi_{n+1}^* = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t$$

- passo corretor:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{2} \left[ f(t_n, \phi^n) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*) \right] \Delta t$$

Este método é de segunda ordem, mas possui a mesma estabilidade que o método explícito de Euler.

Os métodos do tipo “preditor-corretor” pertencem a família de dois níveis, sendo a maior precisão possível de segunda ordem. Para aumentar a ordem, pontos adicionais devem ser utilizados.

- (i) Os pontos adicionais são pontos onde a solução já foi calculada. São os métodos de ponto-médio, ou métodos de Adams.
- (ii) Pontos entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , utilizados somente para conveniência computacional. Ex: Runge-Kutta

Métodos de Adams: São derivados ao ajustar um polinômio pelas derivadas em um número de pontos em um tempo.

Ex: Adams-Bashforth.

Ajusta-se um polinômio de Lagrange passando pelos pontos  $f(t_{n-m}, \phi^{n-m}), f(t_{n-m+1}, \phi^{n-m+1}), \dots, f(t_n, \phi^n)$ .

- O resultado é utilizado para calcular a integral, resultando em um método explícito de ordem  $n+1$ .
- Para a solução de equações diferenciais parciais, somente os métodos de ordem mais baixa são utilizados.

⇒ O método de primeira ordem é o Euler explícito.

$$\phi^{n+1} = \phi^n + f(t_n, \phi^n) \Delta t$$

⇒ O de segunda ordem é

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{3} \left[ 3 f(t_n, \phi^n) - f(t_{n-1}, \phi_{n-1}) \right] \Delta t$$

⇒ O de terceira ordem é

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{12} \left[ 23 f(t_n, \phi^n) - 16 f(t_{n-1}, \phi_{n-1}) + 5 f(t_{n-2}, \phi_{n-2}) \right] \Delta t$$

⇒ Estes métodos apresentam dificuldade para iniciar o método, pois necessitam de dois ou mais passos de tempo.



## Métodos de Runge-Kutta:

➤ Estes métodos não apresentam a dificuldade dos métodos de ponto médio, pois utilizam pontos entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .

➤ O método de Runge Kutta de 2ª. ordem consiste de dois passos. O primeiro pode ser considerado como um meio passo preditor baseado no método de Euler Explícito, seguido da regra corretora do ponto médio:

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^* = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \phi^n) \qquad \phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*\right)$$

O método de Runge-Kutta de ordem mais elevada mais popular é o método de Runge-Kutta de 4ª. ordem. Os primeiros dois passos utilizam o método de Euler explícito para prever e o método implícito de Euler para corrigir em  $t_{n+1/2}$ . Isto seguido de um preditor baseado na regra do ponto médio para um passo completo e a regra de Simpson para a correção final.

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^* = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \phi^n)$$

$$\phi_{n+\frac{1}{2}}^{**} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*)$$

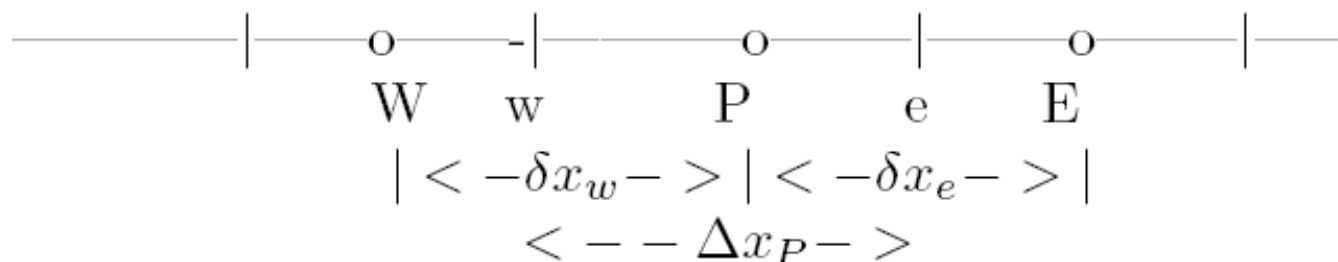
$$\phi_{n+1}^* = \phi^n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^{**})$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{6} \left[ f(t_n, \phi^n) + 2 f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^*) + 2 f(t_{n+\frac{1}{2}}, \phi_{n+\frac{1}{2}}^{**}) + f(t_{n+1}, \phi_{n+1}^*) \right]$$

## Regime Transiente Uni-Dimensional

- Conhecido um campo de  $\phi$  no tempo  $t$ ,  
achar o campo de  $\phi$  no instante  $t + \Delta t$ 
  - $\phi_P$  – desconhecido em  $t + \Delta t$
  - $\phi_P^o$  – conhecido em  $t$ , (valor antigo)

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S$$



- integrando no tempo e no volume  $\int_{\Delta t} \int_{\Delta x} dx dt$
- a ordem de integração dependerá de que termo que-remos analisar.

$$(I) \quad \text{-----} > \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dt dx = \int_{\Delta x} (\rho \phi - \rho^o \phi^o) dx$$

o assumindo  $\rho \phi$  constante no volume de controle e  $\rho$  constante no tempo (sólido incompressível)

$$(I) \quad \text{-----} > [\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \Delta x$$

$$(II) \quad \text{-----} > \int_{\Delta t} \int_{\Delta x} \frac{\partial Jx}{\partial x} dx dt = \int_{\Delta t} (Jx_e - Jx_w) dt$$

onde

$$Jx = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$- \int_{\Delta t} \left[ \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} (\phi_P - \phi_W) \right] dt$$

$$(III) \quad \text{-----} > \int_{\Delta t} \int_{\Delta x} S dx dt = \int_{\Delta t} (Sc + Sp \phi_P) \Delta x dt$$

- Como vimos, existem diversas possibilidades para avaliarmos como  $Jx$  (e/ou  $\phi$ ) varia com o tempo. Algumas podem ser generalizadas por

$$\int_{\Delta t} \phi_P dt = [f\phi_P + (1 - f)\phi_P^o] \Delta t$$

onde  $f$  (função peso) varia de 0 à 1.

- Três métodos principais
  - Explícito ( $f = 0$ )
  - Totalmente Implícito ( $f = 1$ )
  - Crank-Nicolson ( $f = 1/2$ )
- Todos os métodos implícitos requerem a solução do sistema de equações algébricas, consumindo um maior esforço computacional.

# Regime Transiente – Explícito

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \Delta x + (Jx_e^o - Jx_w^o) \Delta t = \bar{S}^o \Delta x \Delta t$$

substituindo as expressões para os fluxos e fonte e dividindo por  $\Delta t$

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left[ \frac{\Gamma_e^o}{\delta x_e} (\phi_E^o - \phi_P^o) - \frac{\Gamma_w^o}{\delta x_w} (\phi_P^o - \phi_W^o) \right] + (Sc + Sp \phi_P)^o \Delta x$$

rearrumando

$$a_P \phi_P = a_E^o \phi_E^o + a_W^o \phi_W^o + a_P^o \phi_P^o + Sc^o \Delta x$$

$$a_E^o = \frac{\Gamma_e^o}{\delta x_e} \quad , \quad a_W^o = \frac{\Gamma_w^o}{\delta x_w} \quad , \quad a_P^o = \frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} - a_E^o - a_W^o + Sp^o \Delta x$$

$$a_P = a_P^o + a_E^o + a_W^o - Sp^o \Delta x$$

Note que  $a_P^o = \frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} - a_E^o - a_W^o + Sp^o \Delta x$  pode ser negativo

para garantir  $a_P^o$  positivo é necessário que

$$\frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} > a_E^o + a_W^o - Sp^o \Delta x$$

para malha uniforme ( $\delta x = \Delta x$ ), sem fonte e propriedades constantes  $a_E^o = a_W^o$ ,

$$\frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} > 2 \frac{\Gamma^o}{\delta x} \quad \text{---} > \quad \Delta t < \frac{\rho_P (\Delta x)^2}{2 \Gamma^o}$$

Este é o critério de estabilidade de métodos explícitos, chamado de **condição CFL** (Courant-Friedrich e Lewy).

# Regime Transiente – Implícito

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \Delta x + (J_{x_e} - J_{x_w}) \Delta t = \bar{S} \Delta x \Delta t$$

substituindo as expressões para os fluxos e fonte e dividindo por  $\Delta t$

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left[ \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} (\phi_P - \phi_W) \right] + (S_c + S_p \phi_P) \Delta x$$

rearrumando

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_P^o \phi_P^o + S_c \Delta x$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \quad , \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \quad , \quad a_P^o = \frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t}$$

$$a_P = a_P^o + a_E + a_W - S_p \Delta x$$



- note que  $a_P$  é sempre positivo, portanto este método é sempre estável. Como o método totalmente implícito é sempre estável, será selecionado para o desenvolvimento de um método geral.
- Note que se selecionarmos  $\Delta t = \infty$ , o método para regime transiente recai no caso de regime permanente, pois o termo  $a_p^o$  se anula.

# Regime Transiente – Crank-Nicolson

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \Delta x + \left( \frac{Jx_e + Jx_e^o}{2} - \frac{Jx_w + Jx_w^o}{2} \right) \Delta t =$$

$$= \frac{\bar{S} + \bar{S}^o}{2} \Delta x \Delta t$$

substituindo as expressões para os fluxos e fonte e dividindo por  $\Delta t$

$$[\rho_P \phi_P - \rho_P \phi_P^o] \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left[ \frac{\Gamma_e}{2 \delta x_e} (\phi_E - \phi_P) + \frac{\Gamma_e^o}{2 \delta x_e} (\phi_E^o - \phi_P^o) \right] -$$

$$\left[ \frac{\Gamma_w}{2 \delta x_w} (\phi_P - \phi_W) + \frac{\Gamma_w^o}{2 \delta x_w} (\phi_P^o - \phi_W^o) \right] +$$

$$\left[ \frac{Sc + Sp \phi_P}{2} + \frac{Sc^o + Sp^o \phi_P^o}{2} \right] \Delta x$$

rearrumando

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_E^o \phi_E^o + a_W^o \phi_W^o + a_P^o \phi_P^o + \frac{Sc + Sc^o}{2} \Delta x$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{2 \delta x_e} \quad , \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{2 \delta x_w}$$

$$a_E^o = \frac{\Gamma_e^o}{2 \delta x_e} \quad , \quad a_W^o = \frac{\Gamma_w^o}{2 \delta x_w}$$

$$a_P^o = \frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} - a_E^o - a_W^o + \frac{Sp^o}{2} \Delta x$$

$$a_P = a_P^o + a_E + a_W + a_E^o + a_W^o - \frac{Sp + Sp^o}{2} \Delta x$$

para garantir  $a_P^o$  positivo é necessário que

$$\frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} > a_E^o + a_W^o - \frac{Sp^o}{2} \Delta x$$

para malha uniforme ( $\delta x = \Delta x$ ), sem fonte e propriedades constantes  $a_E^o = a_W^o$ ,

$$\frac{\rho_P \Delta x}{\Delta t} > \frac{\Gamma^o}{\delta x} \quad \text{---} \quad \Delta t < \frac{\rho_P (\Delta x)^2}{\Gamma^o}$$

- Menos restritivo que o esquema explícito
- Matematicamente este método é considerado estável, neste caso, pode-se afirmar que se houverem oscilações, as mesmas eventualmente irão decair.
- No entanto, resultados irrealistas podem ser obtidos pois  $a_P^o$  pode ser negativo. Porém menor restrição é imposta para o passo de tempo do que o método explícito.
- Como a aproximação linear, em princípio é melhor do que em degrau observa-se que caso este método for estável, o mesmo será mais preciso que o método totalmente implícito.
- Este é um método implícito, portanto requer alto esforço computacional para resolver o sistema algébrico.

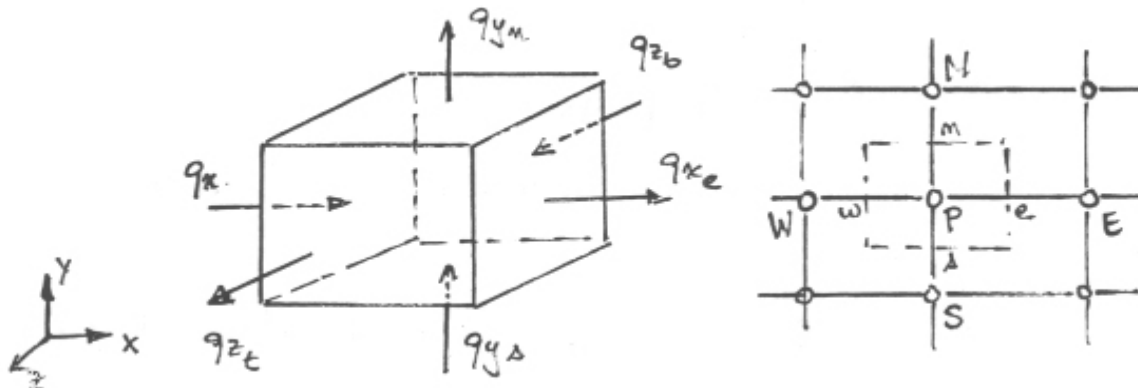
# Difusão Multi-dimensional Regime Transiente

➤ Equação Diferencial em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

onde

$$J_x = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad J_y = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad J_z = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

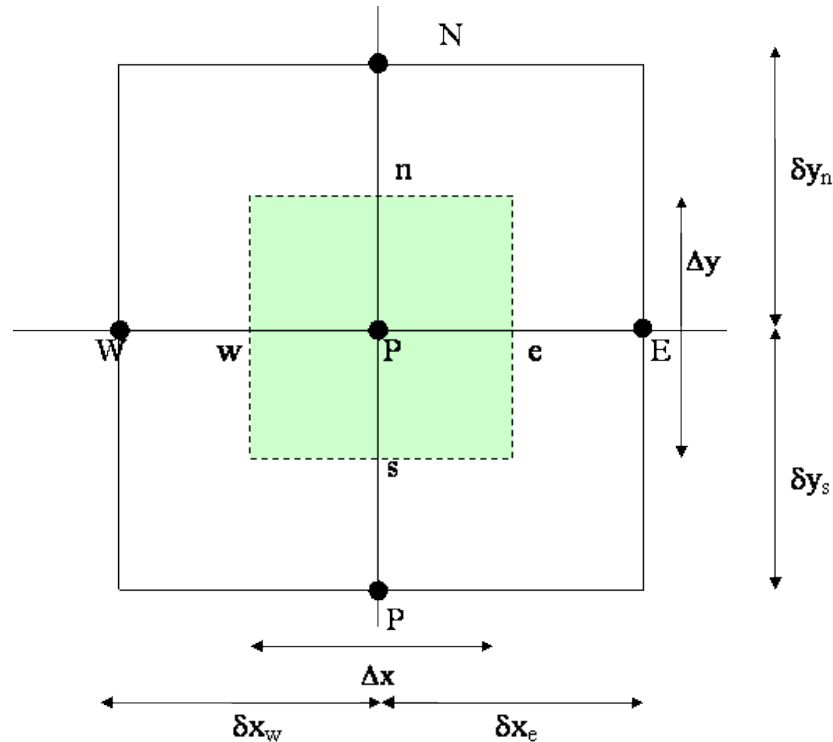


➤ **Método de Volumes Finitos:** Integrar sobre o volume de controle, e implicitamente no tempo. Alternando-se a ordem de integração de cada termo, dependendo da conveniência, tem-se.

$$\int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} \left[ \int_{\Delta t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dt \right] dx dy dz + \int_{\Delta t} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \left[ \int_{\Delta x} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right] dy dz dt +$$

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta z} \int_{\Delta x} \left[ \int_{\Delta y} \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right] dx dz dt + \int_{\Delta t} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} \left[ \int_{\Delta z} \frac{\partial J_z}{\partial z} dz \right] dx dy dt =$$

$$\int_{\Delta t} \left[ \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \int_{\Delta x} S dx dy dz \right] dt$$



➤ Assumindo os fluxos constantes ao longo das faces dos volumes de controle.

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \left[ \int_{\Delta x} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right] dy dz dt = \int_{\Delta t} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} [J_{x_e} - J_{x_w}] dy dz dt$$

$$= \int_{\Delta t} (J_{x_e} - J_{x_w}) \Delta y \Delta z dt$$

➤ Integrando implicitamente no tempo  $= (J_{x_e} - J_{x_w}) \Delta y \Delta z \Delta t$



➤ Procedendo da mesma forma para os outros termos e dividindo por  $\Delta t$  têm-se

$$\frac{\rho(\phi_p - \phi_P^o)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z +$$

$$[(J_x)_e - (J_x)_w] \Delta y \Delta z + [(J_y)_n - (J_y)_s] \Delta x \Delta z +$$

$$[(J_z)_t - (J_z)_b] \Delta x \Delta y = \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Linearizando a fonte como  $\bar{S} = S_C + S_P \phi_P$

e usado o perfil linear para avaliar os fluxos através de cada face, obtém-se

$$\frac{\rho(\phi_p - \phi_P^o)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z +$$

$$\left[ \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} (\phi_P - \phi_W) \right] \Delta y \Delta z +$$

$$\left[ \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} (\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} (\phi_P - \phi_S) \right] \Delta x \Delta z +$$

$$\left[ \frac{\Gamma_t}{(\delta z)_t} (\phi_T - \phi_P) - \frac{\Gamma_b}{(\delta z)_b} (\phi_P - \phi_B) \right] \Delta x \Delta y +$$

$$(S_C + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

## Equação de Discretização:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \Delta y \Delta z \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \Delta y \Delta z$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n} \Delta x \Delta z \quad a_S = \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \Delta x \Delta z$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t}{(\delta z)_t} \Delta x \Delta y \quad a_B = \frac{\Gamma_b}{(\delta z)_b} \Delta x \Delta y$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_p}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 \phi_P^0$$

Note que, quando  $\Delta t \rightarrow \infty$ , recupera-se a formulação para regime permanente.

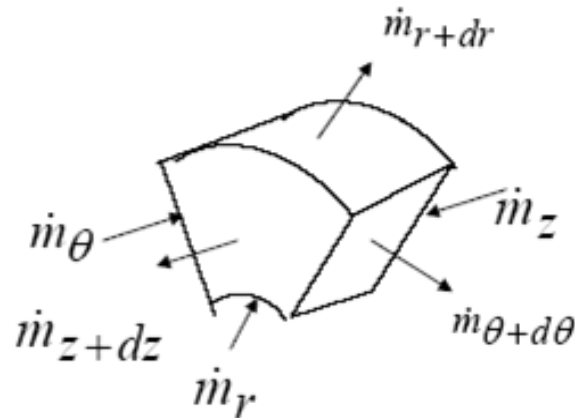
## Equação Diferencial em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial r J_r}{r \partial r} + \frac{\partial J_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

onde

$$J_r = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad J_\theta = -\Gamma \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad J_z = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Método de Volumes Finitos: Integrando sobre o volume de controle  $\Delta \forall = r \, d\theta \, dr \, dz$ , e implicitamente no tempo. Dividindo por  $\Delta t$  têm-se



$$\Delta \forall = r_p \, \Delta \theta \, \Delta r \, \Delta z$$

$$\frac{\rho(\phi_p - \phi_P^o)}{\Delta t} \Delta \nabla +$$

$$[(J_\theta)_e - (J_\theta)_w] \Delta_r \Delta_z + [(r J_r)_n - (r J_r)_s] \Delta_\theta \Delta_z +$$

$$[(J_z)_t - (J_z)_b] r_p \Delta_\theta \Delta_r = \bar{S} \Delta \nabla$$

Linearizando a fonte como  $\bar{S} = S_C + S_P \phi_P$

e usado o perfil linear para avaliar os fluxos através de cada face, obtém-se

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{r_p (\delta\theta)_e} \Delta r \Delta z \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{r_p (\delta\theta)_w} \Delta r \Delta z$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n}{(\delta r)_n} r_n \Delta\theta \Delta z \quad a_S = \frac{\Gamma_s}{(\delta r)_s} r_s \Delta\theta \Delta z$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t}{(\delta z)_t} r_p \Delta\theta \Delta r \quad a_B = \frac{\Gamma_b}{(\delta z)_b} r_p \Delta\theta \Delta r$$

$$a_P^o = \frac{\rho_p}{\Delta t} r_p \Delta\theta \Delta r \Delta z$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^o - S_P r_p \Delta\theta \Delta r \Delta z$$

$$b = S_C r_p \Delta\theta \Delta r \Delta z + a_P^o \phi_P^o$$