

Escoamento e Transferência de Calor em Dutos

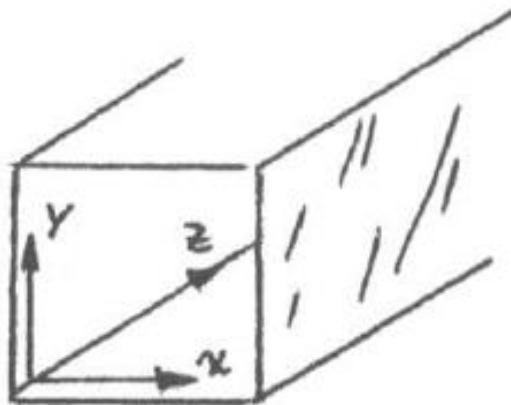
Escoamento totalmente desenvolvido e em desenvolvimento.

Escoamento simples totalmente desenvolvidos

- Campo de velocidades
- Campo de temperaturas
- Escoamentos complexos totalmente desenvolvidos

CARACTERÍSTICAS GERAIS DE ESCOAMENTO EM DUTOS

Em escoamentos em dutos, a direção z do escoamento principal é normalmente considerada como parabólica, ou uni-direcional. Logo, a condução de calor e a tensão viscosa devido a gradientes na direção z podem ser desprezados ($\partial^2/\partial z^2 \approx 0$)



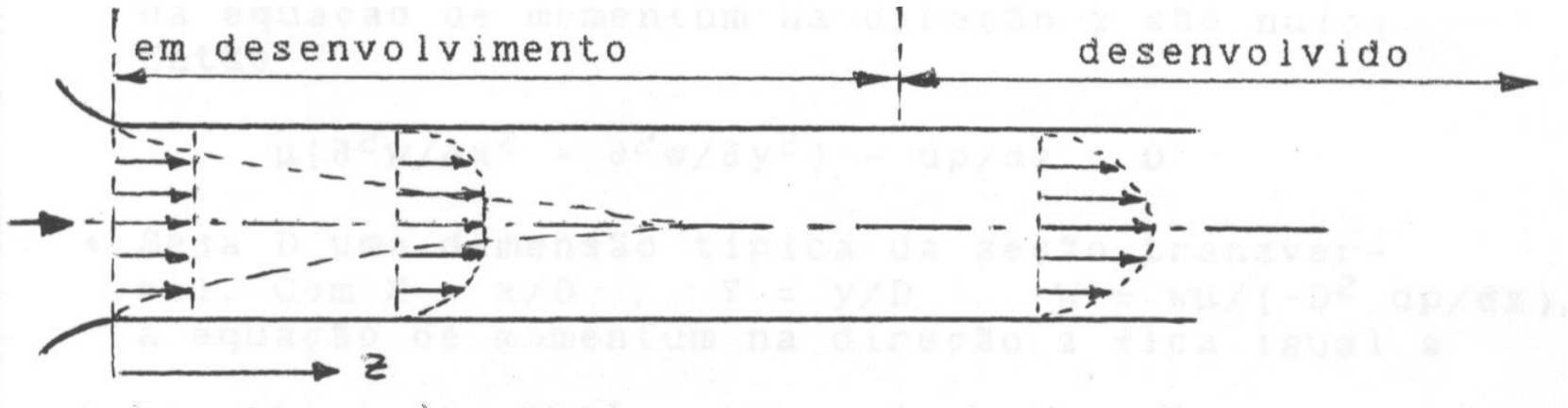
A pressão é aproximadamente uniforme na seção transversal, e o forçamento para a velocidade principal w é considerado como sendo devido ao gradiente de pressão médio $d \bar{p} / dz$.

$$p(x, y, z) = p^*(x, y, z) + \bar{p}(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{d \bar{p}}{d z} \approx \frac{d \bar{p}}{d z}$$

Para facilitar a apresentação, referências serão feitas a um duto de seção transversal quadrada. As propriedades dos fluidos serão consideradas constantes. Somente escoamentos em regime permanente serão considerados.

ESCOAMENTO HIDRODINAMICAMENTE DESENVOLVIDO OU EM DESENVOLVIMENTO



Região de desenvolvimento.

Distribuição de velocidade varia com z .

$$w = w(x,y,z), \quad u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z).$$

Região totalmente desenvolvida.

Distribuição de velocidade é invariante com z .

$$w = w(x,y), \quad u = u(x,y), \quad v = v(x,y); \quad = \text{constante}.$$

ESCOAMENTO SIMPLES HIDRODINAMICAMENTE DESENVOLVIDO SIMPLES E COMPLEXOS

- Em escoamentos simples hidrodinamicamente desenvolvidos, não existem velocidades na seção transversal. $w = w(x,y)$, $u = 0$, $v = 0$. A pressão p é constante na seção transversal e varia linearmente com z .
 - Exemplo: escoamento laminar em um duto reto com seção transversal uniforme e sem força de corpo.
- Em escoamento complexos hidrodinamicamente desenvolvidos, as velocidades na seção transversal estão presentes (escoamento secundário), mas o escoamento secundário é invariante com z . Exemplos: escoamento turbulento em dutos de seção retangular, escoamento em dutos curvos, escoamentos afetados pelo empuxo.

ESCOAMENTO SIMPLES HIDRODINAMICAMENTE DESENVOLVIDO SIMPLES E COMPLEXOS

Implicações computacionais.

Um escoamento 3D em um duto se reduz a um problema 2D na região totalmente desenvolvida; um escoamento 2D torna-se um problema 1D. Além do mais, um escoamento simples hidrodinamicamente desenvolvido é, devido na ausência das velocidades na seção transversal, equivalente a um problema de condução de calor.

ESCOAMENTO SIMPLES hidrodinamicamente DESENVOLVIDO

equação de quantidade de movimento linear na direção z

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Já que $u = v = 0$ e $\partial w / \partial z = 0$, os termos de convecção da equação de quantidade de movimento linear na direção z são nulos. Então

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{d\bar{p}}{dz} = 0$$

ESCOAMENTO SIMPLES hidrodinamicamente DESENVOLVIDO

Seja D uma dimensão típica da seção transversal. Definido as seguintes variáveis adimensionais: $X = x/D$, $Y = y/D$, $W = w \mu / [D^2 (-dp/dz)]$, a equação de quantidade de movimento linear na direção z fica igual a

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + 1 = 0$$

A similaridade com a equação de condução de calor é evidente. ($\Gamma = 1$, $S = 1$).

A solução da equação não requer o conhecimento do gradiente de pressão ou do número de Reynolds. O perfil de velocidade parabólico em um duto circular ou canal é um exemplo familiar da solução da equação de quantidade de movimento linear na direção z .

DIÂMETRO HIDRÁULICO E FATOR DE ATRITO

E prática comum, adotar do diâmetro hidráulico D_h na apresentação de resultados de escoamentos em dutos.

$D_h = 4$ (área seção transversal)/(perímetro molhado)

$$D_h = 4 A_t / P_m$$

O fator de atrito f é definido de diversas maneiras diferentes. Uma maneira comum é

$$f = \frac{- (d\bar{p}/dz) D_h}{\rho \bar{w}^2 / 2}$$

onde a velocidade média na seção transversal é

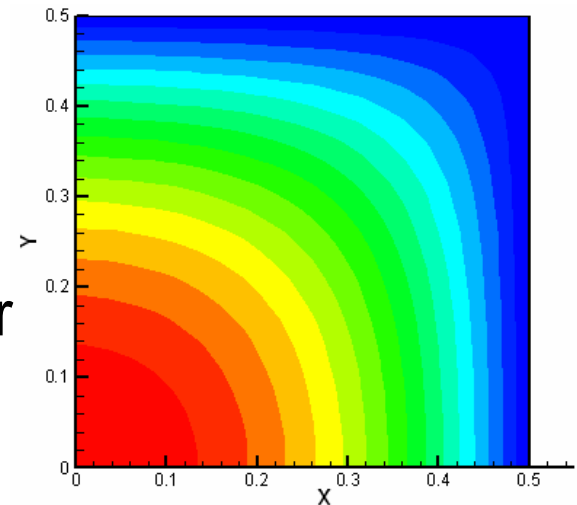
$$\bar{w} = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} w dA$$

DIÂMETRO HIDRÁULICO E FATOR DE ATRITO

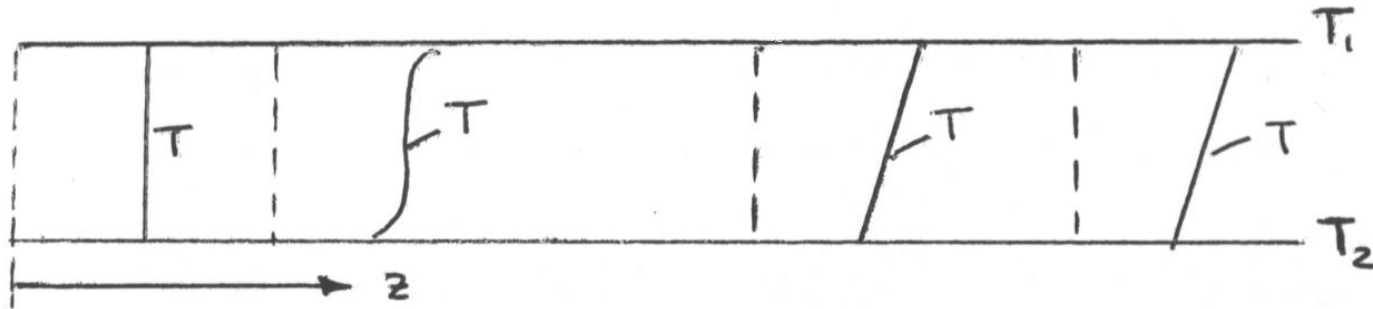
Definindo-se o número de Reynolds como $\mathbf{Re} = \rho \bar{w} D_h / \mu$

Vemos que o produto $f\mathbf{Re}$ é $f \mathbf{Re} = \frac{2}{\overline{W}} \left(\frac{D_h}{D} \right)^2$

Portanto, o produto $f\mathbf{Re}$ é constante para um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido. Para um duto de seção circular este valor é 64 e para um canal formado por placas paralelas é 96, e para duto de seção quadrada é 57.



TRANSFERÊNCIA DE CALOR TOTALMENTE DESENVOLVIDA



Com um campo de velocidades totalmente desenvolvido, a temperatura T torna-se independente de z somente sob certas condições de contorno, tais como temperaturas diferentes nas duas paredes. Então, o fluxo de calor entra no duto por uma parede e uma quantidade igual deixa o duto pela outra parede. Não há transferência de calor líquida para o fluido que escoar. O problema computacional é de condução de calor pura com o termo de fonte nulo. Tais problemas de transferência de calor totalmente desenvolvidos possuem utilidade prática limitada

TRANSFERÊNCIA DE CALOR TOTALMENTE DESENVOLVIDA

Quando existe transferência de calor líquida para o fluido, sua temperatura não se torna independente de z ; mas uma região termicamente desenvolvida pode ser definida como a região para o fluido, sua temperatura não se torna independente de z ; mas uma região termicamente desenvolvida pode ser definida como a região para a qual a temperatura adimensional θ torna-se invariante com z .

$$\theta = \frac{T - T_{\text{ref}}}{\Delta T_{\text{ref}}} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

Temperatura de Mistura e Número de Nusselt

- Temperatura de mistura $T_b = \frac{\int w T dA}{\int w dA}$

- Coeficiente de troca de calor

$$h = q_w / (T_w - T_b) \quad q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w$$

- Número de Nusselt

$$\mathbf{Nu} = \frac{h D}{k} \quad \mathbf{Nu} = \frac{q_w D}{k (T_w - T_b)} = \frac{- \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w D}{(T_w - T_b)} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_w$$

- Para um escoamento simples hidrodinamicamente desenvolvido, a região termicamente desenvolvida fornece um valor constante de Nu, o qual é independente do número de Reynolds e do número de Prandtl.

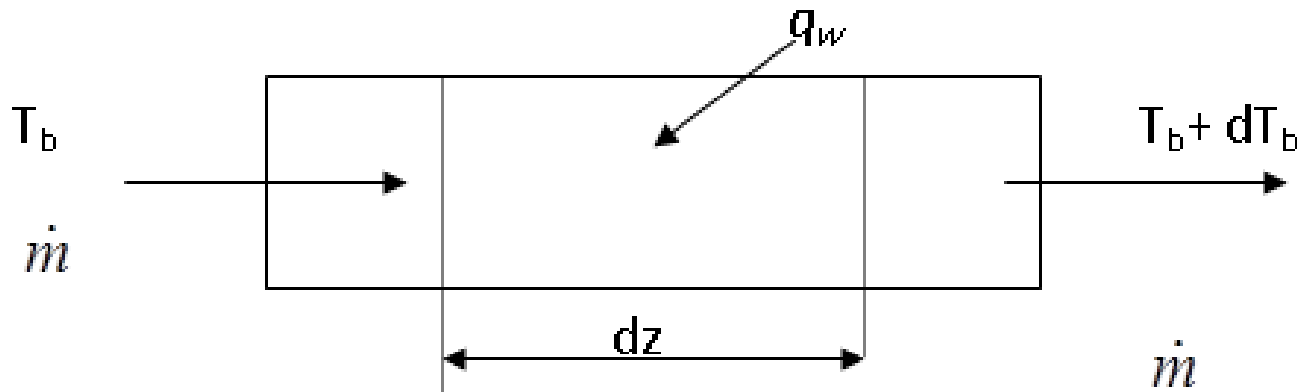
Condições de contorno térmicas

- Com um campo de velocidades totalmente desenvolvido, as seguintes condições de contorno são frequentemente encontradas formando uma região termicamente desenvolvida.
 - 1) Fluxo de calor uniforme axialmente e perifericamente, Exemplo: aquecimento da parede de um duto através do uso de resistências elétricas.
 - 2) Fluxo de calor uniforme axialmente e temperatura periférica da parede uniforme. Exemplos: aquecimento da parede de um duto com resistências elétricas, quando a parede possui alta condutividade térmica; trocadores de calor em contra-corrente utilizando fluidos com igual capacidade térmica.
 - 3) Temperatura da parede constante. Exemplos: evaporadores e condensadores.
 - 4) Temperatura e coeficiente externo de troca de calor constantes. Exemplos: dutos em ambientes com temperatura constante.

CASO DE FLUXO DE CALOR UNIFORME

q_w = fluxo de calor, \bar{T}_w = temperatura média da parede

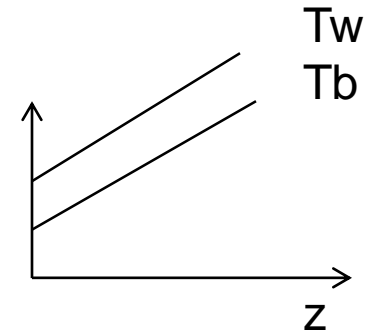
Para determinar como a temperatura de mistura varia axialmente, precisamos realizar um balanço de energia



$$\dot{m} c_p T_b + q_w P_{aq} dz = \dot{m} c_p \left(T_b + \frac{dT_b}{dz} dz \right) \Rightarrow \frac{dT_b}{dz} = \frac{q_w P_{aq}}{\dot{m} c_p} = cte$$

Definindo $\theta = (\bar{T}_w - T)/(q_w D/k)$

concluimos que todas as temperaturas crescem linearmente com z com a mesma taxa



$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{d T_b}{dz} = \frac{d \bar{T}_w}{dz} = \frac{d \bar{T}_w}{d z} = \frac{q_w P_{aq}}{\rho \bar{w} A_t c_p}$$

pois
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d \bar{T}_w}{d x} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{Nu} = \frac{q_w D}{k (\bar{T}_w - T_b)} = cte \Rightarrow \frac{d \bar{T}_w}{d x} - \frac{d T_b}{d x} = 0$$

CASO DE FLUXO DE CALOR UNIFORME

Equação da energia

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Adimensionalizando com

$$X = x/D, Y = y/D, \theta = (\bar{T}_w - T)/(q_w D/k), \theta = \theta(x, y).$$

Equação adimensional

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + 4 \left(\frac{W}{\bar{W}} \right) \left(\frac{D}{D_h} \right) = 0$$

Este caso é similar ao problema de condução de calor com uma distribuição do termo de fonte conhecida.

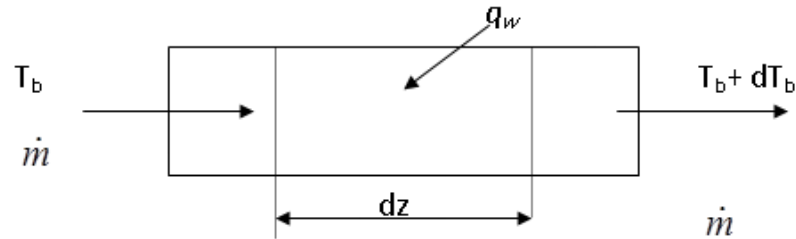
Uma vez que somente condições de contorno de fluxo são especificadas em todas as fronteiras, θ_+ (qualquer constante) é uma solução aceitável. Contudo já que θ_+ é a temperatura média da parede, a temperatura média da parede θ_b deve ser zero, isto é, $\theta_+ = 0$. Esta condição determina a constante arbitrária.

Logo, $Nu = 1/\theta_b$ onde $\theta_b = (\int \theta W dA) / (\int W dA)$.

A formulação para fluxo de calor axialmente uniforme e temperatura da parede perifericamente uniforme é bastante semelhante. Agora θ_w é a temperatura uniforme da parede, Q é o calor transferido por unidade de comprimento axial, e θ é definido como sendo $\theta_w = 0$ nas paredes do duto.

CASO DE TEMPERATURA UNIFORME

Balanço de energia



$$\dot{m} c_p T_b + \underbrace{q_w}_{h (T_w - T_b)} P_{aq} dz = \dot{m} c_p \left(T_b + \frac{dT_b}{dz} dz \right)$$

$$\dot{m} c_p T_b + h (T_w - T_b) P_{aq} dz = \dot{m} c_p \left(T_b + \frac{dT_b}{dz} dz \right)$$

$$\frac{1}{(T_w - T_b)} \frac{dT_b}{dz} = \frac{h P_{aq}}{\rho \bar{w} A_t c_p}$$

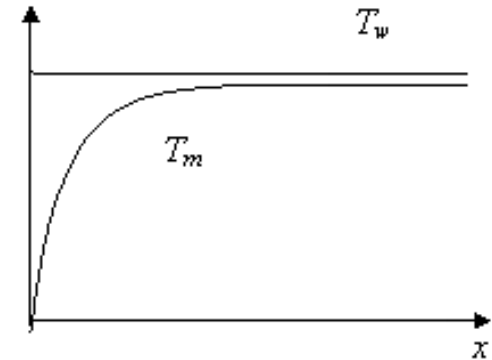
arrumando

$$\frac{1}{(T_w - T_b)} \frac{dT_b}{dz} = \frac{hD}{k} \frac{\mu}{\rho \bar{w} D_h} \frac{k}{\mu c_p} \frac{D_h}{D} \frac{4}{4} \frac{P_m}{A_t} \frac{P_{aq}}{P_m} = \frac{\mathbf{Nu}}{\mathbf{Re Pr D}} \frac{4}{D} \frac{P_{aq}}{P_m}$$

CASO DE TEMPERATURA UNIFORME

A solução da equação é

$$\Rightarrow \frac{(T_w - T_b)}{(T_w - T_b)_{in}} = \exp\left(-\frac{h P_{aq}}{\rho \bar{w} A_t c_p} z\right)$$



Como a temperatura do fluido tende à temperatura da parede, a taxa de transferência de calor cai exponencialmente. Contudo, a temperatura adimensional θ dada por

$$\theta = (T_w - T) / (T_w - T_b)$$

permanece independente de z .

Como

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{(T_w - T_b) (dT_w/dz - \partial T/\partial z) - (T_w - T) (dT_w/dz - dT_b/dz)}{(T_w - T_b)^2} = 0$$

então

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \theta \frac{dT_b}{dz}$$

Analisando agora a equação da energia, temos

$$\rho c_p w \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_{\theta \frac{dT_b}{dz}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\frac{-k (T_w - T_b)}{D^2} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right]}$$

O lado esquerdo $\rho c_p w \theta \frac{dT_b}{dz}$ pode ser escrito como

$$\frac{\rho c_p D^2}{k(T_w - T_b)} \frac{dT_b}{dz} w \theta = \frac{\rho c_p D^2}{k} \frac{h P_{aq}}{\rho \bar{w} A_t c_p} w \theta = \underbrace{\mathbf{Nu} \frac{D}{D_h} \frac{4 P_{aq}}{P_m}}_{\lambda} \frac{w}{\bar{w}} \theta$$

$\lambda = \mathbf{Nu} \frac{D}{D_h} \frac{4 P_{aq}}{P_m}$ também pode ser escrita como

$$\lambda = - \frac{1}{(T_w - T_b)} \frac{d(T_w - T_b)}{dZ}$$

onde $Z = z k / (\rho \bar{w} c_p D^2)$.

22

Como vimos λ permanente constante, enquanto que $(T_w - T_b)$ apresenta decaimento exponencial.

CASO COM TEMPERATURA DA PAREDE UNIFORME

Equação da energia

$$\theta = \frac{(T_w - T)}{(T_w - T_b)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + 4 \lambda \left(\frac{W}{\bar{W}} \right) \theta = 0$$

com $\theta = 0$ nas paredes.

Uma vez que o valor de λ não é conhecido, este problema pode ser definido como um problema de autovalores. O valor correto de λ implica numa solução para a qual $\theta_b = 1$.

CASO COM TEMPERATURA DA PAREDE UNIFORME

Um método conveniente para resolver o problema de autovalores é definir uma variável Φ tal que $\Phi = \theta/\lambda$.

Então

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + 4 \lambda \left(\frac{W}{\bar{W}} \right) \Phi = 0$$

$$e \quad \lambda_b = \theta_b / \Phi_b \qquad \lambda = \frac{\int W dA}{\int \Phi W dA}$$

É necessário obter a solução por um método iterativo

CASO COM COEFICIENTE DE CONVECÇÃO EXTERNO

Quando h_e e T_∞ são dados, o problema é bastante similar ao caso de temperatura T_w constante. Neste caso, θ é dado por

$$\theta = \frac{(T_\infty - T)}{(T_\infty - T_b)}$$

e um problema de autovalor é obtido.

- O problema é discutido por Sparrow e Patankar (1977), onde é mostrado que este caso possui as condições de contorno simples como casos limites. Seja o número de Biot igual $Bi = h_e D / k$.

- (i) O caso de temperatura da parede constante corresponde $Bi \rightarrow \infty$.

$$q_w = \underbrace{h}_{\infty} \underbrace{(T_w - T_b)}_{\approx 0} = \textit{finito}$$

- (ii) O caso de fluxo de calor uniforme corresponde a $Bi \rightarrow 0$

RESUMO

- O esforço computacional para resolver problemas de transferência de calor termicamente desenvolvida envolve a solução de problemas do tipo de condução de calor com termos de fontes variáveis.
- Os problemas de autovalores requerem algumas iterações; mas o método proposto converge rapidamente.
- O termo de fonte variável envolve w/\bar{w} , que é obtido pela solução do campo de velocidades hidrodinamicamente desenvolvido.
- As soluções de transferência de calor são independentes do número de Reynolds e do número de Prandtl, e fornecem números de Nusselt constante.

ESCOAMENTOS COMPLEXOS TOTALMENTE DESENVOLVIDOS

- O campo de velocidades e o campo de uma temperatura adimensional apropriada θ são independentes de z , mas existe um escoamento transversal.
- O problema computacional não é mais um problema de condução de calor. Os termos de convecção encontram-se presentes, e os mesmos devem ser obtidos através da solução do campo de escoamento bidimensional na seção transversal.
- O conceito de região termicamente desenvolvida continua a ser aplicável.
- Os resultados do campo de escoamento dependem de um parâmetro de força de corpo ou do número de Reynolds. Os resultados de transferência de calor dependem adicionalmente do número de Prandtl.

COMENTÁRIOS FINAIS

- Uma análise bastante completa de escoamento laminar e transferência de calor em dutos pode ser encontrada em Shah e London (1978).
- Os conceitos de transferência de calor por convecção em dutos encontram-se desenvolvidos em Kays e Crawford (1980) e em Kays e Perkins (1973).
- Transferência de calor conjugado (envolvendo condução de calor nas paredes do duto e convecção no fluido) encontra-se ilustrado para dutos aletados em: Sparrow e Patankar (1978) e Soliman, Chau e Trupp (1980).
- Uma interessante e importante classe de escoamentos em dutos é formada pelos escoamentos periodicamente desenvolvidos. Para maiores detalhes, ver: Patankar, Liu e Sparrow (1977).

REFERÊNCIAS SUPLEMENTARES

(A maior parte das referências necessárias podem ser encontradas no livro: Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Hill-Hemisphere, 1980. Algumas referências adicionais encontram-se listadas abaixo)

- Acharya, S. e Patankar, S.V. (1981). Laminar mixed convection in a shrouded fin array, J. Heat Transfer, Vol. 103, p. 559.
- Baliga, B. R. (1978). A control-volume-based finite-element method for convective heat and mass transfer, Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- Baliga, B. R. e Patankar, S.V. (1980). A new finite-element formulation for convection-diffusion problems, Numerical Heat Transfer, Vol. 3, p. 393.
- Buleev, N. I. (1962). Theoretical model of the mechanism of turbulent exchange in fluid flows, Teploperedacha, USSR Academy of Sciences, Moscow, p. 64 Ver também, AERE Translation 957, 1963.
- Cebeci, T. e Smith, A. M.O. (1974). Analysis of Turbulent Boundary Layers, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 15, Academic Press.
- Crawford, M. E. e Kays, W. M. (1975). STAN-5--A program for numerical computation of two-dimensional internal/external boundary layer flows, Stanford University, Dept. of Mech. Eng. Report HMT-23.
- Dale, A. A.; Tannehill, J. C. e Pletcher, R. H. (1984). Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Mc-graw Hill, Springer-Verlag

- Hsu, C. F. e Patankar, S. V. (1982). Analysis of laminar non-Newtonian flow and heat transfer in curved tubes, *AIChE Journal*, Vol. 28, p. 610.
- Jaluria, Y. e Torrance, K. E. (1986). Computational Heat Transfer, Hemisphere, Springer-Verlag
- Jones, W. P. e Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, p. 301.
- Jones, W. P. e Launder, B. E. (1973). The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, p. 1119.
- Kays, W. M. e Crawford, M. E. (1980). Convective Heat and Mass Transfer, second Ed., McGraw-Hill.
- Kays, W. M. e Perkins, H. C. (1973). Forced Convection, internal flow in ducts, no Handbook of Heat Transfer. McGraw-Hill, p. 193.
- Launder, B. E. e Sharma, B. I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 2, p.1.
- Nieckele, A. O. (1985). Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Problems, Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- Patankar, S. V. e Prakash, C. (1981). An analysis of the effect of plate thickness on laminar flow and heat transfer in interrupted-plate passages, *Int. J. Heat Mass Transfer*

- Peyret, R. e Taylor, D. T. (1985). Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag
- Rodi, W. (1976). A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, ZAMM, Vol. 56, T219.
- Roache, P. J. (1982). Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, N. M.
- Rodi, W. (1980). Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, Book Publication of the International Association for Hydraulic Research, Delf, The Netherlands.
- Settari, A. e Aziz, K. (1973). A generalization of the additive correction methods for iterative solution of matrix equations, SIAM J. Num. Analysis, Vol. 10, p. 506.
- Shah, R. K. e London, A. L. (1978). Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Academid Press.
- Shih, T. M. (1984). Numerical Heat Transfer, Hemisphere, Spreinger-Verlag
- Soliman, H. M.; Chau, T. S. e Trupp, A. C. (1980). Analysis of laminar heat transfer in internally finned tubes with uniform outside wall temperature, J. Heat Transfer, Vol. 102, p. 598.
- Sparrow, E. M.; Baliga, B. R. e Patankar, S. V. (1977). Heat transfer and fluid flow analysis of interrupted-wall channels, with application to heat exchangers, J. Heat Transfer, vol. 99, p.4.
- Varejão, L. M. C. (1978). Flux-spline method for heat, mass and momentum transfer, Ph.D. Thesis, University of Minnesota.