Descrição Matemática dos Fenômenos Físicos

- Ingredientes de uma Equação Diferencial

  Balanço de fluxos

  - fluxo líquido

$$J_x - - - - > | \quad | - - - - > J_{x+dx} = J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx$$

$$< -dx- >$$

$$J_{x+dx}\ dy\ dz - J_x\ dy\ dz = \frac{\partial J_x}{\partial x} dxdydz$$

  - armazenamento: $[\partial(\rho\phi)/\partial t]dxdydz$
  - geração: $Sdxdydz$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

Fluxo $$J_x = (\rho u \phi) - \Gamma(\partial \phi / \partial x)$$

Fluxo convectivo   Fluxo difusivo

Balanço $$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \phi)}{\partial z} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right\} + S$$

Generalizando:

Volume: $d\,\forall$

Fluxo: $J_s = \rho\, u_s\, \phi - \Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial s}$

Fluxo líquido: $J\;A)_{s+ds} - J\;A)_s = \dfrac{\partial (J\;A)_s}{\partial s}\, d\,s$

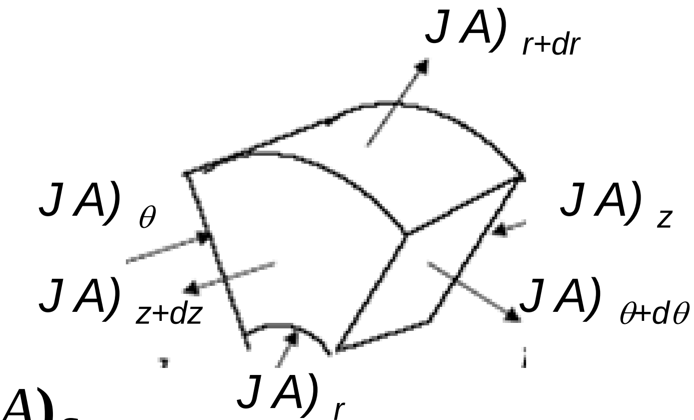
Fluxo líquido por unidade de volume:

$$\frac{\partial (J\;A)_{face}}{\partial s}\,\frac{d\,s}{d\forall} = \frac{1}{(d\forall / ds)}\,\frac{\partial}{\partial r}(J\;A)_{face}$$

Balanço global

$$\frac{1}{d\forall}\,\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\phi\,d\forall) + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{d\forall / ds_i}\,\frac{\partial}{\partial s_i}\left(A\,J\right)_{i,face} = S$$

Coordenadas cilíndricas:



Volume: $d\,\forall = r\;d\,r\;d\,\theta\;dz$

Fluxo: $J_s = \rho\,u_s\,\phi - \Gamma\,\dfrac{\partial\,\phi}{\partial\,s}$

Fluxo líquido: $J\;A\big)_{s+ds} - J\;A\big)_s = \dfrac{\partial(J\;A)_s}{\partial\,s}\;d\,s$

Fluxo líquido por unidade de volume:

$$\frac{\partial(J\;A)_r}{\partial\,r}\;\frac{d\,r}{\forall} = \frac{\partial(J\;r\;d\theta\;dz\;)_r}{\partial\,r}\;\frac{d\,r}{r\;dr\;d\theta\;dz} == \frac{\partial(J\;r\;)_r}{\partial\,r}\;\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial(J\;dr\;dz)_\theta}{\partial\,\theta}\;\frac{d\,\theta}{rd\;rd\theta\;dz} = \frac{\partial J_{\;\theta}}{r\,\partial\,\theta} \qquad \frac{\partial(J\;r\;d\theta\;dr)_z}{\partial\,z}\;\frac{d\,z}{rd\;rd\theta\;dz} = \frac{\partial J_{\;z}}{\partial\,z}$$

Balanço global $$\frac{\partial\rho\,\phi}{\partial\,t} + \frac{\partial\,r\;J_r}{r\,\partial\,r} + \frac{\partial\;J_\theta}{r\,\partial\,\theta} + \frac{\partial J_z}{\partial\,z} = S$$

- Observações preliminares:
  - Produto interno

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad \vec{A} \bullet \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\theta$$

- Notação indicial:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i B_i = A_j B_j$$

– Gradiente $$\mathbf{grad}\, B = \vec{\nabla}\, B = \frac{\partial\, B}{\partial\, x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial\, B}{\partial\, y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial\, B}{\partial\, z}\,\vec{e}_z$$

$$\mathbf{grad}\, B = \frac{\partial\, B}{\partial\, x_i}\,\vec{e}_i$$

– Divergente $$\mathbf{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial\, A_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, A_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, A_z}{\partial\, z}$$

$$\mathbf{div}\ \vec{A} = \frac{\partial\, A_i}{\partial\, x_i} \qquad \mathbf{div}\ \vec{A} = \lim_{\forall \to 0} \left[\frac{1}{\forall} \int_S \vec{A} \bullet d\vec{S} \right]$$

$$\mathbf{div}(s\ \vec{A}) = \frac{\partial(\, s\ A_i\,)}{\partial\, x_i} = s\,\frac{\partial\, A_i}{\partial\, x_i} + A_i\,\frac{\partial\, s}{\partial\, x_i}$$

– Operador delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{quando} \quad i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{quando} \quad i = j$$

Matriz identidade $\mathbf{I} = \delta_{ij} \quad \vec{e}_i \, \vec{e}_j$

Fluxo

$$\vec{J} = \rho \vec{u} \phi - \Gamma \mathrm{grad}\ \phi$$

Fluxo convectivo Fluxo difusivo

$$J_i = \rho u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Balanço

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{J}) = S \qquad \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S$$

- **Equação Diferencial Geral**

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}\ (\rho\vec{u}\phi) = \text{div}\ (\Gamma \text{grad}\ \phi) + S$$

$$transiente + convecção = difusão + fonte$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\} + S$$

- Conservação de Massa (continuidade)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\rho \vec{V}) = 0$$

Variação da massa com o tempo por unidade de volume

Fluxo líquido de massa por unidade de volume

– Notação indicial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \phi = 1 \qquad \Gamma = S = 0$$

Casos Particulares:

1. Regime permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,(\rho \vec{V}) = 0$

2. Incompressível: ρ = constante $\quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = 0$

Equação diferencial de quantidade de movimento na forma vetorial

(2ª. Lei de Newton)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f}_c + \nabla \bullet \underline{\underline{\sigma}}$$

ou na forma conservativa

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{f}_c + \nabla \bullet \underline{\underline{\sigma}}$$

– Notação indicial (componente *i*)

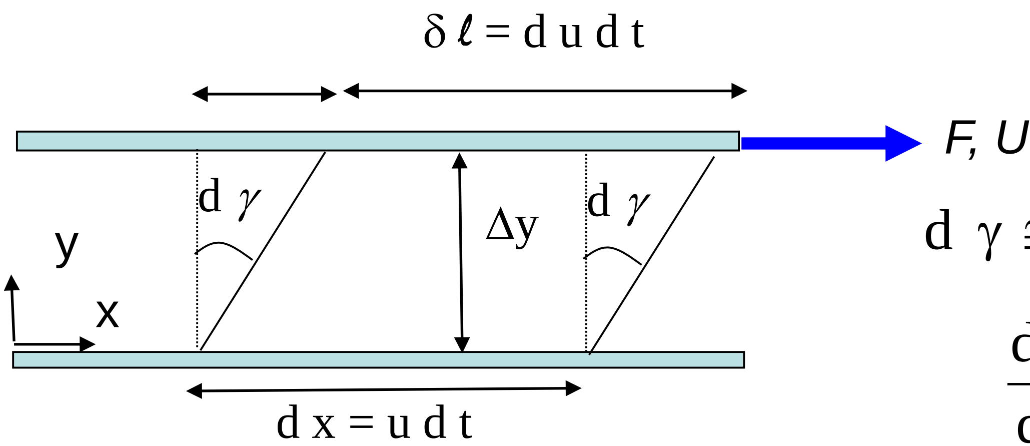
$$\frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i) = f_{c_i} + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

Leis de Transporte

Ação da viscosidade: Lei de Newton/Stokes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

Fluidos Newtonianos: tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação



Taxa de deformação

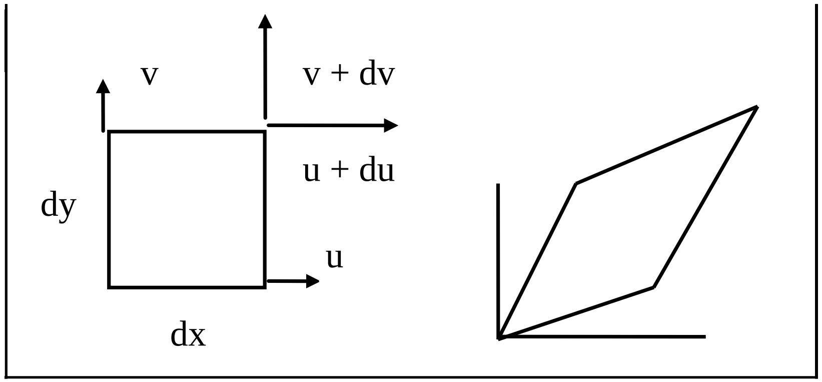
$$d\,\gamma \cong \tan(d\,\gamma) = \frac{\sin(d\,\gamma)}{\cos(d\,\gamma)} = \frac{du\,dt}{dy}$$

$$\frac{d\,\gamma}{d\,t} = \frac{d\,u}{d\,y}$$

Lei da viscosidade de Newton: $\tau_{xy} = \dfrac{F}{A_y} = \mu \dfrac{du}{dy} \approx \mu \dfrac{U}{\Delta y}$

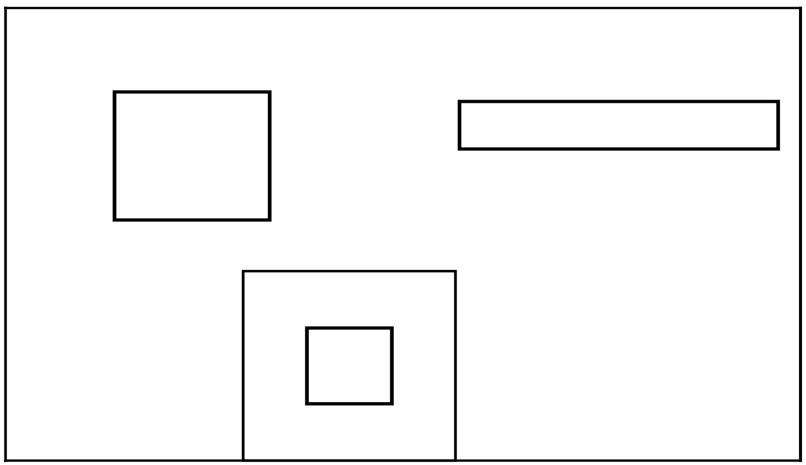
μ = viscosidade absoluta (propriedade do fluido): dimensão: M/Lt (Pa s)

υ = viscosidade cinemática: μ / ρ



taxa de deformação
tangencial no plano x-y:

$$\frac{d\,\gamma}{d\,t} = \frac{\partial\,u}{\partial\,y} + \frac{\partial\,v}{\partial\,x}$$



taxa de deformação
normal no plano x-y:

$$\left.\frac{d\,\gamma}{d\,t}\right|_x = 2\,\frac{\partial\,u}{\partial\,x} \qquad \left.\frac{d\,\gamma}{d\,t}\right|_y = 2\,\frac{\partial\,v}{\partial\,y}$$

taxa de dilatação volumétrica:

$$\frac{d\,\gamma}{d\,t} = \frac{\partial\,u}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v}{\partial\,y} + \frac{\partial\,w}{\partial\,z} = \nabla \bullet \vec{V}$$

Em notação vetorial, a taxa de deformação de um elemento de fluido, pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = [\mathbf{grad}\ \vec{V} + (\mathbf{grad}\ \vec{V})^T] - \frac{2}{3}\,\mathbf{div}\,\vec{V}\ \underline{\underline{I}}$$

- Ação da viscosidade: Lei de Newton/Stokes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu\,\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \mu\left[\mathbf{grad}\,\vec{V} + (\mathbf{grad}\,\vec{V})^T - \frac{2}{3}\,\mathbf{div}\,\vec{V}\,\underline{\underline{I}}\right]$$

Em notação indicial

$$\sigma_{ij} = -p\;\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\;\delta_{ij} + \mu\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]$$

Força líquida $\quad \dfrac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_j} = -\dfrac{\partial\,p}{\partial\,x_j}\delta_{ij} + \dfrac{\partial\,\tau_{ij}}{\partial\,x_j}$

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_j} = -\frac{\partial\,p}{\partial\,x_i} + \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left\{\mu\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]\right\}$$

Combinação das Equações de Conservação e Leis de Transporte

➢**Equação de quantidade de movimento linear**

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)+S_{c_i}$$

$$S_{c_i}=S_{\mu_i}+f_{c_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad ; \quad S_{\mu_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

$$\phi=V_i \quad ; \quad \Gamma=\mu \quad ; \quad S=S_{c_i}$$

✓quando ρ e μ são constantes, $\qquad S_{\mu_i}=0$

Equação de conservação de espécie química

m_ℓ Fração em massa da espécie ℓ $\qquad \sum_\ell m_\ell = 1$

$$\frac{\partial(\rho\, m_\ell)}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\, \vec{V}\, m_\ell + \vec{J}_\ell) = R_\ell$$

$\vec{J}_\ell$ Fluxo por difusão da espécie ℓ $\qquad \sum_\ell \vec{J}_\ell = 0$

R_ℓ Taxa de geração da espécie ℓ por unidade de volume $\qquad \sum_\ell R_\ell = 0$

– Notação indicial

$$\frac{\partial(\rho\, m_\ell)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\, V_j\, m_\ell + J_{\ell\, j}) = R_\ell$$

Leis de Transporte:

Difusão de massa (Lei de Fick):

$$\vec{J}_\ell = -\rho\, D_\ell\ \mathbf{grad}\, m_\ell$$

Número de Schmidt:

$$\vec{J}_\ell = -\frac{\mu}{\mathbf{Sc}}\,\mathbf{grad}\, m_\ell$$

$$\mathbf{Sc} = \frac{\mu}{\rho\, D_\ell}$$

$$\frac{\partial\,(\rho\ \ m_\ell\,)}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, x_j}(\rho\, V_j\ \ m_\ell\,) = \frac{\partial}{\partial\, x_j}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Sc}}\frac{\partial\ \ m_\ell}{\partial\, x_j}\right) + R_\ell$$

$$\phi = m_\ell \quad ; \quad \Gamma = \frac{\mu}{\mathbf{Sc}} \quad ; \quad S_h = R_\ell$$

Leis das Fontes

➢Reação química

- Forma Geral:

$R_\ell = R_\ell(m_\ell, m_m, m_n, \ldots, T, p, \ldots)$ onde m_ℓ, m_m, m_n, são as frações mássicas das espécies participantes, T é a temperatura absoluta e p e a pressão.

- Observações

(1) Para a reação binária

$$A + B \;\rightarrow\; C + D$$

normalmente, nós temos,

$$R_A = -k\; m_A\; m_B\; p^2\; exp(-E/\Re T),$$

onde k, E e R são constantes

(2) Turbulência afeta a taxa das reações químicas, mas essa influência ainda não é completamente conhecida.

Equação da Energia

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\, e)}{\partial t}}_{\substack{\textit{taxa de}\\ \textit{acumulação}\\ \textit{de energia}}} + \underbrace{\mathbf{div}\,(\,\rho\,\vec{V}\,e\,)}_{\substack{\textit{fluxo}\\ \textit{liquido saindo}\\ \textit{de energia}}} = \underbrace{\frac{\dot{Q}_{in}}{d\,\forall}}_{\substack{\textit{taxa de}\\ \textit{adição de}\\ \textit{calor}}} - \underbrace{\frac{\dot{W}_{out}}{d\,\forall}}_{\substack{\textit{taxa de}\\ \textit{trabalho feito}\\ \textit{pelo sistema}\\ \textit{nos arredores}}}$$

e: energia total

$$e = i + \frac{1}{2}V^2$$

i: energia interna

$$h = i + \frac{p}{\rho}$$

h: entalpia

Leis de Transporte

- Condução de calor (Lei de Fourier): $\vec{q} = -k \, \mathbf{grad} \; T$

Número de Prandtl:

$$\mathbf{Pr} = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{\mu / \rho}{k / (\rho \, c)} = \frac{\mu \, c}{k}$$

$$\vec{q} = -\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} c \; \mathbf{grad} \; T$$

ou para *c* constante:

$$\vec{q} = -\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} \; \mathbf{grad} \; h$$

➢Taxa de adição de calor

- O calor pode entrar no volume de controle de duas formas: por difusão relativo ao movimento de mistura do escoamento devido a movimento molecular aleatório e por conversão de energia química, eletromagnética, atômica, etc em energia térmica como fonte de calor. Portanto

$$\dot{Q}_{in} = -\int_{SC} \vec{Q} \bullet \vec{n}\, d\, A + \int_{VC} \dot{q}\, d\, \forall$$

- Aplicando o teorema de divergência de Gauss,

$$\dot{Q}_{in} = \int_{VC} \left[\dot{q} - \mathbf{div}\, \vec{Q} \right] d\, \forall$$

$$\boxed{\frac{\dot{Q}_{in}}{d\, \forall} = \dot{q} - \mathbf{div}\, \vec{q} - \mathbf{div} \sum_{\ell} h_{\ell}\, \vec{J}_{\ell}}$$

➢Taxa de remoção de Trabalho

trabalho $\delta W = d\,\vec{F} \bullet d\,\vec{r}$ potência $\delta \dot{W} = d\,\vec{F} \bullet \vec{V}$

$d\,\vec{F} = d\,\vec{F}_c + d\,\vec{F}_s$ $\delta \dot{W}_c = -\vec{f}_c \bullet \vec{V}\,d\,\forall$

$$\delta \dot{W}_s = -d\,\vec{F}_s \bullet \vec{V} = -\left(-p\,\vec{n} + \vec{n} \bullet \underline{\underline{\tau}}\right) \bullet \vec{V}\,d\,A$$

$$\dot{W}_{out} = \int_{VC} \vec{f}_c \bullet \vec{V}\,d\,\forall + \int_{SC} p\,\vec{V} \bullet \vec{n}\,d\,A - \int_{SC} \underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V} \bullet \vec{n}\,d\,A$$

Aplicando o teorema de divergência de Gauss,

$$\dot{W}_{out} = \int_{VC} \left\lfloor \vec{f}_c \bullet \vec{V} + \mathbf{div}\left(p\,\vec{V}\right) - \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V}\right)\right\rfloor d\,\forall$$

$$\boxed{\frac{\dot{W}_{out}}{d\,\forall} = \vec{f}_c \bullet \vec{V} + \mathbf{div}\left(p\,\vec{V}\right) - \mathbf{div}\left(\underline{\underline{\tau}} \bullet \vec{V}\right)}$$

➢Equação de conservação de energia

$$\frac{\partial(\rho\, h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j\; h) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) + S_h$$

$$\phi = h \quad ; \quad \Gamma = \frac{\mu}{\mathbf{Pr}}$$

$$S_h = \dot{q} + \frac{D\,p}{D\,t} + \underline{\underline{\tau}} : \nabla \vec{V} +$$

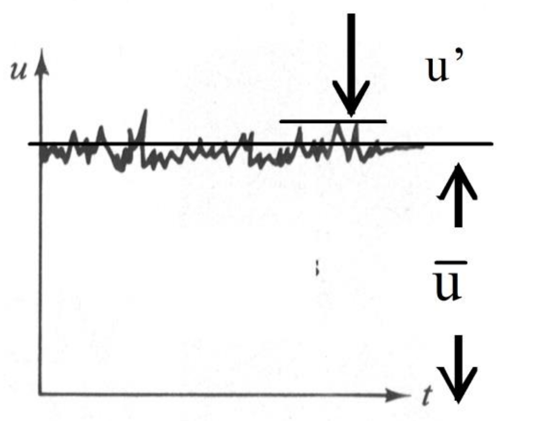
$$+ \mathbf{div}\left[\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} \left(c\, \mathbf{grad}\, T - \mathbf{grad}\, h \right) + \sum_{\ell} \frac{\mu}{\mathbf{Sc}_\ell} h_\ell\, \mathbf{grad}\, m_\ell \right]$$

- Conservação de energia (propriedades constantes)

$$S_h = \dot{q}$$

ESCOAMENTO TURBULENTO

❑O escoamento turbulento é governado pelas mesmas equações que o escoamento laminar. No entanto, rigorosamente falando, este é sempre tridimensional e transiente.



Observa-se, no entanto, que o escoamento pode ser descrito por um valor médio e mais uma flutuação u' (muitas vezes da ordem de 1% de $\overline{u}$)

$$u = \overline{u} + u'$$

generalizando

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad ; \quad \overline{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi \, dt$$

❑Para o engenheiro, muitas vezes é suficiente conhecer o comportamento do valor médio.

❑Note que com relação ao valor médio, podemos fazer a hipótese de regime permanente, pois $\partial \overline{u} / \partial t = 0$

❑Observamos ainda que se o vetor velocidade é dado por

$$\vec{V} = (\overline{u} + u')\,\vec{i} + (\overline{v} + v')\,\vec{j} + w'\,\vec{k}$$

poderemos fazer a hipótese de 2-D com relação aos valores médios. Dessa forma, podemos simplificar bastante o problema. Desejamos então determinar o campo médio de velocidades. Neste caso, é preciso obter equações de conservação para essa grandeza. A expressão $u = \overline{u} + u'$ é introduzida nas equações de conservação e uma média no tempo é realizada

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \text{equação} \; d\,t$$

Equações Médias no Tempo para Escoamento Turbulento

- Conservação de massa

$$\boxed{\frac{\partial \,\overline{\rho}}{\partial \, t} + \frac{\partial \,\overline{\rho}\, \overline{V_i}}{\partial \, x_i} = 0}$$

➢Conservação de espécie química

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\;\overline{m}_\ell)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{V}_j\;\overline{m}_\ell)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Sc}_\ell}\frac{\partial\,\overline{m}_\ell}{\partial x_j}-\overline{\rho'\,V_j'\;m_\ell'}\right)+\overline{R}_\ell$$

Fluxo de massa turbulento

$$-\overline{\rho'\,V_j'\;m_\ell'}=\frac{\mu_t}{\mathbf{Sc}_t}\frac{\partial\,\overline{m}_\ell}{\partial x_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\overline{\rho}\;\overline{m}_\ell)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{V}_j\;\overline{m}_\ell)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\mathbf{Sc}_\ell}+\frac{\mu_t}{\mathbf{Sc}_t}\right)\frac{\partial\,\overline{m}_\ell}{\partial x_j}\right]+\overline{R}_\ell}$$

➢Conservação de quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{V}_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\bar{V}_j\,\bar{V}_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}-\overline{(\rho V_j)'\,V_i'}\right)+\bar{S}_{c_i}$$

Tensão turbulenta

$$-\overline{(\rho V_j)'\,V_i'}=\mu_t\left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\mu_t\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_k}+\frac{\bar{\rho}}{2}\overline{V_i'^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{V}_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\bar{V}_j\,\bar{V}_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_{ef}\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j}\right)+\bar{S}_{c_i}}$$

$$\mu_{ef}=\mu+\mu_t$$

➢Conservação de energia

$$\frac{\partial (\bar{\rho}\, \bar{h})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\, \bar{V}_j\, \bar{h}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} - \overline{(\rho V_j)'\, h'} \right) + \bar{S}_h$$

fluxo de calor turbulento

$$-\overline{(\rho V_j)'\, h'} = \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial (\bar{\rho}\, \bar{h})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\, \bar{V}_j\, \bar{h}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathbf{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j} \right] + \bar{S}_h}$$

Modelos Matemáticos de Turbulência

- Determinações práticas de escoamento turbulento empregam os valores médios no tempo das velocidades, temperaturas, etc.
- As equações de conservação médias no tempo, possuem termos adicionais chamados de tensões ou fluxos turbulentos. Estas expressões podem ser obtidas com redefinições apropriadas de Γ e S.
- Pesquisas recentes dos modelos de turbulência têm mostrado que frequentemente é desejável calcular além das velocidades médias no tempo, as propriedades médias no tempo devido as flutuações do movimento. Equações diferenciais adicionais precisam então ser resolvidas para determinar parâmetros da turbulência. Felizmente estas equações também apresentam a forma da equação geral de ϕ.

- Modelo $\kappa - \varepsilon$ (energia cinética turbulenta-dissipação)

$$\mu_t = c_\mu \rho \kappa^2 / \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho u_i \kappa)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\mu_t}{\sigma_\kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x_i}\right\} + G - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right\} + \frac{\varepsilon}{\kappa}(c_1 G - c_2 \rho\varepsilon)$$

G = geração de κ = $G = \mu_t[\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i]\partial u_i/\partial x_j$

constantes empíricas: $c_1 = 1,44$; $c_2 = 1,92$; $c_\mu = 0,09$;
$\sigma_\kappa = 1,00$ e $\sigma_\varepsilon = 1,30$

- **Equação Diferencial Geral**

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho\vec{u}\phi) = \mathrm{div}\ (\Gamma \mathrm{grad}\ \phi) + S$$

$$transiente + convecção = difusão + fonte$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\} + S$$

Observações

- a variável dependente ϕ pode ser: um componente da velocidade, entalpia (ou temperatura), quantidade turbulenta, etc.

- Cada significado de ϕ implica em uma correspondente especificação de ϕ, S e condições de contorno.

- A identificação da equação diferencial geral facilita a implementação de um programa para resolver escoamentos, sujeitos a transferência de calor/massa.

Coeficiente de Difusão Γ

- é uma representação geral das propriedades dos fluidos como viscosidade ou condutividade térmica, os quais juntamente com o gradiente da variável apropriada leva ao fluxo difusivo como tensão viscosa e fluxo de calor.

- para escoamentos turbulentos, os valores laminares de Γ são freqüentemente substituídos pelas correspondentes propriedades turbulentas como a viscosidade turbulenta.

- em geral, Γ pode ser não uniforme; pode depender da posição (diferentes materiais), da velocidade, temperatura, etc.

Termo de Fonte *S*

➢o termo de fonte é primordialmente definido para mecanismos como geração de calor em um sólido, produção e destruição de espécies químicas em uma reação, forcas de corpo em um fluido, etc.

➢Contudo, *S* também pode ser usado para representar qualquer termo que não possa ser representado pelos três primeiros termos da equação diferencial geral de conservação.

➢ O termo de fonte geralmente depende de ϕ, sendo conveniente rescrever como

$$S = S_C + S_p\ \phi$$